立体几何講义

清华大学附属中学編

1965.10

立体幾何讲義
1965年10月
附中011

編　者：　清華大学附屬中学
排印者：　清華大学印刷厂
發行者：　清華大学印刷厂發行組

印　数：300　　　定　价：0.55 元

1. 本講义是与立体几何的教学相配合的。有些定理及推论只在課堂講授时給以适当的论証，其証明不再写入講义。（其中有些附有証明时要用的图形。）

2. 两种直观图及二視图虽然編入专节，但可以分段插入有关內容中教学。

3. 附录、附註等一般是供同学自己看的，不一定講授。

4. 每小节后的練习系口答題和供課后复习时用的題，一般不要求作出書面解答交給老师批閱。

5. 例題与习題是供教师講授时选用的例題及点給同学作的习題，其中註有“*”者是选作題不要求每个同学都作。

6. 参考題是供复习、总结、綜合、提高用的題，其中有些难度較大，除教师指定者外不要求每个同学都全作。完成正常学业外尙有余力的同学可以选作。

7. 解答问題时凡講义中已有的结论，包括練习、例題与习題中已论証过的结论都可以引用（参考題中的除外）。这些结论中較常用到者在題号上加有方括号［ ］。解題一般只要在引出结果时提出的条件是完备的，可以不必註明所引用的结论。（教师指定在某些时间必须註明者除外。）

8. 近似数据的处理按近似計算的規定要求。計算中希望尽量利用四位数学用表与計算尺。有些数据不要求进行近似計算，例如 $\sqrt{3}\pi a$ 不必写作 $5.441a$。

立 体 几 何 讲 义

目　　录

立体几何講义

第一章 直綫、平面、多面体及旋轉体的性质

§1 基本概念

1.1 平面

立体几何研究的是空间图形。我们主要是研究点、直线、平面、多面体、旋转体的性质、表面积和体积。

平坦的地面、平静的水面、平整的桌面、平滑的玻璃板及冰面等都给我们以平面的形象。与直线是无限延伸的一样，几何中平面也是无限地伸展着的，虽然画在紙上时只能画出它的一部分。

我们在紙面上画平面时往往画成一个平行四边形（如图1甲）画图时凡是被遮住的线段都画成虚线或不画（如图1乙、丙）。如果画水平放置的平面，其中一个角画成45°，横边大致是另一边的两倍。

