北京电視大学数学系（甲）

# 高等代数讲义

（第 一 章）

北京大学数学系编

1962. 2.

# 高等代数

## 第一章 消元法与行列式

### §1. 线性方程组

解方程是代数中一个基本的问题，特别是在中学代数中，解方程占了重要的地位。因为这个问题是同学熟悉的，譬如说如果我们知道了一段导线的电阻 $r$，它两端的电位差 $v$，那么通过这段导线的电流强度 $i$ 就可以由关系式

$$ir = v \qquad (1)$$

求出来，这就是通常所谓解一元一次方程的问题。在中学代数中我们解过一元、二元、三元、甚至于四元一次方程，第一和第二两章主要地就是讨论一般的多元一次方程组，或称线性方程组的问题。

线性方程组的理论在数学中具有基本的重要性。我们知道，方程是反映了一些数量之间一定的依赖关系，而线性方程就反映了数量之间的按比例变化的关系。例如，关系式(1)就表示了，在电阻 $r$ 固定的情况下，电流强度 $i$ 与电位差 $v$ 是按比例变化的。数量之间按比例变化的关系在自然现象和社会现象中是大量存在的（精确地说，它们是近似地按比例变化）。再举个例子，对一个工厂来说，产品的数量与所需要的原料、资金、劳动力和设备等的数量在一定的范围内是成正比关系的。譬如说，某工厂用两种原料 $A_1$，$A_2$，来生产三种产品 $B_1$，$B_2$，$B_3$，而生产每一单位的产品 $B_1$，$B_2$，$B_3$ 分别地需要原料 $A_1$，$a_{11}$，$a_{12}$，$a_{13}$ 个单位，需要原料 $A_2$，$a_{21}$，$a_{22}$，$a_{23}$ 个单位，设 $x_1$，$x_2$，$x_3$ [redacted]的 $B_1$，$B_2$，$B_3$ 的产量，于是有方程

数

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \end{cases} \qquad (2)$$

其中$y_1$、$y_2$分别是$A_1$和$A_2$的需求量，这两个方程都是线性的，正是反映了几种资产的数量之间的按比例变化的关系。这是问题的一个方面，另一方面，虽然有些变量之间的关系不是线性的，但是在变量足够小的变化范围内，它们的变化关系可以近似地看作是线性的，这一点在数学分析中有详细的讨论，简单地说，对于函数

$$y = f(x)$$

在$x = x_0$的附近，$y$的改变量$\Delta y$差不多等于$f'(x_0)\Delta x$，这里$\Delta x$表示$x$的改变量，这就是说$\Delta y$近似地与$\Delta x$成正比关系，对于多元函数也有类似的结果，这两方面说明，线性关系在数量关系中是常见的，基本的，因而线性方程组具有基本的重要性。

对于线性方程组，我们不但要给出具体求解的方法，同时还要研究线性方程组的解与系数的依赖关系，要给出线性方程组有解的判别条件等。

最后我们指出，在三元的情况下，一个线性方程的几何图象是一个平面，解线性方程组的问题就相当于求一些平面的交点或交线的问题，因之，有关线性方程组的结论以及讨论问题的方法常常有着直接的几何意义，这对于我们了解和掌握线性方程组的理论是大有帮助的。由于一般线性方程组的讨论与三元的情形的讨论有很多共同之处，所以充分利用几何直观是有好处的。

§2 消元法

用消元法解线性方程组是大家熟悉的，在中学代数中我们解的方程组只是二、三元的，并且一般限于方程的个数和未知量的个数相等的情形，但是不难看出，消元法是具有一般性的，用消元法来解一般的线性方程组是这一节要讨论的问题。

首先我们引入必要的记号和名词。

所谓一般的线性方程组就是指形式为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad - \; - \; - \; - \; - \; - \\
a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s
\end{cases}
\qquad (1)
$$

的方程组，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 $n$ 个未知量，$s$ 是方程的个数，$a_{ij}$，$i = 1, 2, \cdots, s$，$j = 1, 2, \cdots, n$ 称为方程组(1)的系数，$b_j$，$j = 1, 2, \cdots, s$ 称为常数项。方程组中未知量的个数 $n$ 与方程的个数 $s$ 不一定相等，我们用带两个脚标的符号 $a_{ij}$ 来表示方程组的系数，第一个脚标 $i$ 表示它在第 $i$ 个方程，第二个脚标 $j$ 表示它是 $x_j$ 的系数。

所谓方程组(1)的一个解就是指由 $n$ 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 组成的有序数组 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$，在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别地用 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 代入之后，(1)中每个等式都变成恒等

