新數學

中學適用

半羣學社編著

第二册

下卷

聯合書院出版社

新數學

中學適用

半羣學社編著

第二冊

下卷

聯合書院出版社

總編輯

周紹棠 理學士（數學），哲學博士（數學）

編輯

潘海紅 理學士（數學）

鄭肇楨 文學士（數學）

潘煒棠 文學士（數學）教育文憑

T. McC. Chamberlain 文學碩士(數學)，教育學士

何光倫 理學士（數學），英國IMA會士

潘鎮邦 文學士（數學）

徐思明 文學士（數學） 教育文憑

經理編輯

彭錫恩 文學士

良友印刷有限公司印製

香港西灣河街九至十一號

利安納尤拉

Leonard Euler
(1707–1783)

利安納尤拉 (1703-1783)

利安納尤拉出生於瑞士的巴塞爾。後來他畢業於巴塞爾大學，他所研究的學科不限於數學；且亦涉及星學，音樂，植物學，化學，醫學，天文學及東方語言等。

尤拉雖然生長於瑞士，但他有大半生時間住在德國和俄國。當他二十歲時就給俄國的女皇卡扶蓮一世所召，到俄國聖彼得堡（即現在的列寧格勒）大學當物理教授，其後又當了數學教授。

在俄國十多年後，在1741年，尤拉接受了德國弗特烈大帝的邀請而參與柏林學院，此後廿四年時間都在柏林渡過。在1766年又重返俄國。

尤拉在二十六歲那年，可能因工作過度而致右眼失明。三十一年後左眼也不濟了，成了全盲。但他由他的兒子們協助，仍繼續研究直至逝世爲止。

在數學上各門，尤拉都有卓越的貢獻；包括高等代數，微積分，高級三角學和函數論等。他一生曾發表六百多篇重要文章，其中有些偉大的工作是在他全盲之後才發表印行的。在數學史裏，尤拉被認爲一位最多產的數學家。

第二册

下卷　目錄

5

第 五 章

邏 輯 II

5.1 量詞

在本書第二冊第3.41內，我們學過了方程和恒等式的區別，現在再溫習一下。
一個方程是一個開句，形式是 $p(x) = 0$，它的眞值集可能是空集也可能有一個或多個元素。若方程的眞值集是泛集則這方程稱爲恒等式。

例題

1) $x^2 + 1 = 0$ 是一方程，它的眞值集是空集。（此處的泛集是“實數集”）

2) $x - 1 = 0$ 是一方程，它的眞值集是 $\{1\}$。

3) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ 是一方程，它的眞值集是 $\{1, 2, 3\}$。

4) 設泛集是 $\{1, 2, 3\}$ 則 $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ 便是一恒等式。

5) $(x-2)^2 = 4(1-x) + x^2$ 是一恒等式。

若開句 $p(x)$ 的眞值集是泛集則可寫爲 $\forall x[p(x)]$.
符號 $\forall x$ 讀成“對於所有的數 x”。
若開句 $p(x)$ 的眞值集不是空集（即它至少有一元素）則可以寫爲 $\exists x[p(x)]$.
符號 $\exists x$ 讀成“對於有些數 x”或“有一數 x 存在而使”。$\forall x[p(x)]$ 和 $\exists x[p(x)]$ 已經不是開句。它們都是語句。$\forall x[p(x)]$ 是眞，當且僅當 $p(x)$ 的眞值集是泛集。$\exists x[p(x)]$ 是眞，當且僅當 $p(x)$ 的眞值集不是空集（但亦可能是泛集）。由上面所定義的符號 $\forall x$ 和 $\exists x$ 依次稱爲全稱量詞和存在量詞。

習題 5A

1) 設泛集是全數有理數所成的集，如可能試在下列開句的前面加以適當的量詞：

a) $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$ 答 $\forall a$

b) $(x-7)(x+1)=0$

c) $\dfrac{(y-3)(y+1)}{(y-3)}=y+1$

d) $x^2+1=0$

e) $(x+2)^2=0$

f) $s-1\geqslant 3$

g) $(v-2)^2\geqslant 0$

h) $(v-2)^2\leqslant 0$

2) 指出下列各語句的眞值：

a) $\forall x,\ x\cdot 7=7\cdot x$

b) $\exists a,\ a+2=2a$

c) $\forall y,\ y+2\neq y$

d) $\forall x,\ 8x+2x=10x$

e) $\exists x,\ (x+7)(x-7)\neq x^2-49$

f) $\exists x,\ x^2=-4$

g) $\exists x,\ x^2=4$

h) $\forall x,\ x+2=2x$

i) $\exists a,\ (-3)(-3)=a$

j) $\forall x,\ (x+2)(x\quad 3)=x^2+6$

5.2 複語句的否定法

當我們取一語句的否定時，則這否定的眞值和原語句的眞值相反。一開句的否定的眞值集是原開句的眞值集的餘集。

例

設泛集是 Z^+，$x-3\geqslant 0$ 的眞值集是 $\{3,4,5,\ldots\}$。$x-3\geqslant 0$ 的否定是 $x-3<0$; 它的眞值集是 $\{1,2\}$，這正是$\{3,4,5,\ldots\}$. 的餘集。