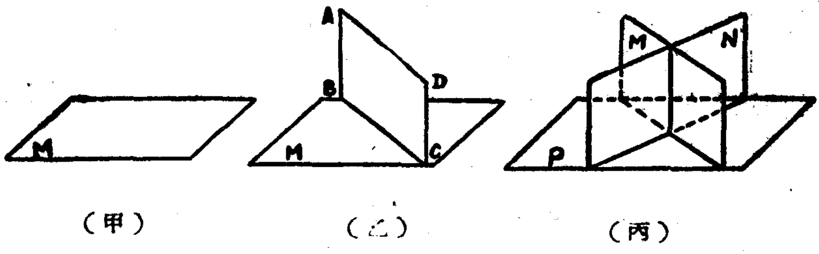


圖 1

通常以大写的拉丁字母 M、N、P、Q 等表示平面。有时也用平行四边形的四个頂点或其中相对的两个頂点来表示，如图1乙

的平面 $ABCD$（或记作平面 AC）。

通过人们的实践与提鍊，已经总结出了平面的一些性质作为立体几何的公理，它们是：

<u>公理 1</u>：如果一条直线有两个点在一个平面內，则此直线上的所有的点都在这平面內。

这时我们说直线在平面內。或说：平面经过直线。（如图 2）。

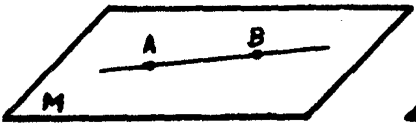


图 2

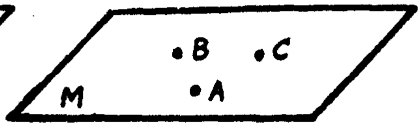


图 3

<u>公理 2</u>：不在同一条直线上的三个点确定一个平面。（如图 3）。

这句话的意思是：对于不在同一条直线上的三个点来说，必定有一个且只有一个平面经过这三个点。

这一性质在日常生活中应用很广，例如我们常见的三脚凳利用它的三个脚的端点来固定凳面，就是一例。

<u>推论 1</u>：一直线和此直线外一点确定一平面。

已知：直线 l 及线外一点 A。

求証：l 与 A 确定一平面。

証明：在 l 上任取两点 B、C。据公理 2 不在同一直线上的 A、B、C 三点确定一平面，设此平面为 M。（如图 4）。

由于 B、C 两点在 M 內故据公理 1 知直线 l 在 M 內，亦即过 l 与 A 的平面有一个且只有一个，它就是 M。于是推论 1 获証。

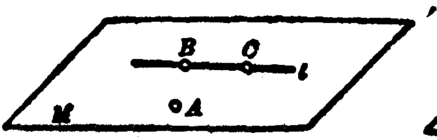


图 4

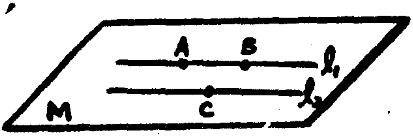


图 5

推论 2：两条平行直线确定一平面。

已知：直线 $l_1 // $ 直线 l_2。

求証：l_1 与 l_2 确定一平面。

証明：(1) 按平行线定义："同一平面內两条不相交的直线称为平行直线。"因此至少有一个平面经过平行直线 l_1 与 l_2。

(2) 在 l_1 上任取两点 A、B，在 l_2 上取一点 C，则据公理 2 经过 A、B、C 三点的平面只有一个。(如图 5 中的平面 M)。由于过 l_1 与 l_2 的平面必经过 A、B、C 三点，故过 l_1、l_2 的平面最多只有一个。(这一结论也可只在 l_1 上取一点，利用推论 1 証明。)

綜合 (1) 与 (2) 就証明了过两条平行直线 l_1 与 l_2 的平面有一个且只有一个。于是推论 2 获証。

推论 3：两条相交直线确定一个平面。(图 6)。

同学们可以自己举一些在日常生活中应用上述公理及推论的事例。

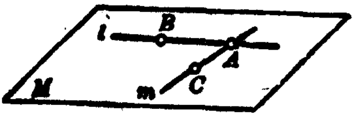


圖 6

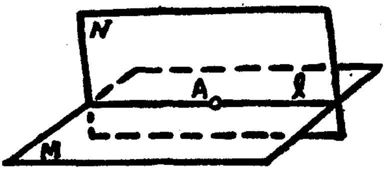


圖 7

公理 3：若二平面有一个公共点，则它们相交于过这点的一条直线。

这一公理本来的意思是：两个平面不可能只交于一点。(注意：几何中所謂平面是无限伸展的。) 一般应用中主要用到：两个不重合的平面如果有公共点，则必有一条且只有一条公共直线。

图 7 画的是不重合的平面 M 与 N 有公共点 A 因而相交于直线的 l 情形。l 称为平面 M 与 N 的交线。应注意：凡交线上的点都是相交两平面的公共点；凡相交两平面的公共点都在它们的

