

數理統計學

第一冊 機率分布論

增訂版

魏應澤編著

MATHEMATICAL STATISTICS

VOLUME 1. PROBABILITY AND DISTRIBUTION

Second Edition

Ing-Tzer Way

數理統計學

第一冊 機率分布論

增訂版

國立政治大學

統計研究所及企業管理研究所教授

魏應澤 編著

MATHEMATICAL STATISTICS

VOLUME 1. PROBABILITY AND DISTRIBUTION

Second Edition

Ing-Tzer Way, Ph.D.
Professor of Statistics
National Chengchi University
Republic of China

1982

著者簡歷：

- I. 學 歷：1. 國立台灣大學畢業
2. 美國愛渥華州立大學 (Iowa State University)
統計學碩士及博士
- II. 經 歷：1. 國立台灣大學助教、講師、副教授
2. 國家科學委員會研究副教授
3. 美國史丹福大學統計學系研究教授
- III. 現 職：國立政治大學統計研究所及企業管理研究所教授
國立臺灣大學試驗統計博士班兼任教授
國立中興大學統計學系兼任教授
- IV. 著 作：抽樣理論及其應用

版權所有
翻印必究

台內著字第捌陸零貳號

中華民國六十五年七月四日出版

中華民國七十一年九月二十八日增訂版

數理統計學 第一冊 機率分布論

編著兼： 魏 應 澤
發行者

印刷者： 文滙印刷廠 (台北市環河南路2段173號)

直接訂購： 郵政劃撥儲金帳戶第 105244 號

特價優待： 電 話：702-5775 · 351-9386

基本定價： 新臺幣 伍元正

渡誕此以福誠恩
歡華以親山至之
親壹謹父南且育
父晉年給比海養
逢秩龍獻壽東謝
喜捌於書祝如感

自序

現代社會中各種科學之研究與發展，企業經營之各種決策的釐訂與執行，乃至於政府機關施政之策劃與推行，都以週密設計搜集完整有關資料經過適當的統計方法分析所得結果為依據，期能使冒犯風險失策之程度於最小而迅速達到預期之目的。由此可見，統計學科之重要性。鑒於此，國內外大專院校對於數理統計學或統計理論課程都甚重視，蓋因其為發展統計分析法之基礎故也。本人教授數理統計學已有十年的光景，在此期間對於教科書之選擇深感困難。由於國內大學規定該課程必修兩學年十二學分，但一般之教科書通常僅適用於一學年六學分之講授，例如 Hogg and Craig: *Introduction to Mathematical Statistics* 及 Mood, Graybill and Boes: *Introduction to the Theory of Statistics* 等書是也。因此，在次學年就很難找出適當的教科書，若採用 Wilks: *Mathematical Statistics*，則其內容太深，不適用於大學部之用。即使有深淺程度適當的教材，難免有許多重複之處，影響學習興趣。近年來統計理論繼續不斷地發展，日新月異，其所論述範圍愈來愈廣，所以吾人必須學習的課題亦愈來愈多。倘若將同一課題重複講授，雖然可使讀者增加瞭解而獲得較深的知識，但是所學範圍狹小，有如井底之蛙的感覺。因此，本人希望能撰寫一系列的書，分別詳細論述各課題，以深入淺出的方式充實內容，期能使讀者容易瞭解而獲得夠水準的基本知識。擬定的系列是：機率分布論（Probability and Distribution）、推算檢定論（Estimation and Test of Hypothesis）、直線模式與變方分析論（Linear Models and Analysis of Variance）、多變值統計分析論（Multivariate Statistical Analysis）及

時間序列分析論 (Time Series Analysis)。

在所擬定的系列中居於首位的機率分布論一書共有十章，其內容簡述如下：先給這些對於集合論 (Set Theory) 尚未甚瞭解的讀者詳細予與解說，以充實其基本觀念，俾便容易研讀其餘各章節。接着討論構成機率空間的樣本空間、Borel 集合體 (Borel Field) 及機率函數三元素間的關係，以奠定機率論之基礎進而對於較深之原理可得清晰之瞭解。繼之，以機率空間為根基定義隨機變數，藉以獲得誘導的機率空間 (Induced Probability Space) 便於討論隨機變數之機率分布。隨機變數之特性係用動差 (Moments) 表示，故在第四章說明各種動差之定義及求法，其與分布特性間之關係。在統計分析上，需要利用組成隨機樣本 (Random Sample) 之數個隨機變數的某種函數，即所謂之統計式 (Statistic)，以推算分布之各種特徵常數 (Parameters) 及檢定統計假說 (Statistical Hypothesis) 並分析各種變異原因等等，因此，必須先獲悉統計式之分布，在第五章中詳細討論統計式分布之各種求法及其理論根據。其次，將常用的特殊機率分布在第六及七兩章中介紹並討論各特殊機率分布之由來及其相互間之關係。第八章之特性函數雖然其功用與動差母函數相同，但因其所有的隨機變數之機率分布上都存在而動差母函數却不一定之故，吾人利用特性函數以討論第九章隨機變數序列之收斂與極限分布。用途廣泛的大數法則及中心極限定理都在此章中很詳細地論述。最後以多變值常態分布及二次式分布 (Quadratic Distribution) 為一章而結束本書。讀者倘若能徹底瞭解本書各章節之論述而融會貫通，則將來深入研究有關機率分布論之專題時可收事半功倍之效。

