沈阳机电学院1980年
科学报告会论文

编号 80.5.18

关于$\alpha=-\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}$的高斯型求积公式

沈阳机电学院 曾祥林

沈阳机电学院科技情报研究室

1980.11

关于$\alpha=-\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}$的高斯型求积公式

一、关于$\alpha=-\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}$的雅可比多项式

在雅可比多项式中，我们现在来研究它的一个特例，即多项式$V_n(x)$，它们在〔-1，1〕上构成关于权函数

$$P(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

的正交系

1、导出多项式$V_n(x)$的显式

设对于低于n次的任一多项式$R(x)$，都有：

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}R(x)V_n(x)dx=0 \qquad (1)$$

作变换，设$X=\cos\theta$，$dx=-\sin\theta d\theta$

当$X=-1$时，有$\theta=\pi$

当$X=1$时，有$\theta=0$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

将以上结果代入（1）式中，便有

$$\int_0^{\pi}R(\cos\theta)(1+\cos\theta)V_n(\cos\theta)d\theta=0 \qquad (2)$$

因为$V_n(\cos\theta)$是n次的三角多项式，所以$(1+\cos\theta)V_n(\cos\theta)$便是$(n+1)$次的三角多项式，因此我们设

$$(1+\cos\theta)V_n(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{n+1}A_k\cos k\theta \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式中便有：

$$\sum_{k=0}^{n+1}A_k\int_0^{\pi}R(\cos\theta)\cos k\theta d\theta=0 \qquad (4)$$

设多项式$R(x)$的次数为m，当$m<n$时，我们取函数$\cos m\theta$来代替$R(\cos\theta)$，于是（4）式变成：

$$\sum_{k=0}^{n+1}A_k\int_0^{\pi}\cos m\theta\cos k\theta d\theta=0 \qquad (5)$$

已知积分

$$\int_0^{\pi}\cos m\theta\cos k\theta\,d\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & 当m=k\\ 0, & 当m\neq k\end{cases} \tag{6}$$

将（6）式代入（5）式中，便有：

$$\frac{\pi}{2}Am=0,\quad (m\leqslant n-1),$$

即有

$$A_0=0,\ A_1=0,\cdots,\ A_{n-1}=0 \tag{7}$$

将（7）式代入（3）式中，便有

$$(1+\cos\theta)V_n(\cos\theta)=A_n\cos n\theta+A_{n+1}\cos(n+1)\theta \tag{8}$$

将 $\theta=\pi$ 代入（8）式中，便有

$$(1+\cos\pi)V_n(\cos\pi)=A_n\cos n\pi+A_{n+1}\cos(n+1)\pi,$$

即
$$(-1)^nA_n+(-1)^{n+1}A_{n+1}=0,$$

$$A_n=A_{n+1} \tag{9}$$

将（9）式代入（8）式中，便有：

$$(1+\cos\theta)V_n(\cos\theta)=A_n(\cos n\theta+\cos(n+1)\theta),$$

即
$$V_n(\cos\theta)=A_n\frac{\cos n\theta+\cos(n+1)\theta}{1+\cos\theta},$$

$$=A_n\frac{2\cos\frac{2n+1}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=A_n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}. \tag{10}$$

这样我们便得到了多项式V_n（x）的显式：

$$V_n(x)=A_n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}},\quad \theta=\arccos x \tag{11}$$

其中An是待定常数

2、证明

$$V_n(x)=A_n[2T_n(x)-2T_{n-1}(x)+\cdots+(-1)^n], \tag{12}$$

事实上，依据三角公式利用数学归纳法证明如下：

$$\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\cos\frac{3\theta}{2}=(-1+2\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\cos\frac{5\theta}{2} = (+1 - 2\cos\theta + 2\cos 2\theta)\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= -\cos\frac{3\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\cos 2\theta,$$

$$\cos\frac{7\theta}{2} = (-1 + 2\cos\theta - 2\cos 2\theta + 2\cos 3\theta)\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= -\cos\frac{5}{2}\theta + 2\cos\frac{\theta}{2}\cos 3\theta,$$

一般地，有

$$\cos\frac{2(n+1)+1}{2}\theta = -\cos\frac{2n+1}{2}\theta + 2\cos\frac{\theta}{2}\cos(n+1)\theta \quad (13)$$

等式（13）显然是成立的，这样我们就导出下面关系式

$$\cos\frac{2n+1}{2}\theta = [2\cos n\theta - 2\cos(n-1)\theta + \cdots + (-1)^n]\cos\frac{\theta}{2},$$

即有

$$\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = 2\cos n\theta - 2\cos(n-1)\theta + \cdots + (-1)^n,$$

即有

$$V_n(\cos\theta) = A_n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= A_n[2\cos n\theta - 2\cos(n-1)\theta + \cdots + (-1)^n]$$

于是我们便得到用切比雪夫多项式$T_n(x)$所表达的$V_n(x)$

$$V_n(x) = A_n[2T_n(x) - 2T_{n-1}(x) + \cdots + (-1)^n] \quad (12)$$

3、其他

①因为第一类切比雪夫多项式$T_n(x)$的系数为2^{n-1}，所以在（12）式中，若不计A_n在内的话，则$V_n(x)$的最高次项x^n的系数便为2^n因此我们设

$$\tilde{V}_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}, \quad \theta = \arccos x \quad (14)$$