交线上。

练习 1.1

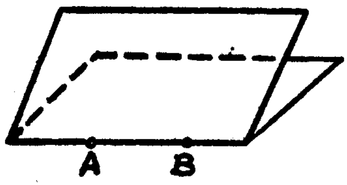
1. 三点确定一平面。对嗎？

2. 四点不能确定一平面。对嗎？

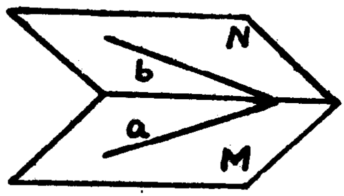
3. 三条直线两两相交，它们是否一定在同一平面內？

4. 把一张紙折一下，为什么折痕是直线？

5. 两个不重合的平面如果有两个公共点 A、B，那么它们必有其他的公共点，而这些公共点都在直线 AB 上。



題 5



題 6

6. 平面 M 与平面 N 相交，a 为 M 内的一条直线，b 为 N 內的一条直线。如果 a 与 b 相交，其交点必在 M 与 N 的交线上。

7. 若两个平面有三个公共点，而这三点不在同一直线上，则此两个平面重合。

8. 每一个三角形确定一个平面。

附註：由 $\triangle ABC$ 确定的平面可记作：平面 ABC。

1.2 平面、直线的位置关系

現在我们来分别討论空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系。

I. 直线与直线的位置关系

我们已经知道，在同一平面內不重合的两条直线只有平行或相交这两种位置关系。在空间中我们还看到另一种情形，例如教室里左面墙上的一条横线与右面墙上的一条縱线，它们既不平行，也不

相交，不可能在同一平面內。同学们可以举出很多这样的例子。

不在同一平面內的两条直线称为异面直线。异面直线就是旣不平行、又不相交的直线。（否则它们就在同一平面內了。）图 8 中的 a 与 b 都是异面直线。

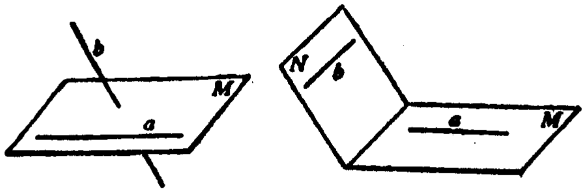


圖 8

因此，空间两条不重合的直线有三种可能的位置关系，即：

1.　异面直线　　无公共点　　不在同一平面內；

2.　平行直线　　无公共点

3.　相交直线　　只有一个公共点

（2、3）在同一平面內。

由于不重合的直线不可能有两个或两个以上的公共点（因为两点确定一直线），故空间两条不重合的直线必恰属于上述三种位置中的一种。

Ⅱ. 直线与平面的位置关系

空间一条直线与一个平面如果有且只有一个公共点则称为直线与平面相交；如果沒有公共点则称为直线与平面平行。图 9 画的是直线 a 与平面 M 平行，可记作 $a // M$。

空间一条直线与一个平面有三种可能的位置关系，即：

1.　直线与平面平行　　无公共点；

2.　直线与平面相交　　只有一个公共点；

3.　直线在平面內　　直线有两点（因而所有的点）在平面內。

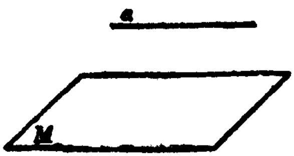


圖 9

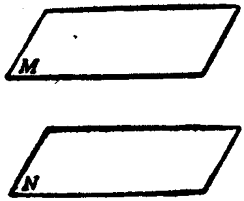


圖 10

Ⅲ．平面与平面的位置关系

两个平面沒有公共点则说这两个平面平行。平面 M 与平面 N 平行可记作 $M /\!/ N$（如图 10）。

空间两个不重合的平面有两种可能的位置关系，即：

1．平行平面　　无公共直线（即无公共点）；

2．相交平面　　有一条公共直线（交线）。

練　习　1.2

1．分别在两个平面內的两条直线一定是异面直线嗎？

2．分别在两个平行平面內的两条直线能相交否？它们是否一定平行？

3．直线 a 与平面 M 平行，直线 b 在 M 內，a 与 b 有那几种可能的位置关系？

1.3 多面体

由几个多边形（包括多边形的內部）围成的封閉的立体称为多面体。这些多边形称为多面体的面。每相邻两个面的交线称为多面体的棱。几条棱的交汇点称为多面体的頂点。多面体中，不在同一平面內的两个頂点的连线称为多面体的对角线。（图 11）。

