范畴论入门

蒲义书编

汉中师范学院

一九八三年元月

范 畴 论 入 门

蒲 义 书 编

汉中师范学院

一九八三年元月

目　录

序　言

范畴论，是近年来受到人们十分重视的一门新数学。在四十年代末期，Eilenberg与Maclace等人已开始研究范畴与函子。当时的研究是由于同调代数的需要。近年来，它已能够应用于许多数学分支，特别是集合论、拓扑学、抽象代数、模糊数学等。建立范畴概念的目的，是为了把一类数学对象以及它们之间的基本映射放在同等的地位。范畴论，是建立在现代数学的两大基础部门——抽象代数和拓扑学——之上的一门抽象性更高、概括性更强的新数学。它将许多数学结构的公有特性，抽象为统一的体系。藉助于不同数学结构所引进的不同概念，常常可以导致范畴结构的统一概念；反过来，用一般范畴论中所得的定理作工具，有可能应用去得到关于某些特殊数学结构的新信息。这正是抽象数学的好处，也是范畴论其所以受到人们的重视，具有无限发展前途的原因所在。

可惜的是，至今在我们国内还缺少用中文写的《范畴论》的专著或入门书籍。这对于年轻数学工作者学习这门科学，或者应用它去研究其它科学，都会带来一定的困难。为了和年青同志一起，能对这门新数学的基础知识有一些了解，并能阅读用《范畴论》观点所写的现代数学文献，所以才编写了这本《范畴论入门》的小册子，介绍范畴论的一些熟知的常用基本术语和基本理论。限于作者水平，缺点和错误一定很多，敬请读者批评指正。

在编写本书的过程中，受到我院教务处及教学科领导，

数学系房正祥付教授、蔡秉衡同志的关心和支持，同时也得到了陕西师范大学数学系雷天德、王国俊两位付教授的关心。我系袁玉良、田小虎等同学帮了很多忙，在此一并表示感谢。

蒲义书

1982年12月于汉中师院

第一章　预备知识

本章是为了使读者能顺利地阅读二、三章而写的。主要介绍后面两章要用到的一些集论、抽象代数、拓扑空间中的简单知识。限于篇数，定理一般不作证明。如果读者已熟悉这方面的内容，可以略去不读。

§1. 集合与映射

1.1集合

集合论是现代数学的基础。由于集合这个概念是数学中的基本概念之一，所以通常只用它的各种同义语来解释，而不用比它更简单的概念来定义。

具有某种特性的对象的总体，称为集合。集合是一个整体，由各个对象（个体）组成。组成集合的各个个体，叫做这个集合的元素。

人们一般常用大写拉丁字母A、B、C、X、Y、…表示集合；而用小字拉丁字母a、b、c、x、y、…表示集合的元素。如果a是集合A的元素，则记为$a\in A$，读做“a属于A”。如果a不是A的元素，则记为$a\notin A$，读做“a不属于A”。确定一个集合A，就是要确定：哪些元素属于A，哪些元素不属于A。不含任何元素的集合，称为空集记为ϕ。在本书中，如不特别声明，N、Z、Q、R、C分别表示自然数集、整数

集、有理数集、实数集、复数集。

设A、B是两个集合，如果对$\forall a\in A$，均有$a\in B$，便说A包含在B中，或说B包含A，也说A是B的子集合，记为$A\subseteq B$。如果A不是B的子集合，记为$A\nsubseteq B$。显然，对任意的集合A，有$\phi\subseteq A$。此外，集合的包含关系具有特性：(i) $A\subseteq A$；(ii)若$A\subseteq B$且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。A的一切子集合所构成的集合，称为A的幂集合，记为$P(A)$或2^A。

所谓集合A与B相等，记为$A=B$，是指$A\subseteq B$且$B\subseteq A$。集合的相等关系，具有以下特性：(i) $A=A$；(ii) 若$A=B$则$B=A$；(iii) 若$A=B$且$B=C$，则$A=C$。

1.2集合的运算

设A、B、C表示集合。

所谓两个集合A与B的并$A\cup B$，定义为一切属于A或属于B的元素所组成的集合；A与B的交$A\cap B$，定义为既属于A又属于B的一切元素所组成的集合，所谓B在A中的差(余)$A\setminus B$，定义为一切属于A而不属于B的元素所组成的集合。

由于通常在讨论问题时，总是在某一范围（论域）U内，因此，在讨论问题的过程中所出现的一切集，都可以看作成是U的子集。集合B关于U的余集，简称为B的余（补），记为B'。