式．方程组(1)的解的全体称为它的解集合，解方程组实际上就是求出它全部的解，或者说，求出它的解集合．如果两个方程组有相同的解集合，它们就称为同解的。

消元法的基本内容是由一些方程经过适当的变换把其中的一部分方程消成含较少未知量的方程1)．从中学代数中我们知道，反复地进行下去最后常常能得到一个只含有一个未知量的方程，于是它的值就定出了，从而把方程组求解的问题就归结为一个含有较少未知量的方程组求解的问题．这样，一步一步地得出原方程组的全部解．例如，解

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 = 6 \end{cases} \tag{2}$$

第二个方程减去第一个方程的2倍，第三个减去第一个的1倍，方程组(2)就变成

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad 4x_2 - x_3 = 2, \\ \qquad x_2 - x_3 = 5, \end{cases} \tag{3}$$

---

1) 确切地说，并不是把一些未知量"消去"，祇是使这些未知量的系数变成0。

第三个减去第二个方程的4倍，把第二、三两个方程的次序互换，即得。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad x_2 - x_3 = 5 \\ \qquad\quad 3x_3 = -18 \end{cases} \qquad (4)$$

这样，我们得出方程组的解 $(9, -1, -6)$

分析一下消元法，不难看出，它实际上是反复地对方程组进行变换，而变换也就是由以下三种基本的变换所构成：

1. 互换两个方程的位置
2. 加一个方程的倍数到另一个方程。
3. 用一非零的数乘某一个方程，

因之，我们给出，

定义1 变换1，2，3称为线性方程组的初等变换。

消元的过程就是反复施行初等变换的过程，不难证明，初等变换是同解的；也就是说，总是把方程组变成同解的方程组，下面来证初等变换2是同解的，其余的留给同学。

设原方程组为

$$\begin{cases} L_1 \\ \vdots \\ L_r \\ \vdots \end{cases}$$

倍数

$$\left\{\begin{array}{l} L_g \\ \vdots \\ L_s \end{array}\right. \qquad (5)$$

于是对 $L_g$ 作以方程施行初等变换之后，有

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 \\ \vdots \\ L_p \\ \vdots \\ L_g + c L_p \\ \vdots \\ L_s \end{array}\right. \qquad (6)$$

为了证明(5)与(6)是同解的，先证(5)的解一定是(6)的解，反过来，(6)的解是(5)的解。设 $(c_1, \dots, c_n)$ 是(5)的一个解，这就是说，把它代入(5)，各个方程都成恒等式，因为恒等式的倍数、恒等式的和都是恒等式，所以它也是(6)的解。反过来，由

$$L_g = (L_g + c L_p) - c L_p ,$$

可以同样证明方程组(6)的解也是方程组(5)的解。

下面我们来说明，如何利用初等变换来解一般的线性方程组。

对于方程组(1)，首先检查 $x_1$ 的系数，如果 $x_1$ 的系数，

$a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{s1}$全为0，那么方程组(1)对$x_1$没有任何限制，而方程组(1)就可以认为是$x_2, \cdots, x_n$的方程组来解。

如果$x_1$的系数不全为0，那么利用初等变换1，先假设$a_{11} \neq 0$，利用初等变换二，分别地把第一个方程的$-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$倍加到第i个方程，$(i = 2, \cdots, s)$，于是方程组(1)变成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1' \\ \qquad\quad a_{22}'x_2 + \cdots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \qquad\quad - - - - - - \\ \qquad\quad a_{s2}'x_2 + \cdots + a_{sn}'x_n = b_s' \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \qquad \begin{matrix} i = 2, \cdots, s \\ j = 2, \cdots, n \end{matrix}$$

这样，解方程组(1)的问题就归结为解方程组

$$\begin{cases} a_{22}'x_2 + \cdots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ - - - - - - \\ a_{s2}'x_2 + \cdots + a_{sn}'x_n = b_s' \end{cases} \tag{8}$$

的问题。显然，由(8)的一个解，根据(7)的第一个方程就定出$x_1$的值，也就是得出(1)的一个解；同之，<u>方程组(1)有解的充分必要条件为方程组(8)有解</u>。

对(8)再施行上面的变换，并且一步步做下去，最后就得

(撤)