②为了求得标准化的多项式$\overline{V}_n(x)$，我们计算积分

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}V_n^2(x)dx=\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2A_n^2\frac{\cos^2\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=2A_n^2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{2n+1}{2}\theta d\theta=A_n^2\pi$$

于是我们就规定

$$\widehat{V}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}},\quad \theta=\arccos x \tag{15}$$

③$V_n(x)$ 在〔-1，1〕中有n个不同的实根

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{16}$$

证明　令$V_n(\cos\theta)=A_n\dfrac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}=0$，

即有　$\cos\dfrac{2n+1}{2}\theta=0$，有$\dfrac{2n+1}{2}\theta=\dfrac{2k-1}{2}\pi$，

故

$$\theta_k=\frac{2k-1}{2n+1}\pi,$$

$$x_k=\cos\theta_k=\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi,\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

④多项式$V_n(x)$的递推公式

$$\begin{cases}\widehat{V}_{n+1}(x)=2x\widehat{V}_n(x)-\widehat{V}_{n-1}(x), n=1,2,\cdots,\\ \widehat{V}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad \widehat{V}_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-1)\end{cases} \tag{17}$$

证明　依三角等式

$$\cos\frac{2n+3}{2}\theta+\cos\frac{2n-1}{2}\theta$$

$$=2\,\mathrm{cns}\frac{\frac{2n+3}{2}+\frac{2n-1}{2}}{2}\theta\cos\frac{\frac{2n+3}{2}-\frac{2n-1}{2}}{2}\theta$$

即

$$\cos\frac{2(n+1)+1}{2}\theta+\cos\frac{2(n-1)+1}{2}\theta=2\cos\frac{2n+1}{2}\theta\cos\theta \quad (18)$$

在此等式两边同时除以$\sqrt{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$，$\theta\in(0,\pi)$，并引用记号$\widehat{V}_n(x)$，于是我们便有：

$$\widehat{V}_{n+1}(x),+\widehat{V}_{n-1}(x)=2x\widehat{V}_n(x).$$

二、关于$\alpha=-\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}$的高斯型求积公式

设权函数$P(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$，$a=-1$，$b=1$以正交多项式$\widetilde{V}_n(x)$的根为高斯型节点的高斯求积公式为：

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}f(x)\,dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k) \quad (19)$$

其中

节点X_1，X_2，…，X_n是正交多项式

$$\widetilde{V}_n(x)=\frac{1}{2^n}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\quad \theta=\arccos x \quad (20)$$

的根：

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi,(k=1,2,\cdots,n) \quad (21)$$

系数

$$A_k=\frac{4\pi}{2n+1}\cos^2\frac{2k-1}{4n+2}\pi \quad (22)$$

余项

$$R_n[f]=\frac{\pi}{(2n)!2^{2n}}f^{(2n)}(\xi),(-1\leqslant\xi\leqslant1) \quad (23)$$

此处我们设出数f(x)在〔-1、1〕上有2n阶连续导数。

证明　依高斯型求积公式的系数公式，我们有：

$$A_k=\int_{-1}^{1}P(x)\frac{\widetilde{V}_n(x)}{(x-x_k)\widetilde{V}_n^{\prime}(x_k)}dx,$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2^n}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\widetilde{V}'(x_k)(\cos\theta-\cos\theta_k)}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta,$$

$$=\frac{\frac{1}{2^n}}{\widetilde{V}_n'(x_k)}\int_0^{\pi}\frac{2\cos\frac{2n+1}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\theta-\cos\theta_k}d\theta$$

$$=\frac{\frac{1}{2^n}}{\widetilde{V}_n'(x_k)}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta+\cos(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\theta_k}d\theta \qquad (24)$$

求$\widetilde{V}'(x)$的表达式

已知$\widetilde{V}_n(x)=\frac{1}{2^n}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$, $\theta=\arccos x$

求$\widetilde{V}(x)$的导数，便有

$$\widetilde{V}_n'(x)=\frac{1}{2^n}\left(\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)_\theta'(\arccos x)_x',$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{(2n+1)\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta_k\cos\frac{\theta}{2}}\widetilde{V}_n(\theta)$$

于是

$$\widetilde{V}_n'(x_k)=\frac{1}{2^n}\frac{(2n+1)\sin\frac{2n+1}{2}\theta_k}{2\sin\theta_k\cos\frac{\theta_k}{2}}$$

$$-\frac{\sin\frac{\theta_k}{2}}{2\sin\theta_k\cos\frac{\theta_k}{2}}\widetilde{V}_n(\theta_k),$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{(2n+1)\sin\frac{2n+1}{2}\theta_k}{2\sin\theta_k\cos\frac{\theta_k}{2}} \qquad (25)$$