5.21 合取的否定

試考慮複語句“約翰是聰明的及約翰是勤奮的”。除非我們知道約翰的爲人，否則無法斷定這語句的眞假。

現在有如下四個可能情形：

情形	約翰是聰明的	約翰是勤奮的
(i)	是	是
(ii)	是	否
(iii)	否	是
(iv)	否	否

除了情形(i)語句是眞之外，在 (ii)，(iii)，(iv). 情形下語句都是假。

現在要找一語句在(i)時是假而在 (ii)，(iii)，(iv). 時是眞。這語句是“約翰是不聰明的或約翰不勤奮”。

若用符號，以 p 表示“約翰是聰明的”，以 q 表示“約翰是勤奮的”，則

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q.$$

我們可用眞值表來驗算：

p	q	p ∧ q	~(p ∧ q)
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	~p	~q	~p ∨ ~q
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

由上表可見 $\sim(p \wedge q)$ 和 $\sim p \vee \sim q$ 有相同的眞值，故得：

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

注意這式內，一方是符號“∧”，另一方是符號“∨”。用文字這式可以寫成“合取的否定和否定的析取等價”。

習題 5B

1) 求下列合取的否定並應用節5.21的(1)式加解釋：
   a) 他是謹愼的及他是整潔的。
   b) 他是有規律的及他是守時的。
   c) 他的指甲污垢及他的頭髮不齊整。
   d) 這一科是無用的及這一科是沒有趣味的。
   e) 他願意做這件事及他能夠做這件事。

2) 求下列的否定：
   a) 眞　　b) 假
   c) 非假　　d) 這事非假是不眞確的
   e) $\sim p$　　f) $\sim(\sim p)$

3) 由題2知 $\sim(\sim t) \Leftrightarrow t$. 由此可以求 $\sim(p \vee q)$。
   a) 設 $t \Leftrightarrow r \wedge s$.
   b) 應用 (1)以求 $\sim t$.
   c) 以 p 和 q 依次代替 $\sim r$ 和 $\sim s$。
   d) 取 $\sim t$ 的否定。

   由此便可求出 $\sim(p \vee q)$。

4) 設 t 代表語句“他的指甲不潔及他的頭髮不整齊”•依照題 3 的步驟以求下列語句的否定：“他的指甲清潔及他的頭髮整齊”•將結果和題 1 c) 的答案比較•

5.22 析取的否定

試考慮語句“約翰是聰明的或約翰是勤奮的”•如節 5.21，這命題在情形 (i), (ii), (iii) 下是眞而在 (iv) 則是假的•

這語句的否定應在情形 (i), (ii), (iii) 下是假的而在 (iv) 下是眞•這就是“約翰是不聰明的及約翰是不勤奮的”•

設以 p 代表“約翰是聰明的”，q 表“約翰是勤奮的”則有：

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q.$$

我們可用眞值表來驗算：

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

由這兩表可見 $\sim(p \vee q)$ 和 $\sim p \wedge \sim q$ 有相同的眞值，故

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

以文字表示則 (2) 可寫爲：

“析取的否定和否定的合取等價•”

(1) 和 (2)

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$
$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

合稱爲“德摩根定律”，這個名是紀念它的發明人英國邏輯學家奧嘉斯特斯德摩根 (1806-1871)•

習題 5C

1) 求下列各析取的否定並應用 § 5.22 的 (2) 式加以解釋：
   a) 她的衣服污穢或她的衣服上有污點•
   b) 他是懶惰的或他是遲鈍的•
   c) 這書是太難懂或他是太愚蠢•
   d) 烹飪法是壞的或食物是壞的•

2) 以文字代替符號：

i) $p \to q$, ii) $q \to p$,

iii) $\sim p \to \sim p$, iv) $\sim q \to \sim p$,

v) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, vi) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

p 和 q 依次代表：

a) “這裏有烟”；“這裏有火”。
b) “你明白邏輯”；“你是聰明的”。
c) “你已盡力而爲”；“你的教師高興”。

3) 在本書第二冊節2.44已載有 $(p \to q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$，應用 (2) 以求 $(p \to q)$ 的否定，用眞值表以驗算結果。試用條件式“如這裏有烟則這裏有火”爲例來解釋所得的結果。