…则一个阶梯形的方程组。

$$\begin{cases} C_{1j_1}x_{j_1}+C_{1j_1+1}x_{j_1+1}+\cdots+C_{1n}x_n=d_1, \\ C_{2j_2}x_{j_2}+C_{2j_2+1}x_{j_2+1}+\cdots+C_{2n}x_n=d_2, \\ \text{— — — — — —} \\ C_{rj_r}x_{j_r}+\cdots=d_r \\ 0=d_{r+1} \\ 0=0 \\ \text{— — —} \\ 0=0 \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n.$$

方程组(9)中"$0=0$"是一些恒等式，可以去掉而不改变方程解的情况。

我们知道，(1)与(9)是同解的，又根据上面的分析，方程组(9)是否有解就取决于其中最后一个方程：

$$0=d_{r+1},$$

是否有解，换句话说，就取决于它是不是恒等式，这就给出了判别方程组(1)是否有解的一个方法。用初等变换化方程组

(1) 成阶梯形方程组(9)，方程组(1)有解的充分必要条件为 $d_{r+1}=0$

在有解的情形，我们来进一步求解，为了讨论起来方便，把未知量重新编号，不妨设(9)为，

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r. \end{cases} \tag{10}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$，$i=1,\cdots,r$.

分两个情形来看，如果 $r=n$，那么由最后一个方程开始，$x_n, x_{n-1},\cdots,x_1$ 的值就逐个地唯一地决定了，这就是说，方程组(10)有唯一的解，如果 $r<n$，那么(10)可以改写为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1r+1}x_{r+1}\cdots c_{1n}x_n \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2r+1}x_{r+1}\cdots c_{2n}x_n \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{rr+1}x_{r+1}\cdots c_{rn}x_n \end{cases} \tag{11}$$

由此可见，任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 一组值，就唯一地定出 $x_1,\cdots,x_r$ 的值，也就是定出方程组(11)的一个解，一般地，由(11)我们可以把 $x_1,\cdots,x_r$ 通过 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 表示出来，这样一组表达

式就称为方程组（10）的一般解，而 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为一组自由未知数。

例，解方程组，

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1-2x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+4x_3=-1, \end{cases} \qquad (12)$$

用初等变换消 $x_1$，得，

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ \qquad -x_3=2, \\ \qquad x_3=-2, \end{cases}$$

再化一次，得，

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ \qquad x_3=-2, \end{cases} \qquad (13)$$

改写一下，

$$\begin{cases} 2x_1+3x_3=1+x_2 \\ \qquad x_3=-2 \end{cases}$$

即得，

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(7+x_2) \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

这就是方程组(12)的一般解，其中 $x_2$ 是自由未知数。

以上就是用初等变换解一般线性方程组的全部过程。

如果线性方程组(1)中常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 全为0，那么(1)就称为齐次线性方程组。显然，齐次线性方程组总是有解的，因为 $(0, 0, \cdots, 0)$ 就是一个解，对于齐次线性方程组，我们关心的问题常常是，它除去 $(0, 0, \cdots, 0)$ 以外还有没有其他的解，或者说，它有没有非零解，根据以上的分析，我们有

定理1：如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

中，$s < n$，那么它必有非零解。

证明：显然，方程组在化成阶梯形方程组之后，方程的个数不会超过原方程组的个数，即

$$r \le s < n.$$

由 $r < n$ 得知，它的解不是唯一的，因而必有非零解。‖

最后我们定义。

数又

定义2 由$s n$个数排成的$s$行$n$列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & & - \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

称为一$s\times n$矩阵

定义3 由方程组(1)的系数组成的$s\times n$矩阵(14)称为方程组(1)的系数矩阵，$s\times(n+1)$矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & - \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

称为方程组(1)的增广矩阵。

除去用以代表未知量的符号外，增广矩阵完全反映了方程组，对线性方程组对应我们有

定义4 所谓矩阵的初等行变换是指下列三种变换：

1、互换两行的位置，

2、加三行的倍数到另一行（行与行相加就是对应元素分别相加

3、用一非零数乘某一行的每个数

由于增广矩阵完全反映了线性方程组，所以在解方程组的过程中，可以直接对它的增广矩阵作初等变换来代替方程组的变换。

关于系数矩阵与增广矩阵在线性方程组的研究中的作用以后还要专门讨论。

## §3、排列

消元法是解线性方程组的一个有效的方法，但是它还不能明白地给出方程组的解与系数和常数项的关系。我们知道，在二、三元的情形，利用二、三阶行列式，线性方程组的解可以用这些系数表示出来，而在一般的情形下也有相仿的公式。为此我们首先定义 $n$ 阶行列式，为了定义 $n$ 阶行列式，还需要先讨论一下有关排列的一些性质。