多面体依照它们具有的面的数目分别称为四面体、五面体、六面体等等。

立体几何中研究的多面体的主要是棱柱、棱錐、棱台，兹分别介紹如次：

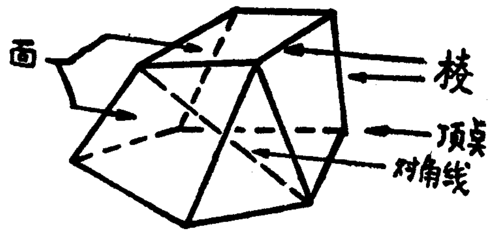


圖 11

棱柱：有两个面互相平行，其余的每相邻两个面的交线都互相平行的多面体称为棱柱。互相平行的两个面称为棱柱的底面。其余的面称为棱柱的侧面。相邻两侧面的公共边称为棱柱的侧棱。换言之：棱柱的两底面互相平行；各条侧棱互相平行。（图 12）。

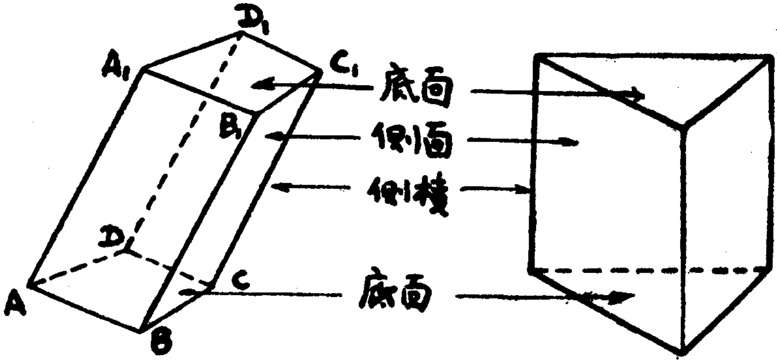


圖 12

如图 12 中的以 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 为底面的棱柱通常记作棱柱 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$。

棱柱按其底面为三角形、四边形等分别称为三棱柱、四棱柱等等。我们所熟悉的长方体、正方体都是四棱柱。

棱錐：有一个面是多边形，其余各个面是有一个公共頂点的三角形的多面体称为棱錐。这多边形称为棱錐的底面。其余的面都称为棱錐的侧面。相邻两侧面的公共边称为棱錐的侧棱。各侧棱的交点称为棱錐的頂点。（图 13）。

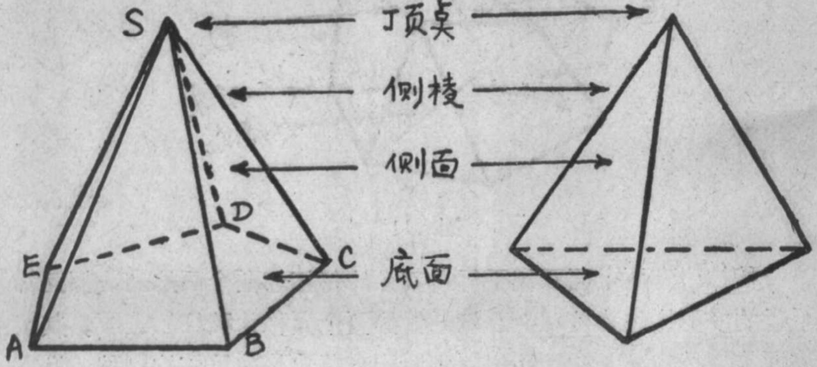


圖 13

如图 14 中頂点为 S、底面为 $ABCDE$ 的稜錐可记作稜錐 $S—ABCDE$ 或簡化记作稜錐 S。

稜錐按其底面为三角形、四边形等分别称为三稜錐、四稜錐等等。

一个平面截一个立体所得的平面与立体的公共部分称为一个截面。稜柱的过两条不相邻的側稜的截面称为稜柱的对角面。稜錐的过两条不相邻的側稜的截面称为稜錐的对角面。（图 14）。