5.23 條件式的否定

設以 t 表示“如他考試合格則他可以升級”。又以 p 如 q 依次表示“他考試合格”和“他可以升級”。

由第二冊節 2.44，t 在下列情形下眞確：

a) $p \wedge q$ — “他考試合格及他可以升級”
b) $\sim p \wedge q$ — “他考試不合格及他可以升級”
c) $\sim p \wedge \sim q$ — “他考試不合格及他不可以升級”

即在這三種情形下 $\sim t$ 是假的。

祇有在下列情形下 t 是假（即 $\sim t$ 是眞）：

$p \wedge \sim q$ “他考試合格及他不可以升級”

由是

$$t \Leftrightarrow p \to q \quad ; \quad \sim t \Leftrightarrow p \wedge \sim q.$$

即得：

$$\sim (p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q.$$

我們可用眞值表來驗算：

p	q	$p \to q$	$\sim (p \to q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

q	p	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	F
F	F	T	F

由此可知 $\sim(p \to q)$ 和 $(p \wedge \sim q)$ 常有相同的眞值，故

$$\sim(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q \qquad - - - - \qquad (3)$$

習題 5D

求下列各條件式的否定並用 (3) 來解釋：

a) 如你慣於在暗處閱讀則你快要戴眼鏡了。
b) 如他吸烟則他會不健康。
c) 若他不是愚蠢就是懶惰。
d) 如他不能游泳則他會被溺。
e) 如你照這樣方法去打球則必不會取勝。

5.3 含量詞語句的否定

在本章節 5.1 我們已學過全稱量詞 $\forall x$（“對於所有數 x”）和存在量詞 $\exists x$（“對於有些數 x”）。現在考慮那些含有量詞的語句的否定。

i) 要看 $\forall x\,[p(x)]$ 的否定的意義，先將它寫成文字：“對所有數 x 而言 p(x) 是眞確是不對的”。這意思是，我們可求出些 x 使 $\sim p(x)$ 眞確。用符號可寫爲 $\exists x\,[\sim p(x)]$，即

$$\sim(\forall x\,[p(x)]) \Leftrightarrow \exists x\,[\sim p(x)] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4)$$

ii) 要看 $\exists x\,[p(x)]$ 的否定的意義，也先將它寫成文字：“對有些數 x 而言 p(x) 是眞確是不對的”。這意思是沒有一個數 x 能使 p(x) 眞確。用符號可寫爲 $\forall x\,[\sim p(x)]$，即

$$\sim(\exists x\,[p(x)]) \Leftrightarrow \forall x\,[\sim p(x)] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (5)$$

由 (4) 和 (5)，易知

a) 全稱語句的否定是一存在語句。
b) 存在語句的否定是一全稱語句。

習題 5E

1) 試應用 (4)，(5) 以文字寫出下列各語句的否定：
 a) 有些數字是偶數。（全數數字都不是偶數）
 b) 有些教員是年青的。
 c) 全數巴士都滿座。
 d) 全數窗都關上或門開着。
 e) 有些學生是高的及有些學生是矮的。
 f) $\exists x, x^2 < 0$
 g) $\exists x, (x-5)(x+7) = 0$