集合的运算，具有以下的规律：

(1) 幂等律：$A\cap A=A$，$A\cap A=A$

(2) 交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cap B=B\cap A$

(3) 结合律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cap C$，

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(4) 吸收律：$A\cap(A\cup B)=A\cup(B\cap A)=A$

(5) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(6) 0—1律：$A\cap\phi=\phi$，$A\cup\phi=A$

$A\cap U=A$，$A\cup U=U$

(7) 互补律：$A\cap A'=\phi$，$A\cup A'=U$

(8) 对合律：$(A')'=A$

(9) 德莫干法则：$(A\cap B)'=A'\cup B'$，

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

以上特性的证明，留给读者。需要指出的是，并与交的概念，可以推广到任意的集族上去。

1.3映射：

定义1．设A，B是给定的两个集合，如果有一个法则f，使得对于$\forall x\in A$，唯一确定一个元素$y\in B$，则称f是A到B的一个映射，记为

$$f: A\longrightarrow B$$

A叫做映射f的定义域，B叫做f的值域，y叫做x在f作用下的象，记为$y=f(x)$，并用符号

$$f: x\longmapsto y$$

表示，x叫做y的一个原象。

例1．设$A=Z$，$B=\{-1, 0, 1\}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 当x>0\\0 & 当x=0\\-1 & 当x<0\end{cases}$$

即是A到B的一个映射。

例2．$A=Z$，$B=\{x|x\in Z, x>0\}$

$$f: n\longmapsto|n|$$

不是A到B的映射。

例 3. 设A = B

$I_A: a \longrightarrow a \quad \forall a \in A$

是A到B的一个映射，叫做A上的单位映射（或恒等映射）。

例 4. 设$A \subseteq B$，

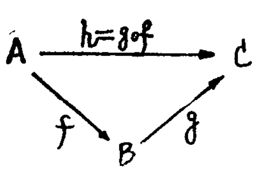
$i: a \longrightarrow a \quad \forall a \in A$

称i为A到B的一个包含映射。

定义 2. 设f是A到B的一个映射，如果$a \neq b$，有$f(a) \neq f(b)$，$\forall a, b \in A$，那么就说f是A到B的一个单射。如果对于$\forall b \in B$，均存在$a \in A$，使$f(a) = b$，那么就说f是A到B的一个满射，满射f用符号$\twoheadrightarrow$表示，即f：$A \twoheadrightarrow B$。若一个映射f，既是单射，又是满射，则叫双射，表示为f：$A \leftrightarrow B$。

如果两个集合之间存在一个双射的话，则说两个集合是等浓（或等势）的。

定义 3. 设有三个集合A、B、C，f：$A \to B$，g：$B \to C$，由f，g确定的A到C的映射h：$a \to g(f(a))$，$\forall a \in A$，叫做映射f、g的合成，记为$h = g\circ f$，即$h(a) = g(f(a))$，h可用下图表示：



根据映射合成的定义，可以证明以下事实：

设f：$A \to B$，g：$B \to C$ h：$C \to D$，则有

（1）$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$

（2）$I_B\circ f = f$，$f\circ I_A = f$

定义 4. 设f：$A \to B$，若存在g：$B \to A$，使$g\circ f = I_A$，则说f是左可逆映射，g叫做f的左逆映射。同样，若$f\circ g = I_B$，

则说f右可逆，g叫做f的右逆映射。当f是双侧可逆时，说是可逆映射。

可以证明：

f：A→B，f是左可逆的充要条件为f是单射；f是右可逆的充要条件为f是满射，f是可逆映射的充要条件为f是双射。

需要指出的是，一个映射可能有许多个左逆映射而没有右逆映射，也可能有许多个右逆映射而没有左逆映射，一个映射如果既有左逆映射，又有右逆映射，则两者必相等。

1.4.笛卡尔积、二元关系：

设A，B是任意两个集合，我们可以利用A，B构成一个集合：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

$A\times B$称为A，B的笛卡尔积。特别地，$A\times A$表示的元素的一切有序对所作成的集合。应该注意的是，当$a_1\neq a_2$时，(a_1,a_2)与(a_2,a_1)是不同的元素。

两个集合的笛卡尔积，可以推广到任意多个集合上去：

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_{22},\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

$$\prod_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\times\cdots=\{(a_1,a_2,\cdots,an,\cdots)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots\}$$

一般地，如果$\{A_i\mid i\in I\}$是任意一个以集合I的元素为标号的集合族，其笛卡尔积可以定义为：

$$\prod_{i\in I}A_i=\{(\cdots,ai\cdots)\mid a_i\in Ai,\ \forall i\in I\}$$

定义4. $A\times B$的子集R叫做A，B间的一个二元关系，当$(a,b)\in R$时，说a与b具有关系R，记为aRb；当$(a,b)\notin R$时，说a与b不具有关系R，记为$aR'b$。A，A间的关系，简称为A上的关系。

