高等学校基础课程配套辅导用书

恩波理工 ENBO

高等数学

同济五版

习题解答

全书章节顺序、习题编号均与同济5版《高等数学》相同。全部题目按不同难度分为A、B、C三级。A级为基础题，为理解课本内容所必需；B级为提高题，有助于对课本内容的深入理解及对解题方法、技巧的进一步提高；C级为难度较高题，用于提高对问题的分析、综合能力及课本知识的灵活运用。

赠

本书为《高等数学同步精讲》(陈兰祥主编)的赠品

目　　录

第一章　函数与极限 …… 1

习题 1-1(1)　习题 1-2(4)　习题 1-3(5)　习题 1-4(7)

习题 1-5(8)　习题 1-6(9)　习题 1-7(10)　习题 1-8(10)

习题 1-9(11)　习题 1-10(12)　总习题一(13)

第二章　导数与微分 …… 17

习题 2-1(17)　习题 2-2(19)　习题 2-3(22)　习题 2-4(23)

习题 2-5(26)　总习题二(29)

第三章　中值定理与导数应用 …… 32

习题 3-1(32)　习题 3-2(34)　习题 3-3(35)　习题 3-4(37)

习题 3-5(41)　习题 3-6(44)　习题 3-7(47)　习题 3-8(48)

总习题三(49)

第四章　不定积分 …… 53

习题 4-1(53)　习题 4-2(54)　习题 4-3(56)　习题 4-4(58)

习题 4-5(60)　总习题四(61)

第五章　定积分 …… 67

习题 5-1(67)　习题 5-2(69)　习题 5-3(71)　习题 5-4(74)

习题 5-5(76)　总习题五(77)

第六章　定积分的应用 …… 83

习题 6-1(83)　习题 6-2(90)　总习题六(92)

第七章　空间解析几何与向量代数 …… 95

习题 7-1(96)　习题 7-2(98)　习题 7-3(100)　习题 7-4(101)

习题 7-5(102)　习题 7-6(105)　总习题七(109)

第八章　多元函数微分法及其应用 …… 110

习题 8-1(109)　习题 8-2(110)　习题 8-3(112)　习题 8-4(113)

习题 8-5(115)　习题 8-6(117)　习题 8-7(119)　习题 8-8(120)

习题 8-9(122)　习题 8-10(123)　总习题八(124)

第九章　重积分 …… 128

习题 9－1(128)　习题 9－2(129)　习题 9－3(137)　习题 9－4(140)

习题 9－5(145)　总习题九(146)

第十章　曲线积分和曲面积分 …… 150

习题 10－1(150)　习题 10－2(152)　习题 10－3(154)　习题 10－4(156)

习题 10－5(159)　习题 10－6(160)　习题 10－7(161)　总习题十(164)

第十一章　无穷级数 …… 168

习题 11－1(168)　习题 11－2(169)　习题 11－3(171)

习题 11－4(172)　习题 11－5(174)　习题 11－6(175)

习题 11－7(177)　习题 11－8(180)　总习题十一(181)

第十二章　微分方程 …… 186

习题 12－1(186)　习题 12－2(187)　习题 12－3(189)

习题 12－4(191)　习题 12－5(194)　习题 12－6(196)

习题 12－7(199)　习题 12－8(201)　习题 12－9(203)

习题 12－10(207)　习题 12－11(208)　习题 12－12(210)

总习题十二(213)

第一章 函数与极限

习题 1-1

A 1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$, $B=[-10,3)$, 写出 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,
$A\cap B=[-10,-5)$,
$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$,
$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

B 2. 设 A, B 是任意二个集合,证明对偶律: $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

证明 $x\in(A\cap B)^c\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$
$\Rightarrow x\in A^c$ 或 $x\in B^c\Rightarrow x\in A^c\cup B^c$,

从而 $(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$;

反之, $x\in A^c\cup B^c\Rightarrow x\in A^c$ 或 $x\in B^c$
$\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B$
$\Rightarrow x\in(A\cap B)^c$,

从而 $A^c\cup B^c\subset(A\cap B)^c$.