在本書中的統計術語中文譯名，大部份採用國立臺灣大學教授現任中央研究院院士汪厥明老師所譯者，其翻譯得確實美極了。例如：Variance 一詞普通被譯為“變異數”而汪師則譯為“變方”。著者認

爲將其譯爲變異數甚不妥，其理由有三：（1）試問“變異數”與“變數”在中文的意義上有何區別？若無，則何不用“變數”，其不是可免去多寫一字之煩嗎？但“變數”爲 Variable 之譯，豈不是混淆不清！（2）每一種隨機變數之分布，若其 $Var(X)$ 存在，則 $Var(X)$ 爲唯一的一個固定常數，並非變異不定之數也。（3） $Var(X)$ 是用以衡量隨機變數 X 之實數值在其平均值 μ_x 之周圍變異的程度，爲表達此意，在譯詞中不妨含有“變”或“變異”之字，但不宜用字數的多寡以區別兩個不同意義的專有名詞：“變異數”有三個字而“變數”有二個字。若譯爲變方，則其優點有三：（1）“變方”與“變數”不發生混淆現象。（2）“變方”中之“方”係指平方之意，因在所採用的符號 σ_x^2 、定義 $Var(X) = E[X - E(X)]^2$ 及其計算過程中都用到平方故也。（3）“變異數”的筆劃數比“變方”者多出 22 劃，書寫甚煩矣！儘管譯得如此美妙，可惜未普遍被採用，似乎國內有學閥之存在，固執成習不願接受他人之長處以求改進，共同爲發展我國科學而努力，真是可嘆可悲矣！

著者承受吾師汪厥明院士之教益良多，獎掖之恩永誌不忘，至誠感謝。當目前國內缺乏數理統計學中文教科書及參考書之際，本人承汪師之鼓勵而完成此書，倘能以其增進讀者之學識，則汪師之功不可沒。本書在刊印期間，承國立臺灣大學朱良基教授之校閱並提供寶貴意見使得本書愈趨完善，非常感激。又承輔仁大學統計學系鄭錦彬講師於百忙中細心校正並編撰索引，減輕著者之負擔甚多，國立政治大學統計研究所洪宜國、許瑋瑤及李孫儒三位同學協助校對，於此一併誌謝。

魏應澤

民國六十五年七月序於

國立政治大學統計研究所及企業管理研究所

增 訂 版 序

因鑒於順序統計式 (Order Statistics) 在無特徵數統計推測 (Nonparametric Statistical Inference) 中佔極重要之地位，故特添第十一章，討論順序統計式之分布與其應用，以供讀者參考。

本書初版，由於倉促付梓，誤植之處，在所難免。除將錯誤及遺漏一一予以訂正外，並經輔仁大學統計學系鄭錦彬教授再度給予精細檢閱求證，使誤植更為減少，特此誌謝。

年來屢聞留美學生託其在臺親友郵寄本書以供參考而順利完成有關課程之修讀，亦有不少欲赴國外留學的前來或劃撥郵購本書準備攜帶出國進修，至感欣慰。若本增訂版能更有益於增進讀者之學識，則幸甚矣！

魏 應 澤

中華民國七十一年九月序於
國立政治大學企業管理及統計兩研究所

目 錄 (Contents)

第一章 集合論之基本概念 Chapter I. Basic Concepts of Set Theory

1.1	各種集合之定義及其運算 (Definitions and Algebra of Sets)	1
1.2	集合序列之極限 (Limit of Sequence of Sets)	7
1.3	卡特氏積空間 (Cartesian Product Space)	11
1.4	Borel 集合體 (Borel Field)	14
1.5	集合函數 (Set Function)	21
	習題一 (Exercise I)	27