定义4. 由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的有序数组称为一个 $n$ 阶排列。

例如，2431是一个4阶排列，45321是一个5阶排列。

$n$ 排列的全体所成的集合记为 $P_n$，不难标出 $P_n$ 中排列的个数，设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一 $n$ 阶排列，$j_1$ 可以是 $1, 2, \cdots, n$ 中的任一个，有 $n$ 个可能的取法，在 $j_1$ 取定之后，因为 $j_2$ 不能与 $j_1$ 相同，所以只有 $n-1$ 个可能的取法，同理，$j_3$ 就只有 $n-2$ 个可能的取法，余类推，因之 $n$ 阶排列的总数是

$$n(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1,$$

数

我们记

$$1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n=n!,$$

读为"n阶乘"例如 $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$，$5!=120$

$n!$ 随着n的增大异常迅速地增大，譬如，$10!=3628800$。

$12\cdots n$ 当然也是一n级排列，这个排列具有自然顺序，也就是按大小在增的顺序排起来的，其它的排列都或多或少地破坏自然顺序。

定义5 在一排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，那末就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为它的逆序数。

例如，2431中，2,1；4,3；4,1；3,1是逆序，2431的逆序数就是4，45321的逆序数是9（同学们数一下）。

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n).$$

定义6 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如，2431是偶排列，45321是奇排列，$12\cdots n$ 的逆序数是0，因之是偶排列。

应该指出，我们同样可以考虑由任意n个不同的（甚至于不连续的）自然数所组成的排列，一般也称为n阶排列。

从上这些概念对这样一種的n阶排列同样是可以定义的。

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的不动，就得到另一个排列。这样一个变换称为一个对换，如1，2对换，排列2431就变成了1432，排列2134就变成了1234。显然，如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了。由此得知，对换引起$P_n$的一个到自身上的一一变换。事实上，经过一个对换，n阶排列还是变成n阶排列，为了说明变换是1-1的，只需証明，经过一个对换之后，两个不同的排列还是变成两个不同的排列，设$x_n$，$y_n$是两个不同的n阶排列，经过对换之后，它们分别地变成$x_n'$，$y_n'$，因为再作一次这个对换之后，$x_n'$，$y_n'$就又分别变成$x_n$与$y_n$。如果$x_n'$与$y_n'$是相同的排列，那么$x_n$就必须与$y_n$相同，这与假設矛盾。

关于排列的奇偶性，我们有以下的基本事实。

定理1、对换改变排列的奇偶性。

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

証明，先看一个特殊的情形，即对换的两个数在排列中是相鄰的，排列，

$$\ldots j\ k \ldots \qquad (1)$$

经过j，k对换变成

$$\ldots k\ j \ldots \qquad (2)$$

这里“…”表示那些不动的数，显然，在排列(1)(2)中

$j$，$k$ 与其他的数所成的逆序是一致的。不同的就是 $j$，$k$ 的次序：如果原来 $j$，$k$ 组成逆序，那么经过对换，逆序数就减少一个，如果原来 $j$，$k$ 不组成逆序，那么经过对换逆序数就增加一个。不论增加1还是减少1，排列的逆序数的奇偶性总是变了。因此，在这个特殊的情形，定理是对的，再看一般的情形，设排列为

$$\cdots j\, i_1 i_2 \cdots i_s\, k \cdots \qquad (3)$$

对换 $j$ $k$ 对换，排列（3）变成

$$\cdots k\, i_1 i_2 \cdots i_s\, j \cdots \qquad (4)$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻的数的对换来实现。从（3）出发，把 $k$ 与 $i_s$ 对换，再与 $i_{s-1}$ 对换……也就是说，把 $k$ 一位一位地向左移动，经过 $S+1$ 次相邻位置的对换，排列（3）就变成

$$\cdots k\, j\, i_1 i_2 \cdots i_s \cdots \qquad (5)$$

从（5）出发，再把 $j$ 一位一位地向右移动，经过 $S$ 次相邻位置的对换，排列（5）就变成了排列（4），因此，$j$，$k$ 对换，可以通过 $2S+1$ 次的相邻位置的对换来实现，$2S+1$ 总是奇数，相邻位置的对换改变排列的奇偶性，显然，奇数次的改变奇偶性的最终结果还是改变奇偶性。这就完成了证明。//

作为定理2的一个推论，我们有

推论　在 $P_n$ 中，奇偶排列各半，各为 $\frac{n!}{2}$ 个。

证明　令 $E_n$，$O_n$ 分别为 $n$ 阶奇，偶排列的全体，显然