于是 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

C 3. 设映射 $f: X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset X$. 证明:

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明 (1) $y\in f(A\cup B)\Rightarrow$ 存在 $x\in A\cup B$, 使 $y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)$, 这表示 $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$;

反之, $y\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Rightarrow$ 存在 $x\in A$ 或 $x\in B$, 使 $y=f(x)\Rightarrow y\in f(A\cup B)$, 这表示 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

于是 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 由 $y\in f(A\cap B)\Rightarrow$ 存在 $x\in A\cap B$, 使 $y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$, 知 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

B 4. 设映射 $f: X\to Y$, 若存在一个映射 $g: Y\to X$, 使 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$, 其中 I_X, I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射,即对于每个 $x\in X$, 有 $I_X(x)=x$; 对于每个 $y\in Y$, 有 $I_Y(y)=y$. 证明: f 是双射,且 g 是 f 的逆映射: $g=f^{-1}$.

证明 先证 f 是双射.

$\forall x_1, x_2\in X$, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g[f(x_1)]=g[f(x_2)]\Rightarrow I_X(x_1)=I_X(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, 所以 f 是单射.

又 $\forall y\in Y$, $g(y)\in X$, 所以 $\exists x\in X$, 使 $x=g(y)$. 从而 $f(x)=f[g(y)]=I_Y(y)=y$,

故 f 是满射,于是 f 是双射.

下面证 g 是 f 的逆映射. $\forall y\in Y$, 由题设知 $\exists x\in X$, 使 $g(y)=x\in X$. 从而

$$f(x)=f[g(y)]=I_Y(y)=y.$$

于是 g 是 f 的逆映射: $g=f^{-1}$.

C 5. 设映射 $f: X\to Y$, $A\subset X$. 证明:

(1) $f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2) 当 f 是单射时,有 $f^{-1}(f(A))=A$.

证明 (1) $\forall x\in A$, $f(x)\in f(A)$. 因 $A\subset X$, 故 $f(A)\subset Y$, 从而 $x\in f^{-1}(f(A))$, 故 $f^{-1}(f(A))\supset A$.

(2) $\forall x\in f^{-1}(f(A))$, 则 $f(x)\in f(A)$. 因此在 A 中必 $\exists x'$, 使 $f(x)=f(x')$, 因 f 是单射,故必有 $x=x'$, 即 $x\in A$, 故 $A\supset f^{-1}(f(A))$. 又由 (1) 知 $f^{-1}(f(A))\supset A$, 从而有 $f^{-1}(f(A))=A$. 证毕.

A 6. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$; (2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y=\sin\sqrt{x}$; (6) $y=\tan(x+1)$;

(7) $y=\arcsin(x-3)$;

(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

(9) $y=\ln(x+1)$; (10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $3x+2\geqslant 0$, $x\geqslant-\dfrac{2}{3}$, 定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq 0$, $x\neq\pm 1$, 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$, 即 $x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$, 定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0$, $|x|<2$, 定义域为 $(-2,2)$.

(5) 定义域为 $[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 定义域为 $\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1, k\pi+\dfrac{3\pi}{2}-1\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(7) $-1\leqslant x-3\leqslant 1$, $2\leqslant x\leqslant 4$, 定义域为 $[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$, 即 $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 0$, 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0$, 即 $x>-1$, 定义域为 $(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$, 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

7. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1) 不相同. 因为 $\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 而 $2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2) 不相同. 因为两者对应法则不同, 当 $x<0$ 时, $g(x)=-x$.

(3) 相同. 因为两者定义域、对应法则均相同.

(4) 不相同. 因为两者定义域不同.

A 8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$, 并作出 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解 因为 $|x|=\left|\dfrac{\pi}{6}\right|<\dfrac{\pi}{3}$, 所以 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$.

同理 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(-2)=0$.

$y=\varphi(x)$ 的图形为

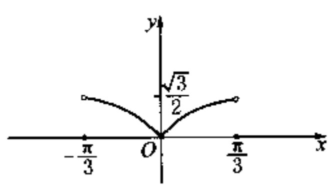

图 1-1

A 9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty,1)$;

(2) $y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$.