第二章 機 率 空 間 Chapter II. Probability Space

2.1	樣本空間與事象 (Sample Space and Events)	31
2.2	機率函數 (Probability Function)	35
2.3	分立樣本空間中事象機率之計算 (Probabilities of Events in Finite Sample Space)	41
2.4	條件機率 (Conditional Probability)	49
2.5	機率上的獨立性 (Stochastic Independence)	59
2.6	獨立的隨機實驗 (Independent Random Experiments)	64
	習題二 (Exercise II)	69

第三章 隨機變數及其分布

Chapter III. Random Variables and Their Distribution

3.1	隨機變數 (Random Variables)	77
3.2	分布函數 (Distribution Functions)	92
3.3	機率密度函數 (Probability Density Functions)	96
3.4	兩隨機變數之聯合分布 (Joint Distribution of Two Random Variables)	105
3.5	邊際分布 (Marginal Distributions)	117
3.6	條件分布 (Conditional Distributions)	122
3.7	多變數分布 (Multivariate Distributions)	129
3.8	隨機變數之獨立性 (Independence of Random Variables)	132
	習題三 (Exercise III)	143

第四章 隨機變數之動差累差及其母函數

Chapter IV. Moments, Cumulants and Their
Generating Functions

4.1	隨機變數之積分 (Integration of Random Variables)	153
4.2	隨機變數之動差 (Moments)	167
4.3	Chebyshev 不等式 (Chebyshev Inequality)	183
4.4	隨機向量之動差 (Moments of Random Vectors)	186
4.5	條件動差 (Conditional Moments)	203
4.6	動差母函數 (Moment Generating Functions)	211
4.7	階乘動差母函數 (Factorial Moment Generating Functions)	218
4.8	機率母函數 (Probability Generating Functions)	220

4.9 累差及累差母函數(Cumulants and Cumulant Generating Functions).....	223
4.10 隨機向量之動差母函數 (Moment Generating Functions of Random Vectors)	226
習題四 (Exercise IV).....	228

第五章 隨機變數的函數之分布

Chapter V. Distributions of Functions of Random Variables

5.1 隨機變數的函數之分布及其功用 (The Role of Distributions of Functions of Random Variables)	235
5.2 分立隨機變數的函數之分布 (Distributions of Functions of Discrete Random Variables)	239
5.3 分布函數法 (Cumulative-distribution-function Technique)	245
5.4 變數變換法 (Transformation Technique)	260
5.5 隨機向量之直線變換 (Linear Transformation of Random Vectors)	284
5.6 機率積分變換 (Probability Integral Transform).....	293
5.7 動差母函數法(Moment-generating-function Technique)...	297
習題五 (Exercise V)	302

第六章 分立的機率分布

Chapter VI. Discrete Probability Distributions

6.1 分立均等分布 (Discrete Uniform Distribution)	309
6.2 巴努利分布 (Bernoulli Distribution)	311

6.3	二項分布 (Binomial Distribution)	312
6.4	超幾何分布 (Hypergeometric Distribution)	320
6.5	波瓦松分布 (Poisson Distribution)	325
6.6	幾何分布 (Geometric Distribution)	335
6.7	負二項分布 (Negative Binomial Distribution)	338
6.8	多項分布 (Multinomial Distribution)	341
6.9	其他分立的機率分布 (Other Discrete Distributions)	344
	習題六 (Exercise VI)	347

第七章 連續的機率分布

Chapter VII. Continuous Probability Distributions

7.1	均等或矩形分布 (Uniform or Rectangular Distribution)	351
7.2	甘馬分布 (Gamma Distribution)	358
7.3	貝達分布 (Beta Distribution)	363
7.4	常態分布 (Normal Distribution)	365
7.5	F 分布 (F Distribution)	373
7.6	t 分布 (Student's t Distribution)	380
7.7	柯喜分布 (Cauchy Distribution)	385
7.8	指數分布及亞蘭分布 (Exponential and Erlang Distributions)	388
7.9	衛浦分布 (Weibull Distribution)	392
7.10	皮爾遜分布體系 (Pearsonian System of Distributions)	395
7.11	其他連續的機率分布 (Other Continuous Probability Distributions)	399
	習題七 (Exercise VII)	403

第八章 特 性 函 數

Chapter VIII. Characteristic Function

- 8.1 複數隨機變數 (Complex-valued Random Variables)409
- 8.2 特性函數之性質 (Properties of Characteristic Function) ...412
- 8.3 特性函數與動差之關係 (Characteristic Function and Moments)414
- 8.4 獨立隨機變數的直線型組合之特性函數 (The Characteristic Function of a Linear Combination of Independent Random Variables)424
- 8.5 由特性函數以決定機率分布之方法 (Determination of the Distribution Function by the Characteristic Function)427
- 8.6 兩個隨機變數之聯合特性函數 (The Joint Characteristic Function of Two Random Variables)441
- 8.7 各種特殊的機率分布之特性函數 (Characteristic Functions of Special Probability Distributions)447
- 習題八 (Exercise VIII)451