h) 全數座位都滿了。

i) $\forall a\ [a \neq 0 \rightarrow a^2 > 0]$

j) 若 p 是一質數則必有一個大於 p 的質數存在。

2) 寫出習題 5A 內題 2 的命題的否定，指出它們的眞值。（可用原有答案來驗算現在答案）

5.4 數量形容詞

在我們討論中，常會遇到如下列的語句：

i) 全數正方形都是矩形。
ii) 有些菱形是矩形。
iii) 有些矩形是正方形。
iv) 有些正方形是矩形。
v) 沒有正方形是三角形。

我們可用集的述語來敘述這些語句，例如：

i) 全數正方形的集是全數矩形的集的子集。
ii) 全數菱形的集和全數矩形的集不是不相交的。

依照同法重寫 (iii)，(iv)，(v)。

我們亦可用溫氏圖來表示上面的語句。

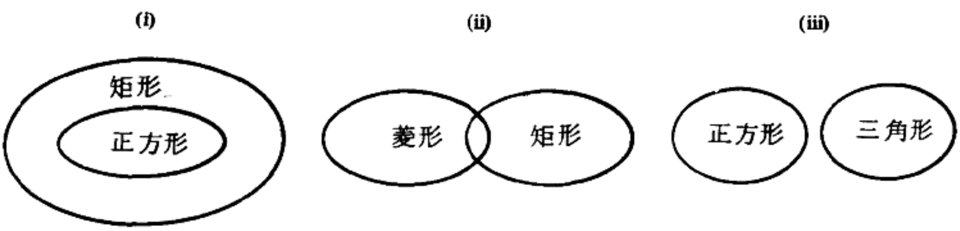


圖 5.1

我們要注意，“有些”可以表示“有些但不是全數”，但在數學中，這表示“有些或全數”。由此“有些正方形是矩形”仍是眞的語句。

5.5 反證例

在數學上要表明一個命題是眞確的，便用合於邏輯的推理來證明它眞確；要表明一個命題是不確的，便用邏輯來反證它不確。有時要證明一個命題不確，祇要舉出一個例，在這例的情形下命題顯然錯誤，便足以反證這命題。這種例稱爲反證例。

例如有人說，“所有遲學講話的孩子，智力也是遲鈍的•”你可以指出大物理學家愛恩斯坦（1879-1955）到四歲才會講話•這個例便是反證例，證明人們所說是不對的•

又設有人說，“所有有四隻腳和會吠的動物都是狗•”你可以舉出“香港維多利山頂的吠鹿”來反證•

習題 5F

試儘量舉出反證例來反證下列各語句：

i) 如這裏有火則必有烟•
ii) 在海裏渡過一生的生物必然是魚•
iii) 女子不會成大政治家•
iv) 他戴了眼鏡故他必是近視•
v) 會升起的也必會下降•
vi) 男孩子比女孩子的數學好•
vii) 女孩子比男孩子的英文好•
（如果你們在男女校則容易找到很多反證例）
viii) 水永在 100°C 時沸•
ix) 在同一溫度中攝氏表和華氏表的度數永遠不同•（例如 $0°C = 32°F$，$100°C = 212°F$ ）
x) 多邊形的各邊相等便是正多邊形•
xi) 任何四邊形有一雙對邊相等便是平行四邊形•
xii) 任何大於直角的角便是鈍角•
xiii) 沒有質數*是偶數，因爲全數偶數都可被 2 整除•
xiv) 任何數的平方都是正數•
xv) 設 a, b 和 n 都是數字•
a) 若 $a \times n = b \times n$ 則 $a = b$.
b) 若 $a \neq b$, 則 $a \times n \neq b \times n$.
c) 若 $a > b$, 則 $a \times n \geqslant b \times n$ （n是正或是負數）
d) 若 $a^2 = 1$ 則 $a = 1$.

注意：在數論中曾有許多人嘗試作出質數的公式，這些公式看來好像眞確，但後來都給反證例證明爲假•

其中一個公式是 $x = n^2 + n + 41$（其中n是自然數），以由0 至 39 的 n 值代入都得質數 x•但以 $n = 40$ 代入則

$$\begin{aligned} x &= 40^2 + 40 + 41 \\ &= 40(40+1) + 41 \end{aligned}$$

* 質數是大於 1 的自然數，除了 1 和它自己之外沒有數可以整除它的•

$$= 40(41) + 41$$
$$= (40 + 1)(41)$$
$$= (41)^2$$

故 $n = 40$ 便是一個反證例，反證下列語句不確：

"若 n 是自然數則 $x = n^2 + n + 41$ 便是質數。"

5.6 由條件式引導的命題

已與一眞條件式 $p \to q$，我們用各種方法將其中各部分調換（即 $q \to p$, $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim p$），以研究所得新命題的眞值。

以條件式"若這裏有烟則這裏有火"爲例，我們訂下了烟的定義，祇有由火才可以生烟，那麼這條件式便是眞確。

5.61 條件式的逆命題

上述條件式的逆命題是"若這裏有火則這裏有烟"。用符號表示則 $p \to q$ 的逆命題是 $q \to p$。

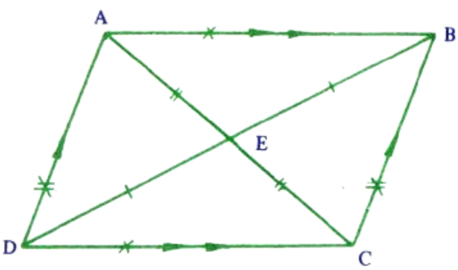
我們可以舉出好些反證例來證明逆命題不眞確；例如煤氣爐，火酒燈的火燄都不生烟。故逆命題不一定眞確。由是知命題 $(p \to q) \to (q \to p)$ 是不眞確的。逆命題又稱爲倒命題。

