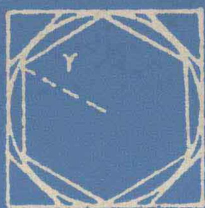
中学数学学习丛书之三

数列的极限

四川师范学院数学系
中学数学教研组 主编

程汉晋 编写



$\text{Lim}\,a_n = \text{Lim}\,b_n$

1979年11月

本 书 简 介

本书是将中学数学里的数列极限部分，略为扩大、加深和提高而编写，解决一些中学数学里未解决的问题。内容分为三个部分：（一）数列及其极限；（二）数列极限的存在；（三）数列极限在中学数学中的应用。可作为中学生的课外读物，中学教师的教学参考，以及师范院校数学系中学数学专题讲座的教材，并可作为学习高等数学的桥梁。

书中配有适当的例题与习题，在书末附有习题解答，便于自学之用。

说　　明

我们伟大的祖国已经进入社会主义革命和社会主义建设新的发展时期。为了在实现新时期的总任务、“提高整个中华民族的科学文化水平”、跟随华主席进行新长征的伟大斗争中贡献我们的一点力量，我们以现行《中学数学教学大纲》中的传统内容为基础，并以适当的加宽、加深和提高，采用统一规划、分人负责、集体讨论的方法，编写了这套《中学数学学习丛书》，供中学数学教师和中学数学爱好者参考。

这套丛书共分十二册计有：如何证明几何题；轨迹、变换与作图；数、数量与矢量；代数式的恒等变形；初等函数及其恒等变形；平面与空间图形的计算；方程；不等式；二次曲线与极坐标和参数方程；排列、组合与级数；数列的极限；中学数学与唯物辩证法。分册编写，陆续出版。

考虑到这套丛书是中学数学的参考资料，在编写时，我们力求做到：既不脱离中学数学的传统内容，又必须在此基础上加宽、加深和提高，以培养读者深入钻研的精神；要适当介绍一些高等数学的基础知识和方法，但又不完全脱离中学数学的基础，或把高等数学的一些内容简单的搬过来。

在编印过程中，我们得到了不少兄弟院校和有关单位的支持和帮助，学习了他们的有关资料，雅安地区教育局和印

刷厂热情地承担了印刷任务，给我们以有力的支持。在此，特向他们一并表示深切的感谢。

由于我们水平有限，经验不足，加以时间仓卒，这套丛书的缺点和错误在所难免，殷切希望同志们批评指正。

川 师 数 学 系
中学数学教研组
一九七八年十二月

目　　次

数 列 的 极 限

一、数列及其极限

极限是数学中的基本概念，而数列极限又是极限中最基础的，如将数列极限推广为整序变量的极限，可以把各种不同类型的极限用统一的观点来解决。在现行中学数学教材有数列极限这一内容，并作为学习新增加微积分部分的基础。不过中学数学教材里讲述极限，都是只从感性上来认识，没有理论的推导。现在我们把这部分的内容略为扩大加深和提高，从理性上来研究它，使其不但知其然而知其所以然，可以作为中学同学的课外读物和中学教师的教学参考。

1.1 数列与数列极限的概念

1．数列的概念

在研究函数相依关系时，往往要研究一种自变数取自然数 1， 2， 3，……的函数。

例如，有一盛气器的容积为 1000cc，其上装有抽气机，抽气机的活塞在顶上时抽气筒的容积为 100 cc。今若盛气器内气体的密度为 ρ_0。问抽气机抽n次后，器中气体的密度如何？

设抽第 1 次后器中气体的密度为 ρ_1，则有

$$\rho_1(1000+100)=\rho_0(1000),$$

故 $$\rho_1=\frac{10}{11}\rho_0;$$

设抽第 2 次后器中的气体密度为 ρ_2，则有

$$\rho_2(1000+100)=\rho_1(1000)$$

故 $$\rho_2=\frac{10}{11}\rho_1=(\frac{10}{11})^2\rho_0;$$

如是类推，抽第n次后器中气体的密度：

$$\rho_n=(\frac{10}{11})^n\rho_0。$$

这种函数相依关系，就是自变数 n 取自然数 1，2，3，……的函数。

定义1.1　定义域为自然数数集 $\{n\}$ 的函数 $x_n=f(n)$ 取 $n=1，2，3，……，n，……$将函数的值按次序排列起来：

$$x_1，x_2，x_3，……，x_n，……，$$

叫做数列，简记为 $\langle x_n\rangle$，$x_n=f(n)$ 叫做数列的通项。

如上面的例子中，抽第 1，2，3……，n，……次后，器中气体的密度为：

$$\frac{10}{11}\rho_0，(\frac{10}{11})^2\rho_0，(\frac{10}{11})^3\rho_0，……，(\frac{10}{11})^n\rho_0，……$$