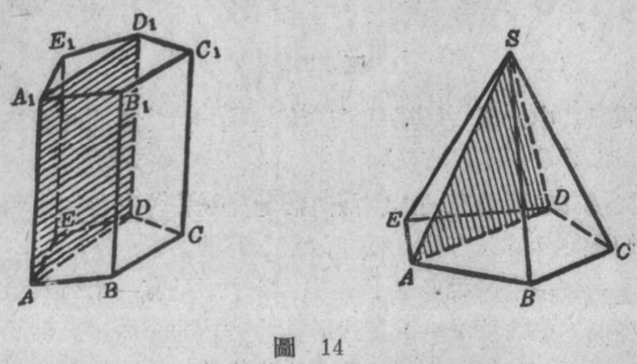


圖 14

稜台：平行于稜錐底面的平面截稜錐所得的截面与底面间的部

分称为稜台。两个平行的平面分别称为稜台的底面，其中原稜錐的底面称为下底面，截面称为上底面。稜台的其余各个面称为稜台的侧面。每相邻两侧面的公共边称为稜台的侧稜。（图 15）。

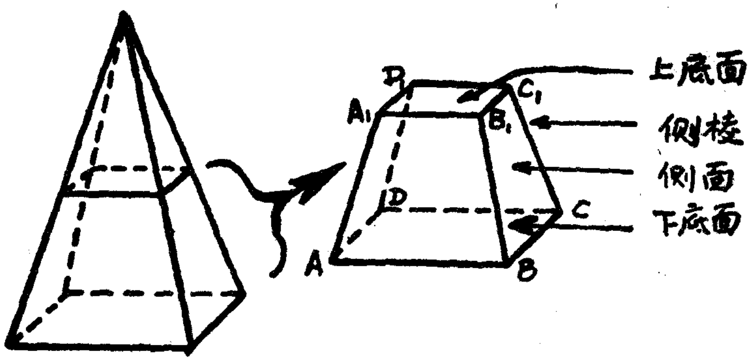


圖 15

由三稜錐、四稜錐等所截得的稜台分别称为三稜台、四稜台等等。稜台的记法与稜柱相仿，例如图 16 的稜台可记作稜台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$。

練 习 1.3

1. 长方体、正方体各是几面体？
2. 三稜錐必是四面体；四面体必是三稜錐。对嗎？
3. 五稜柱、四稜錐、三稜台各是几面体？
4. 稜台的各条侧稜延长后必相交于一点。
5. 四稜錐、五稜柱各有几个对角面，几条对角线？