可以证明关系式

$$\cos(n+1)\theta_k+\cos n\theta_k=0 \tag{26}$$

是成立的

将（26）式代入（24）式中，便有

$$A_k=\frac{\frac{1}{2^n}}{\widetilde{V}_n'(x_k)}\int_0^{\pi}\left[\frac{\cos n\theta-\cos n\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}+\frac{\cos(n+1)\theta-\cos(n+1)\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}\right]d\theta \tag{27}$$

计算积分$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta-\cos n\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}d\theta$的值

事实上，因为切比雪夫多项式$T_n(x)-T_n(x_k)$可以为$x-x_k$所整除，所以

$$\frac{\cos n\theta-\cos n\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}$$

便是（$n-1$）阶的三角多项式

$$\frac{\cos n\theta-\cos n\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}=B_0+B_1\cos\theta+B_2\cos 2\theta+\cdots+B^{n-1}\cos(n-1)\theta \tag{28}$$

将（28）式两端由O到π对θ积分之，便有

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta-\cos n\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}d\theta=B_0\pi \tag{29}$$

为了求B_0的值，我们将（28）式两端依次地取θ为下列一组值：

$$\theta=\theta_k,\quad \theta=\theta_k+\frac{2\pi}{n},\quad \theta=\theta_k+2\frac{2\pi}{n},\quad \cdots,$$

$$\theta=\theta_k+(n-1)\frac{2\pi}{n} \tag{30}$$

因为$\left.\frac{\cos n\theta-\cos n\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}\right|_{\theta=\theta_k}=\lim\limits_{\theta\to\theta_k}\frac{\cos n\theta-\cos n\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}$

$$=\lim_{\theta\to\theta_k}\frac{-n\sin n\theta}{-\sin\theta}=\frac{n\sin n\theta_k}{\sin\theta_k} \tag{31}$$

可以证明等式

$$\frac{\cos n\left(\theta_k+m\frac{2\pi}{n}\right)-\cos n\theta_k}{\cos\left(\theta_k+m\frac{2\pi}{n}\right)-\cos\theta_k}=0 \tag{32}$$

$$(m=1,2,\cdots,n-1)$$

是成立的

现在我们将（28）式的两端依次地代入（30）式中的值并利用（31）两式的结论，于是便有：

$$B_0+B_1\cos\theta_k+B_2\cos 2\theta_k+\cdots+B_{n-1}\cos(n-1)\theta_k=\frac{n\sin n\theta_k}{\sin\theta_k}$$

$$B_0+B_1\cos\left(\theta_k+\frac{2\pi}{n}\right)+B_2\cos 2\left(\theta_k+\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$+\cdots+B_{n-1}\cos(n-1)\left(\theta_k+\frac{2\pi}{n}\right)=0,$$

$$B_0+B_1\cos\left(\theta_k+2\frac{2\pi}{n}\right)+B_2\cos 2\left(\theta_k+2\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+B_{n-1}\cos(n-1)$$

$$\left(\theta_k+2\frac{2\pi}{n}\right)=0,$$

$$B_0+B_1\cos\left(\theta_k+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)+B_2\cos 2\left(\theta_k+(n+1\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$+B_{n-1}\cos(n-1)\left(\theta_k+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)=0,$$

将这些等式相加，并利用关系式

$$\sum_{\gamma=0}^{n-1}\cos m\left(\theta_k+\gamma\frac{2\pi}{n}\right)=0$$

$$(m=1,2,\cdots,n-1)$$

我们便得到

$$B_0=\frac{\sin n\theta_k}{\sin\theta_k} \tag{33}$$

将（33）式中的B_0的值代入（29）式中、便有：

$$\int_0^\pi\frac{\cos n\theta-\cos n\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}d\theta=\frac{\pi\sin n\theta_k}{\sin\theta_k} \tag{34}$$

再将（34）式中的n换成（n+1）便有：

$$\int_0^\pi\frac{\cos(n+1)\theta-\cos(n+1)\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}d\theta=\frac{\pi\sin(n+1)\theta_k}{\sin\theta_k} \tag{35}$$

最后我们将（25），（34）和（35）式代入（27）式中，便有

$$A_k=\frac{\frac{1}{2^n}}{\widetilde{V}_n'(x_k)}\left[\frac{\pi\sin n\theta_k}{\sin\theta_k}+\frac{\pi\sin(n+1)\theta_k}{\sin\theta_k}\right]$$

$$=\frac{4\pi}{2n+1}\cos^2\frac{\theta_k}{2}=\frac{4\pi}{2n+1}\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}$$

这样一来，我们便得到了高斯型求积公式为：

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,f(x)\,dx\approx\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos^{2}\frac{2k-1}{4n+2}\pi\, f\left(\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi\right) \tag{36}$$

依高斯型求积公式的余项公式，我们有：

$$R_n[f]=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}P(x)\widetilde{V}_n^{2}(x)\,dx$$

$$=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{2^{n}\cos\frac{\theta}{2}}\right)^{2}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\,\frac{1}{2^{2n}}\int_{0}^{\pi}\left[1+\cos(2n+1)\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{\pi}{(2n)!\,2^{2n}}f^{(2n)}(\xi)。$$

参考文献

1、И.П、纳唐松著，函数构造论。

2、胡祖炽编，计算方法。

3、李岳生、黄友谦编，数值逼近。