就是一个数列，通项 $\rho_n=(\frac{10}{11})^n\rho_0$。

因为用抽气机抽气的目的，是要求器中达到任何近似程度的真空，即是要研究这一个数列的变化趋于真空的问题，也就是要研究下面讲的数列极限问题。

2.数列极限的概念

在前面抽气问题中，抽第n次后器中气体的密度：

$$\rho_n=(\frac{10}{11})^n\rho_0。$$

要求器中达到任何近似程度的真空的意义，应当怎样去理解呢？因为当器内是真空时其中气体的密度 $\rho=0$，所以，要求器中达到任何近似程度的真空，即是说抽足够多的次数后，，器中气体的密度 ρ_n 与真空时的密度 $\rho(=0)$ 之差 $\rho_n-\rho$ 可以达到任意地小。例如要达到小于原来密度 ρ_0 的 $\frac{1}{100}$，则由：

$$\left(\frac{10}{11}\right)^n\rho_0-0<\frac{1}{100}\rho_0,$$

得
$$\left(\frac{10}{11}\right)^n<\frac{1}{100},$$

取对数
$$n\lg\frac{10}{11}<\lg\frac{1}{100},$$

$$n(\lg10-\lg11)<-2,$$

即
$$(\lg11-1)n>2,$$

$$\therefore \quad n>\frac{2}{\lg11-1}=\frac{2}{0.0414}=48\frac{64}{207}。$$

即知抽49次后，器中气体的密度与真空时的密度之差，可以达到小于原来密度 ρ_0 的 $\frac{1}{100}$。

如象上面一个数列在某项以后与一个常数之差，可以达到任意地小的情形，给以下面的定义。

定义 1.2　设有数列：

$$x_n=f(n),$$

给定任意小的 $\varepsilon>0$，若存在自然数 N，当 $n>N$ 时 x_n 与一个常数 a 之差的绝对值：

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则常数 a 叫这数列 x_n 在 n 无限增大的极限。记为：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

或简记为 $\lim x_n=a$。

对于数列的极限，可作下面的几何解释。

（几何解释）因由：

$$n>N\text{ 时 }\Longrightarrow|x_n-a|<\varepsilon\Longleftrightarrow-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon\Longleftrightarrow x_n\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon),$$

即是说数列 x_n 由 N+1 项起，全部落在开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 中，而这开区间外面的只是有限项如图 1.1 所示。这个开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 叫做点 a 的 ε—邻域。

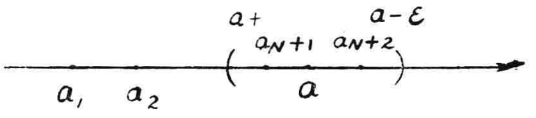


图 1.1

例 1. 研究数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

的极限。

（解） 这个数列由直观可以看到它的变化是趋于数 0，下面来证明这个数列的极限是 0。因为：

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n},$$

对于任给定的 $\varepsilon>0$,只须$\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,不等式$|x_n-0|<\varepsilon$ 便成立。

故取 $\gamma=[\frac{1}{\varepsilon}]$*，则当 $n>N$ 时，有：

$$|x_n-0|<\varepsilon,$$

由定义 $\lim x_n=0$。

例 2. 研究数列：

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots\cdots$$

的极限。

（解） 这个数列由直观可以看到它的变化是趋于数 1，下面来证明这个数列的极限是 1。因为：

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n},$$

对于任给定的 $\varepsilon>0$,只须$\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,不等式$|x_n-1|<\varepsilon$ 便成立。故取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时，有：

$$|x_n-1|<\varepsilon,$$

由定义 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$。

（注意）研究一个变量的极限问题，虽然直观可以帮助我们思考，若只凭直观而不加论证，是容易得出错误的结论。

---

* 符号$[\frac{1}{\varepsilon}]$表示不超过$\frac{1}{\varepsilon}$的最大整数，例如$[2.3]=2$，$[-2.3]=-3$。

例如，有一个正$\triangle ABC$每边的长为a，将底边BC分成n等分，在每一等分上又作正三角形，如图1.2得到一条折线BDEF……C，命它的长为l_n。