证明 (1) 任取 x_1、$x_2\in(-\infty,1)$, 且 $x_1<x_2$, 则

$$\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2(1-x_1)-x_1(1-x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

从而 $y(x_2)>y(x_1)$, 所以 $\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调递增.

(2) 任取 x_1, $x_2\in(0,+\infty)$, 且 $x_1<x_2$, 则

$(x_2+\ln x_2)-(x_1+\ln x_1)=x_2-x_1+\ln\dfrac{x_2}{x_1}$,

因为 $x_2>x_1>0$, 所以 $x_2-x_1>0$,

且 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$, $\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$.

从而 $y(x_2)>y(x_1)$, 所以 $x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

B10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证明 任取 x_1, $x_2\in(-l,0)$, 且 $x_1<x_2$, 则

$-x_1$, $-x_2\in(0,l)$, 且 $-x_2<-x_1$.

由于 $f(x)$ 是 $(-l,l)$ 内的奇函数, 且在 $(0,l)$ 内单调增加, 所以

$$f(-x_2)-f(-x_1)=-f(x_2)+f(x_1)<0,$$

从而 $f(x_1)<f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

B11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 为奇函数, 而 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 为偶函数.

(1) $g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)+g_2(x)$,

所以两个偶函数的和仍为偶函数. 而

$$f_1(-x)+f_2(-x)=-[f_1(x)+f_2(x)],$$

所以两个奇函数的和仍为奇函数.

(2) $g_1(-x)\cdot g_2(-x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$,

所以两个偶函数的乘积是偶函数. 而

$$f_1(-x)\cdot f_2(-x)=-f_1(x)\cdot(-f_2(x))=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

所以两个奇函数的乘积是偶函数. 又

$$g_1(-x)\cdot f_1(-x)=g_1(x)\cdot(-f_1(x))=-g_1(x)\cdot f_1(x),$$

所以偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

A12. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些是既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　(2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　(4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;

(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$,

所以 $f(x)$ 是既非偶函数又非奇函数.

(3) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1$
$=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$

且 $\neq -f(x)$，
所以 $f(x)$ 是既非偶函数又非奇函数.

(6) $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，
所以 $f(x)$ 为偶函数.

A13. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos 4x$；
(3) $y=1+\sin \pi x$；　(4) $y=x\cos x$；
(5) $y=\sin^2 x$.

解　(1) $y=\cos(x-2)$ 是周期函数,周期 $l=2\pi$.
(2) $y=\cos 4x$ 是周期函数,周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.
(3) $y=1+\sin \pi x$ 是周期函数,周期 $l=2$.
(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数.
(5) $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 是周期函数,周期 $l=\pi$.

A14. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；
(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$；　(4) $y=2\sin 3x$；
(5) $y=1+\ln(x+2)$；　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解　(1) $y=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow x=y^3-1\Rightarrow$ 反函数为 $y=x^3-1$.
(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}\Rightarrow$ 反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.
(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}\Rightarrow$ 反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.
(4) $y=2\sin 3x\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}\Rightarrow$ 反函数 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.
(5) $y=1+\ln(x+2)\Rightarrow x=e^{y-1}-2\Rightarrow$ 反函数 $y=e^{x-1}-2$.
(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}\Rightarrow 2^x=2^x\cdot y+y\Rightarrow 2^x(1-y)=y\Rightarrow 2^x=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow x=\log_2\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow$ 反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

B15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明　充分性.设 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,则 $\forall x\in X$,取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$,则 $|f(x)|\leqslant M$,从而 $f(x)$ 在 X 上有界.
必要性.设 $f(x)$ 有界,即 $\forall x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,故知 $f(x)$ 既有下界 $M_1=-M$,又有上界 $M_2=M$,得证.

A16. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2,\ u=\sin x,\ x_1=\dfrac{\pi}{6},\ x_2=\dfrac{\pi}{3}$；
(2) $y=\sin u,\ u=2x,\ x_1=\dfrac{\pi}{8},\ x_2=\dfrac{\pi}{4}$；
(3) $y=\sqrt{u},\ u=1+x^2,\ x_1=1,\ x_2=2$；
(4) $y=e^u,\ u=x^2,\ x_1=0,\ x_2=1$；
(5) $y=u^2,\ u=e^x,\ x_1=1,\ x_2=-1$.