例5. $A=Q$，

$$R_1=\{(a,b)|(a,b)\in Q\times Q,\ a=b\}$$

$$R_2=\{(a,b)|(a,b)\in Q\times Q,\ a\leqslant b\}$$

容易看出，R是Q中的相等关系，R_2是Q中的“小于或等于关系”。

例6. $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$

$R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c)(a,b),(b,a)(b,c),(c,b)\}$

$R_3=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$

R_1，R_2，R_3都是A的二元关系。

例7. $A=Z$，

$$R=\{(a,b)|a,b\in Z,a|b\}$$

$R_m=\{(a,b)|a,b\in Z,m|a-b\}$，m是取定的自然数。

对于R来说，当且仅当$a|b$时，aRb，而对于Rm来说，当且仅当$a-b=km$时$(k\in Z)$，aRmb。

定义5. 设R是集合A上的二元关系，

（1）若对于所有$a\in A$，均有aRa，则说R具有反身性；

（2）若对于所有a，$b\in A$，当aRb时，恒有bRa，则说R具有对称性；

（3）若对于所有a，b，$c\in A$，当aRb，bRC时，恒有aRC，则说R具有传递性，

（4）若对于所有a，b∈A，当 aRb，bRa 时，恒有 a=b，则说R具有反对称性。

A上的关系R，如果具有反身性，对称性及传递性的话，则称关系R是等价关系，如果具有反身性，反对称性和传递性的话，则称关系R为偏序关系。

§2群及其有关的代数系

抽象代数就是研究各种各样代数系的科学。所谓一个代数系，就是在其中定义了若干个代数运算的非空集合。

群，是抽象代数中产生较早，应用广泛而又较简单的代数系。本节介绍群的简单概念，并附带介绍几个与群有关并在其中只定义了一个二元代数运算的代数系。

2.1、群的定义：

定义1．一个群G，是一个非空集合和一个被称为“乘法”的二元运算，并满足以下公理：

G_0（封闭律）：对于G中任意有序元素对a，b，都唯一确定G中的一个元素c，记为c=ab。

G_1（结合律）：$\forall a,b,c\in G$，恒有 $(ab)c=a(bc)$

G_2（左单位元存在）：存在一元素e，使ea=a，对于G中任意的a均成立。

G_3（左逆元存在）：对于G中任意元素a，在G中存在元素x，使xa=e。

例1．G只包含一个元g，乘法是gg=g。G对于这个乘法来说作成一个群。这个群的左单元是g，g的左逆元也是g。

例2．设$G=Z$，其运算为通常的加法运算，显然也构成一群，称为整数加法群。这个群的左单位元为0，每一元a的逆元就是（$-a$）。

容易证明，一个群具有如下特性：

（1）G_2'：每一个群的左单位元e，也是右单位元。即对$\forall a\in G$，$ae=a$。

（2）G_3'：群G的每一元a的左逆元也是右逆元。即对$\forall a\in G$，如果$xa=e$，也有$ax=e$。

（3）G_4'：对于群G的任意元素a和a，方程$ax=b$和$ya=b$在G中都有解。

可以证明，公理，G_0，G_1，G_2，$G_3\Longleftrightarrow$公理G_0，G_1，G_2'，$G_3'\Longleftrightarrow$公理G_0，G_1，G_4。

即上述任何一组公理，都可以作为群的定义。需要注意的是，不能用公理G_0，G_1，G_2，G_3'或G_0，G_1，G_2'，G_3作为群的定义。

例3．$G=\left\{\begin{pmatrix}a & o\\ b & o\end{pmatrix}\middle|,\ a,b\in R,\ a\neq o\right\}$关于普通矩阵的乘法，满足公理$G_0$，$G_1$，且对$\forall c\in R$，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}$均为右单位元。对于任意的右单位元，元素$\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}$的左逆元为$\begin{pmatrix}a^{-1} & 0\\ a^{-1}c & 0\end{pmatrix}$，但无右逆元。故G不作成一个群。

例4．$G=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & b\end{pmatrix}\middle|\ a\neq 0,\ a,b\in R\right\}$关于普通矩阵乘法满足$G_0$，$G_1$，且当C为任一实数时，均有

$\begin{pmatrix}0 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & b\end{pmatrix}$ $\therefore\begin{pmatrix}0 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}$为左单位元。对任一左单位元

$\begin{pmatrix}0&0\\c&1\end{pmatrix}$，元素$\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}$均有右逆元素$\begin{pmatrix}0&0\\bc^{-1}&b^{-1}\end{pmatrix}$，但当C取定后，$\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}$不一定有左逆元。故G不作成一群。