今若等分数n无限地增大，只凭直观去看折线长l_n的变化（如图1.2），就会错误地断言l_n的极限是BC的长a。事实上，如图1.3由平行四边形对边相等的道理知道：

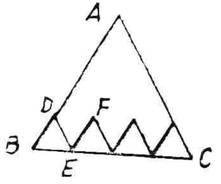


图1.2

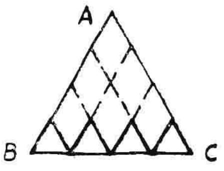


图1.3

$$l_n = AB + AC = 2a,$$

是不随等分数n的变大而变化，为一个定长2a。

从这个例子说明了研究极限问题，必须要有严密的论证，不能只凭直观去臆断。

例3. 证明数列：

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

的极限为0，并作几何解释。

（证） 因 $|x_n - 0| = \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$,

对于任给$\varepsilon>0$，与例1相同得出取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时有：

$$|x_n - 0| < \varepsilon,$$

由定义 $\lim x_n = \text{lin}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 0$。

（几何解释）当 $n>N$时有$|x_n-0|<0$的几何意义是：数列从$N+1$项起x_{N+1}，x_{N+2}，x_{N+3}，……全部落在开区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$内。例如任给$\varepsilon=\frac{1}{100}>0$，则$N=[\frac{1}{\varepsilon}]=[100]=100$，故数列从101项起$x_{101}$，$x_{102}$，$x_{103}$……，即是$\frac{1}{101}$，$-\frac{1}{102}$，$\frac{1}{103}$，……全部落在开区间（$-\frac{1}{100}$，$\frac{1}{100}$）内。

例4．证明各项都是常数a的数列（叫常驻数列）：

$$a,\ a,\ a,\ \cdots\cdots,\ a,\ \cdots\cdots$$

的极限仍为常数a。

（证） 因 $x_n=a(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$，则：

$$|x_n-a|=|a-a|=0,$$

对于任给$\varepsilon>0$，当$n\geqq1$都有$|x_n-a|<\varepsilon$。

由定义 $\lim x_n=\lim a=a$。

例5．设数列$x_n=\frac{2n^2+3}{n^2+1}$，求证$\lim x_n=2$。

（证） 因 $|x_n-2|=|\frac{2n^2+3}{n^2+1}-2|=|\frac{1}{n^2+1}|$

$$=\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}。$$

对于任给$\varepsilon>0$，若要$|x_n-2|<\varepsilon$，只须$\frac{1}{n^2}<\varepsilon$，即$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$。故取$N=[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$时，当$n>N$时，则有：

$$|x_n-2|<\varepsilon,$$

由定义　　　　$\lim x_n=2$。

例6．设数列 $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，求证 $\lim x_n=0$。

（证）　因　$|x_n-0|=\left|\frac{1}{2^{n-1}}-0\right|=\frac{1}{2^{n-1}}$。

对于任给 $\varepsilon>0$，若要 $|x_n-0|<\varepsilon$，即要 $\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$，即是：

$$2^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon},$$

两边取对数　　　　$(n-1)\lg 2>\lg\frac{1}{\varepsilon}$，

$$\therefore\qquad n>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}+1。$$

今取 $N=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}+1\right]$ 时，当 $n>N$，则有：

$$|x_n-0|<\varepsilon,$$

由定义　　　　$\lim x_n=0$。

1.2 数列极限的性质

1.唯一性

定理1.1　若 $\lim x_n=a$，$\lim x_n=b$，则 $a=b$。

（证）　假若定理不成立，即是 $a\neq b$，令：

$$|a-b|=c>0。\qquad (1)$$

今给 ε 使 $0<\varepsilon<c$，由极限定义存在=自然数 N_1 与 N_2 能使：

$$n>N_1\Longrightarrow|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$n>N_2 \Longrightarrow |x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

命 $N=\max\{N_1, N_2\}$ * 则当 $n>N$ 时有：

$$|a-b|=|(a-x_n)+(x_n-b)|\leqq|x_n-a|+|x_n-b|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon<c, \qquad (2)$$

但（1）与（2）是矛盾的，所以证得 $a=b$。

这个定理说明了，一个数列 $\langle x_n\rangle$ 若有极限，它的极限是唯一的。

2．有界性

定理 1.2 若 $\lim x_n=a$，则存在一个正常数 G，使对于一切的 n 都有 $|x_n|<G$。

（证） 因 $\lim x_n=a$，今取 $\varepsilon=1$，则存在自然数 N 使：

$$n>N \Longrightarrow |x_n-a|<1$$

$$\Longrightarrow |x_n|-|a|<1$$

$$\Longrightarrow |x_n|<|a|+1,$$

命 $A=\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots\cdots, |x_n|, |a|+1\}$，取 $G=A+1$。