第九章 隨機變數序列之收斂與極限分布

Chapter IX. Convergence of a Sequence of Random Variables and Limit Distributions

- 9.1 導論 (Introduction)457
- 9.2 機率收斂 (Convergence in Probability)459
- 9.3 大數強法則 (Strong Law of Large Numbers)469
- 9.4 分布函數序列之收斂 (Convergence of a Sequence of

	Distribution Functions)	496
9.5	各種不同收斂間之關係 (Relationships Among the Various Modes of Convergence)	511
9.6	中心極限定理 (Central Limit Theorems)	517
9.7	隨機變數之函數序列的收斂 (Convergence of Sequences of Functions of Random Variables)	537
9.8	卡方分布之較正確的漸近常態分布 (Asymptotically Normal Distribution of Chi-square Variate)	545
	習題九 (Exercise IX)	548

第十章 多變值常態分布

Chapter X. Multivariate Normal Distribution

10.1	雙變值常態分布 (Bivariate Normal Distribution)	553
10.2	多變值常態分布之定義及其由來 (Definition and Derivation of the Multivariate Normal Distribution)	564
10.3	邊際分布及直線型組合之分布 (Marginal Distributions and the Distribution of Linear Combinations of Normally Distributed Variates)	567
10.4	條件分布與偏相關及偏迴歸 (Conditional Distribution, Partial Correlation and Partial Regression)	573
10.5	複相關係數 (Multiple Correlation Coefficient)	587
10.6	多變值常態分布之特性函數 (Characteristic Function of the Multivariate Normal Distribution)	593
10.7	二次式之分布 (Distribution of Quadratic Forms)	597
10.8	二次式之獨立性 (Independence of Quadratic Forms)	606
10.9	多變值分布之中心極限定理 (Central Limit Theorems	

of the Multivariate Distributions)	619
習題十 (Exercise X)	624

第十一章 順序統計式

Chapter XI. Order Statistics

11.1 順序特徵數 (Order Parameters)	629
11.2 順序統計式之定義及其分布 (Definition and Distributions of Order Statistics)	632
11.3 羣體等分位量之信賴區間 (Confidence Intervals for Population Quantiles)	652
11.4 羣體分布之容許區間 (Tolerance Intervals for Population Distributions)	658
11.5 樣本變距及學生化變距之分布 (Distributions of Sample Range and Studentized Range)	664
11.6 樣本分布函數 (Sample Distribution Function)	668
11.7 樣本等分位數之漸近分布 (Asymptotic Distributions of Sample Quantiles)	677
11.8 固定順位之順序統計式的漸近分布 (Asymptotic Distribution of an Order Statistic with Fixed Rank)	688
習題十一 (Exercise XI)	692

參考文獻 (References)	697
-------------------------	-----

附 表 (Tables)

附表 1. 累加二項分布 (Cumulative Binomial Distribution)	701
--	-----

附表 2. 累加波瓦松分布 (Cumulative Poisson Distribution)	720
附表 3. 常態機率密度函數值 (Ordinates of the Normal Density Function)	726
附表 4. 累加常態分布 (Cumulative Normal Distribution)...	727
附表 5. 累加卡方分布 (Cumulative Chi-square Distribution)	728
附表 6. 累加 t 分布 (Cumulative Student's t Distribution)...	729
附表 7. 累加 F 分布 (Cumulative F Distribution)	730
索 引 (Index)	735

第一章 集合論之基本概念

1.1 各種集合之定義及其運算

集合論不但在現代數學中佔有極重要地位而且在應用科學之研究中有其獨特之用途。吾人在研究機率論及數理統計學之前，對於集合論必須有充分之瞭解始可。

【定義1.1】 集合 (Set): 一群具有某一特定性質的元素 (Elements) 或點 (Points) 之聚集體稱為集合。

設集合 A 係由半徑為 r 及原點為圓心之圓內的所有點所組成，則以下列符號表示之：

$$A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

若某一元素或點 ω 係屬於集合 A 之元素或點，則以 $\omega \in A$ 表示之；若其不屬於集合 A ，則以 $\omega \notin A$ 表示之。

【定義1.2】 空間 (Space): 在研究範圍內之所有元素或點組成的集合稱為空間，以 Ω 表示之。

【定義1.3】 部份集合 (Subset): 若集合 A 之每一元素或點都屬於集合 B ，則稱集合 A 為集合 B 之部份集合，以 $A \subset B$ 表示之。

顯然可見，對於每一集合 A ，其所含之每一元素或點都屬於集合 A 本身，故 $A \subset A$ 。