在一个群中，可以定义元素的幂的概念：

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots\cdots a}_{n\text{个}a} \quad (n>0\text{为正整数})$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n$$

并且容易算出，对任意的整数m，n，均有：

(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

定义2. 群G中的一个元素a，能够使得：

$$a^m = e$$

的最小正整数m，叫做a的阶。若这样的m不存在，则说a是是无限阶的。

定义3. 一个群G叫做交换群，假如对$\forall a, b \in G$均有：

$$ab = ba。$$

交换群也叫做阿贝尔群或加法群。在一个加法群中，常以“+”代替乘法记号“·”。这时，幂的概念就变为倍的概念：

$$na = \underbrace{a + a \cdots + a}_{n\text{个}a}$$

并且：

$$na + ma = (n+m)a$$

$$n(ma) = nma$$

定义4. 一个群叫做有限群，假若这个群的元素的个数是一个有限整数；不然的话，这个群叫做无限群。一个有限

群的元素的个数，叫做这个群的阶。

2.3 与群有关的代数系

所谓与群有关的代数系，即是指这种代数系，在它中只有一种代数运算，而且这些运算总是满足群的各种定义中的若干公理。

（I）群胚（乘集）：一个非空集，如果它满足条件 G_0 的话，叫做群胚，或者也叫乘集。也就是说，群胚是在其中规定了二元代数运算的非空集。对运算，除要求封闭外，别无其它要求。

（Ⅱ）半群：满足条件G_0，G_1的非空集叫做半群。

注：（1）由于在半群中乘法的结合律成立，所以半群中也可以定义元素的幂的概念。

（2）不是半群的群胚是存在的。

例5. 设$G=\{1, 2, 3, 4\}$，其乘法表如下：

	1	2	3	4
1	2	1	1	3
2	4	2	3	1
3	1	3	2	4
4	3	4	1	2

G关于上述运算，确为一群胚，但不是半群。

$$\because (2\cdot 3)\,4 \neq 2\,(3\cdot 4)$$

不仅如此，也没有单位元e。方程$ax=b$，$ya=b$也不是永远有解。$1\cdot x=4$就无解。$y\cdot 3=4$也无解。

（3）是半群而不是群的例子是存在的。

例6. 全体自然数集N关于普通的加法即是一半群而不是群，因为减法在这里不是永远可行的。

例7．数域P上的全体$n\times n$矩阵，关于普通的矩阵乘法即是一半群，而不是群。

（4）半群中可能有无穷多个左单位元而无右单位元，也可能有无穷多个右单位元而无左单位元。见前面的例3和例4。

（Ⅲ）拟群：满足G_3，G_4的非空集合称为拟群。

注（1）关于某种运算既是拟群又是半群的非空集，即是一群。应该注意的是，必须是同一运算。

（2）由于在拟群中，结合律不成立，所以，尽管方程$ax=b$及ya都有解，并不一定有单位元。

（Ⅳ）圈：一个圈是一个拟群，并且存在一单位元e，使得对任意元素a，均有$ea=ae=a$。

注：（1）拟群不一定是圈，也就是说，拟群不一定具有单位元。

例8．设$G=\{a,b,c\}$，其乘法表如下：

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

并命$a^{-1}=a$，$b^{-1}=b$，$c^{-1}=c$

则G关于上述的乘法运算形成一拟群，但不具有单位元e。

（2）圈不一定是群。

例9．设$G=\{a,b,c,d,e\}$，其乘法表如下：

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	d	b	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	e	b
d	d	b	c	a	e

显然，G关于上述乘法形成一圈。因为由乘法表容易看出$ax=b$，$ya=b$，方程永远有解，且有单位元e。

然而，G关于上述乘法不形成群。因为

$$b(ad)=b\cdot c=d$$

$$(ba)d=c\cdot d=b$$

$$\therefore b(ad)\neq(ba)d$$

（Ⅱ）独异点（含单位元的半群）：如果一个半群G中存在单位元的话，称为独异点。

例10.全体非负整数集，关于普通加法形成一独异点。此时的单位元即是0。

例11.全体正偶数关于普通乘法形成一非独异点的半群。

（Ⅵ）半广群和广群：

一个半广群是一个集合M，对于某些对子α，$\beta\in M$，定义了积：

$$\alpha\beta\in M$$

并满足下面两个结合条件：

（AC_1）：对于M的任意元素α，β，γ，三重积$\alpha(\beta\gamma)$被定义，当且仅当（$\alpha\beta$）γ被定义。在两个都定义的情况下，结合律：

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$