则对于一切的 n 都有：

$$|x_n|<G。$$

定义1.3 若一个数列 $\langle x_n\rangle$，存在一个正常数G，使对于一切的 n 都有 $|x_n|<G$，则这个数列 $\langle x_n\rangle$ 叫做有界数列。

我们应当注意，一个极限的数列一定是有界数列，但是一个有界数列不一定有极限。

---

* 符号 $\max\{N_1, N_2\}$ 表示取 N_1 与 N_2 中较大的一个，如 $\max\{5,10\}=10$，$\max\{-5,\frac{1}{3}\}=\frac{1}{3}$。

例如，数列：

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots。$$

对于任何 n 有 $|x_n|<3$ 是有界数列，但它不趋 于任何常数，故没有极限。

3． 大小性

定理1.4　若 $\lim x_n=a, \lim y_n=b$，且当 $n>k$ 时 $x_n\leqq y_n$，则 $a\leqq b$。

（证）　假若定理不成立，即是 $a>b$，令 $a-b=\varepsilon_0>0$。

由于　　$\lim x_n=a,\ \lim y_n=b$，

则对于 $\frac{\varepsilon_0}{2}>0$，存在自然数 N_1 与 N_2，能使：

$$n>N_1 \Longrightarrow |x_n-a|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

$$n>N_2 \Longrightarrow |y_n-b|<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

今取 $N=\max\{k,\ N_1,\ N_2\}$，则当 $n>N$ 时有：

$$\begin{aligned} x_n-y_n &= a-(a-x_n)-(y_n-b)-b \\ &= a-b-[(a-x_n)+(y_n-b)] \\ &= \varepsilon_0-[\,|a-x_n|+|y_n-b|\,] \\ &> \varepsilon_0-[\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}]=0, \end{aligned}$$

即是当　　$n>N\geqq k \Longrightarrow x_n>y_n$ 。

这与题设 $n>k$ 时 $x_n\leqq y_n$ 是矛盾的，所以证得 $a\leqq b$。

定理1.5　若 $\lim x_n=a$，且 $x_n\leqq c$（常数），则 $a\leqq c$

（证）　$\because$　$\lim c=c$，故由定理 1.4 有 $a\leqq c$。

（推论）若 $\lim x_n=a$，且 $x_n\geqq c$（常数），则 $a\geqq c$。

（注意）在定理1.4中不是由 $x_n<y_n$ 只能推出 $a<b$，也

可能推出 $a=b$ 的情形，所以写为 $a\leqslant b$，它的意义是$a<b$或 $a=b$ 二者必居其一。

例如，$\langle x_n\rangle=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots\cdots,$

$\langle y_n\rangle=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\cdots,$

当 $n>2$时 $x_n<y_n$。

但由1.1节例 6 与例 1 知 $\lim x_n=0$，$\lim y_n=0$，即是$a=b(=0)$的情形。

定理1.6（中间极限） 设有三数列当$n>k$时 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，且 $\lim x_n=a$，$\lim y_n=a$，则 $\lim z_n$存在，且 $\lim z_n=a$。

（证）因 $\lim x_n=a$，$\lim y_n=a$，则对于任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 N_1，N_2使：

$$n>N_1\Longrightarrow|x_n-a|<\varepsilon\Longrightarrow-\varepsilon<x_n-a, \qquad (1)$$

$$n>N_2\Longrightarrow|y_n-a|<\varepsilon\Longrightarrow y_n-a<\varepsilon, \qquad (2)$$

但题设 $n>k\Longrightarrow x_n\leqslant z_n\leqslant y_n\Longrightarrow x_n-a\leqslant$

$$z_n-a\leqslant y_n-a。 \qquad (3)$$

今取 $N=\max\{N_1,N_2,k\}$，则 $n>N$ 时（1）、（2）、（3）同时成立，即得：

$$n>N\Longrightarrow-\varepsilon<z_n-a<\varepsilon\Longrightarrow|z_n-a|<\varepsilon,$$

由定义 $\lim z_n=a$。

例1. 求证 $\lim\frac{1}{n^2}=0$。

（证） 因 $0<\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}$,

但 $\lim 0=0$，$\lim\frac{1}{n}=0$，（1.1节例 4，例 1）