解　(1) $y=\sin^2 x,\ y_1=\dfrac{1}{4},\ y_2=\dfrac{3}{4}$；
(2) $y=\sin 2x,\ y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y_2=1$；
(3) $y=\sqrt{1+x^2},\ y_1=\sqrt{2},\ y_2=\sqrt{5}$；
(4) $y=e^{x^2},\ y_1=1,\ y_2=e$；
(5) $y=e^{2x},\ y_1=e^2,\ y_2=e^{-2}$.

A17. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$；
(2) $f(\sin x)$；
(3) $f(x+a)\quad(a>0)$；
(4) $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$.

解　(1) $x^2\in[0,1]$,即 $x\in[-1,1]$,故定义域为 $[-1,1]$.
(2) $\sin x\in[0,1]$,即 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$,故定义域为 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$.
(3) $x+a\in[0,1]$,即 $x\in[-a,1-a]$,故定义域为 $[-a,1-a]$.
(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$
所以当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,有 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,即定义域为 $[a,1-a]$;当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为空集.

B18. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解　将 $g(x)=e^x$ 代替 x 代入 $f(x)$ 中,得

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\0, & |e^x|=1,\\-1, & |e^x|>1.\end{cases}$$

即
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$$

函数 $f[g(x)]$ 的图形如图 1-2(a) 所示.

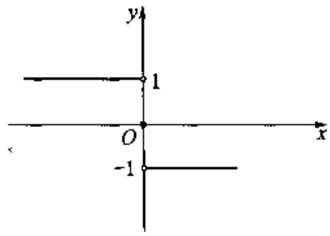

图 1-2(a)

将 $f(x)$ 代替 x 代入 $g(x)$ 中，得

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, & |x| < 1, \\ e^0 = 1, & |x| = 1, \\ e^{-1} = \dfrac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$

函数 $g[f(x)]$ 的图形如图 1-2(b) 所示.

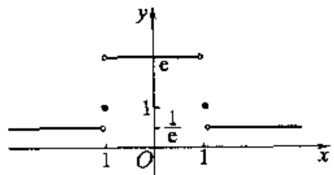

图 1-2(b)

A19. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi = 40°$(图 1-3). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

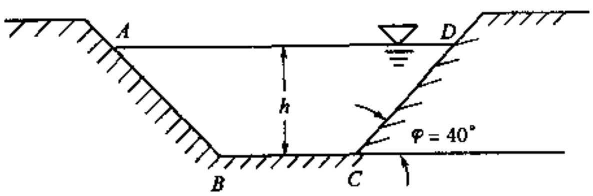

图 1-3

解 由图可知 $h = AB\sin\varphi = DC\sin\varphi$，故

$$AB = DC = \frac{h}{\sin 40°},$$

又从梯形的面积公式 $S_0 = \frac{1}{2}h(BC + AD)$，得

$$\frac{1}{2}h[BC + (BC + 2h\cot 40°)] = S_0,$$

从而 $$BC = \frac{S_0}{h} - h\cot 40°,$$

所以 $L = AB + BC + CD = \dfrac{2h}{\sin 40°} + \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40°$,

即 $L = \dfrac{S_0}{h} + \dfrac{2 - \cos 40°}{\sin 40°}h$.

自变量 h 的取值范围由不等式组

$$\begin{cases} h > 0, \\ \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40° > 0 \end{cases}$$

确定，故定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40°}$.

B20. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台，售价就降低 1 分，但最低为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1 000 台，厂方可获利润多少？

解 (1) 由所给条件，实际售价 p 的函数关系式为

$$p = \begin{cases} 90, & 0 \leqslant x \leqslant 100, \\ 90 - (x - 100) \times 0.01, & 100 < x < 1\,600, \\ 75, & x \geqslant 1\,600. \end{cases}$$

(2) 厂方所获利润 P 的函数关系式为

$$P = (p - 60) \cdot x$$

$$= \begin{cases} 30x, & 0 \leqslant x \leqslant 100, \\ 31x - 0.01x^2, & 100 < x < 1\,600, \\ 15x, & x \geqslant 1\,600. \end{cases}$$

(3) 所获利润 P 为

$$P = 31 \times 1\,000 - 0.01 \times 1\,000^2 = 21\,000(\text{元}).$$

习题 1-2

A 1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$；　　(2) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$；

(3) $x_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$；　　(4) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$；

(5) $x_n = n(-1)^n$.