習題 5G

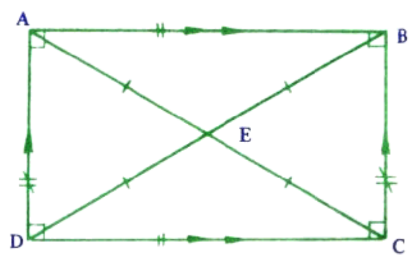
（題 1 可用口答）

1) 將習題 5D 內題 1 的條件式化爲逆命題。

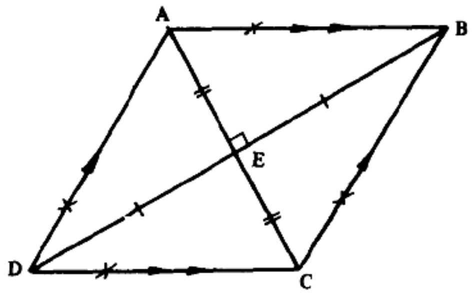
2)



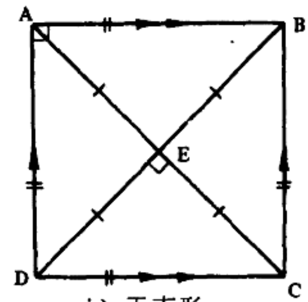
i) 平行四邊形



ii) 矩形



iii) 菱形



iv) 正方形

圖 5.2

上圖裏是四種四邊形，它們個別的特徵已用符號記在圖上。

下面有些眞條件式，是關於這些四邊形的性質的。試寫出它們的逆命題，並借助圖 5.2 以檢驗它們是否仍眞。

例如： 若 ABCD 是一正方形則 AC = BD 。

逆命題 若 AC = BD 則 ABCD 是一正方形。

這逆命題是不確的， ABCD 可能是一矩形，若 AC ， BD 不互相平分的話則甚至不是一個平行四邊形。

a) 若 ABCD 是一平行四邊形則 AB 等於且平行 CD。
b) 若 ABCD 是一菱形則 AC 和 BD 互相垂直且平分。
c) 若 ABCD 是一平行四邊形則三角形 ABD 和 CBD 面積相等。
d) 若 ABCD 是一矩形則 AC 和 BD 互相平分。
e) 若 ABCD 是一菱形則 AB = BC = CD = DA 。
f) 若 ABCD 是一正方形則 AE = BE = CE = DE 。
g) 若 ABCD 是一矩形則 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ 。

3) 若一條件式是眞則它的逆命題的眞值是甚麼？

5.62 條件式的對命題

條件式 $p \rightarrow q$ 的對命題是 $\sim p \rightarrow \sim q$。上述例題的對命題便是“若這裏沒有烟則這裏沒有火”。有如我們所學的反證例，這裏沒有烟仍可以有煤氣燈的火燄等。故雖然對命題有時會眞，但不常眞確。由是命題 $(p \rightarrow q) \therefore (\sim p \rightarrow \sim q)$是不眞的。

習題 5H

重做習題 5G ，將逆命題改爲對命題。

5.63 條件式的逆對命題

條件式 $p \to q$ 的逆對命題是 $\sim q \to \sim p$ •由是上面所舉的例的逆對命題便是"若這裏沒有火則這裏沒有烟"•我們易見這不過是原命題的別種說法，必與原命題等價•故若 $p \to q$ 是眞則 $\sim p \to \sim p$ 必眞確•

別一例是"若 ABCD 是一正方形則 ABCD 必是一矩形"•它的逆對命題是"若 ABCD 不是矩形則 ABCD 不是正方形"•若原命題是眞則後者亦眞•

下面是這些命題的眞値表•

		條件式	逆命題	對命題	逆對命題
p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

由上表可見條件式和它的逆對命題有相同的眞值，故它們是等價的•同樣逆命題和對命題的眞値也相同，故也是等價的•用符號可寫爲：

i) $p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$

ii) $q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

若原命題是 $q \to p$，它的逆對命題是 $\sim p \to \sim q$，由 (i) 它們是等價的，由是可得 (ii) 式•

有時想證明 $p \to q$ 可以證明 $\sim q \to \sim p$ 來代替•例如要證明"若 x^2 是奇數則 x 是奇數"並不容易，但可證明它的逆對命題"若 x 是偶數則 x^2 是偶數"來代替；後者是較爲容易的•

習題 5I

重做習題 5H，將對命題改爲逆對命題•

本章概要

1) 量詞

全稱量詞 $\forall x$ —"對於所有數 x"

存在量詞 $\exists x$ —"對於有些數 x"

2) 否定— 一命題的眞値和原命題的相反•