例题与习题一

1. 仿照着画出下列各图形（不許模在原图上画）。

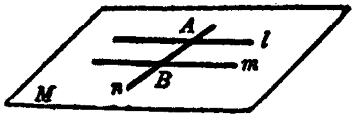
(1) §1.1 图 1 乙、丙图，

(2) 練习 1.1 第 5 題图、第 6 題图。

附註：如果不是比较特殊的图形，很多情况下画图时往往都安

排一个水平放置的平面。（这一方面能使画图方便些，另方面也易于加强画出的图形的立体感。但不是非如此画不可。）

2. 一条直线与两条平行直线相交，試証这三条直线在同一平面内。



题 2

已知：直线 $l /\!/$ 直线 m；直线 n 和 l、m 均相交。

求証：l、m、n 在同一平面内。

証明：∵ $l /\!/ m$，

∴ l、m 确定一平面，设为平面 M （如图）。

设 n 与 l、m 相交于 A、B 两点。

∵ A、B 在 M 内，

∴ n 在 M 内。

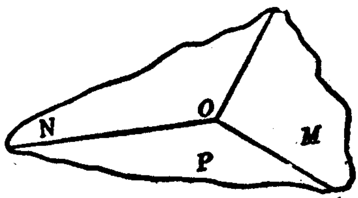
即 l、m、n 三条直线在同一平面内。証毕。

3. A、B、C、D 四个点中前三个在直线 l 上，但 D 不在 l 上。

(1) 是否其中任何三个点都确定一平面？

(2) 試証三条直线 AD、BD、CD 在同一平面内。

[4]. 三个平面两两相交有三条交线时，如果其中两条交线相交，则另一条必过它们的交点。



题 4

已知：如图，平面 N 与平面 P、平面 M 与平面 P 的交线都经过 O 点。

求証：M 与 N 的交线也经过 O 点。

証明：∵ O 点在 M、P 的交线上，

∴ O 在 M 内，

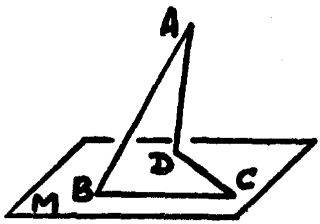
∵ O 点在 N、P 的交线上，

∴ O 点在 N 内，

∴ O 点既在 M 内又在 N 内，O 是 M、N 的一个公共点，

∴ M、N 的交线經过 O 点。

5. 不在同一平面內的若干线段首尾相接，并且最后一条的尾端与最初一条的首端重合，这样所成的图形称为空间多边形。如图所示为空间四边形 $ABCD$。在空间四边形中连接不相邻两顶点的线段称为空间四边形的对角线。



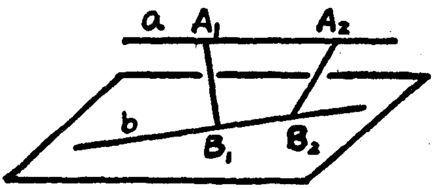
題 5

試証空间四边形的对角线为异面直线。

6. 直线 a、b 在互相平行的两平面 M、N 內試証：若 a 不与 b 平行则 a、b 必为异面直线。

7. 試画出四稜柱四稜錐、三稜台的图形各一个。

8.* a、b 为异面直线，A_1、A_2 为 a 上两点，B_1、B_2 为 b 上两点，試証直线 A_1B_1 与 A_2B_2 为异面直线。



題 8

9.* 不过同一点的四条直线每两条都相交，試証它们在同一平面內。

§ 2. 平行关系

2.1 直线和平面平行

直线和平面平行判定定理：不在平面內的一条直线如果和平面內的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面平行。

已知：如图 16，直线 a 不在平面 M 內，直线 b 在 M 內，

$a /\!/ b$。

求証：$a /\!/ M$

証明：由于两条平行直线确定一平面，设平面 N 为由平行直线 a、b 确定的平面。

$\because$ b 在平面 M 内又在 N 内，

$\therefore$ b 是 M 与 N 的交线。

由于 a 在 N 内，如果 a 与 M 有交点，那么这交点既在M内又在 N 内，因而必在 M 与 N 的交线上。即 a 与 b 相交，这与 $a /\!/ b$ 的已知条件矛盾。故 a 与 M 沒有公共点，即 $a /\!/ M$。証毕。

証明这一定理的关鍵是应用"反証法"。这方法我们在平面几何中及前面証异面直线时已经多次用过，同学们应熟悉这一方法。下面两个定理可用这方法証明。

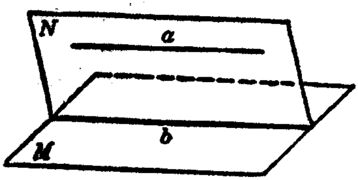


圖 16

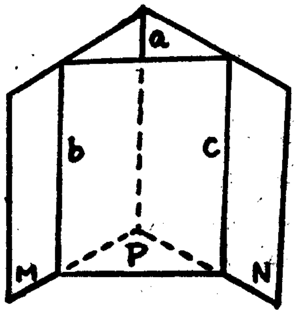


圖 17

定理 1：一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面又与这个平面相交，那么这条直线就和交线平行。（亦如图 16）。

推论：三个平面两两相交有三条交线时，如果其中两条交线平行，那么第三条也和它们平行。

（如图 17，在三个平面 M、N、P 两相交所得的三条交线中若 $b /\!/ c$，则必有 $a /\!/ b$，$a /\!/ c$。）

定理 2：两个平行平面中一个平面內的直线必与另一个平面平