答 (1) 0；(2) 0；(3) 2；(4) 1；(5) 没有极限.

B 2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，问 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$ 求 N，使当 $n > N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon = 0.001$ 时，求出 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

事实上 $|x_n - 0| = \left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right| = \dfrac{1}{n}\left|\cos\dfrac{n\pi}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$，于是 $\forall \varepsilon > 0$，要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$，即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 即可.

当 $\varepsilon = 0.001$ 时，$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] = 1\,000$. 即若取 $\varepsilon = 0.001$，只要 $n > 1\,000$，就有 $|x_n - 0| < 0.001$.

B 3. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}} = 1$.

证明 (1) $\forall \varepsilon > 0$，欲使 $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| = \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$，只须 $n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，只要

$n > N$，就有

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，由

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{6n+2-6n-3}{2(2n+1)}\right|=\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

可知只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，于是 $\forall\varepsilon>0$，只要 $n>N$，就有

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}.$$

(3) $$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n},$$

要使 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{a^2}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{a^2}{\varepsilon}$，于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$，只要 $n>N$，就有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1|=\frac{1}{10^n}<\frac{1}{n}$，

要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，就有

$$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1.$$

○ 4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限，但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，总有

$$|u_n-a|<\varepsilon,$$

故 $$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon.$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，亦总有 $||u_n|-|a||<\varepsilon$，

所以 $$\lim_{n\to\infty}|u_n|=|a|.$$

反例：取 $x_n=(-1)^n$，显然

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

● 5. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明　因数列 $\{x_n\}$ 有界，故 $\exists M>0$，对一切 n 均有 $|x_n|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以 $\exists N$，当 $n>N$ 时，总有 $$|y_n-0|=|y_n|<\frac{\varepsilon}{M},$$

从而 $$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0.$$

○ 6. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明

$$x_n\to a(n\to\infty).$$

证明　$\forall\varepsilon>0$，$\because x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$

$\therefore\exists k_1>0$. 当 $2k-1>2k_1-1$ 时，

有 $$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon;$$

又 $\because x_{2k}\to a(k\to\infty)$　$\therefore\exists k_2>0$. 当 $2k>2k_2$ 时，

有 $$|x_{2k}-a|<\varepsilon.$$

现取 $N_3=\max\{2k_1-1,2k_2\}$. 当 $n>N$ 时，

恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

$$\therefore\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

习题 1－3

▲ 1. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$；　(2) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$；　(4) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

解　(1) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|(3x-1)-8|=3|x-3|<\varepsilon,$$

只须 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就都有

$$|(3x-1)-8|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{x\to3}(3x-1)=8.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|(5x+2)-12|=5|x-2|<\varepsilon,$$

只须 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，就都有

$$|(5x+2)-12|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{x\to2}(5x+2)=12.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x+2|<\varepsilon,$$

只须取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时，就都有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

只须 $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当 $0<\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时，便都有

$\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

A 2. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证明　(1) $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$,

只须 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$,取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$,当 $|x|>X$ 时,就都有

$$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$,

只须 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,当 $x>X$ 时,便都有

$$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0.$$

A 3. 当 $x\to2$ 时,$y=x^2\to4$.问 δ 等于多少,使当 $|x-2|<\delta$ 时,

$$|y-4|<0.001?$$

解　$|y-4|=|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|$

当 $x\to2$ 时,$|x-2|\to0$.不妨设 $|x-2|<1$,即 $1<x<3$ 从而 $3<x+2<5$.

则 $|y-4|=|x+2|\cdot|x-2|<5|x-2|$.

$\forall\varepsilon>0$,要使 $|y-4|<\varepsilon$. 只要 $5|x-2|<\varepsilon$.

即　$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$.

于是 $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$. 当 $0<|x-2|<\delta$ 时,$|y-4|<\varepsilon$.

取 $\varepsilon=0.001$,则 $\delta=0.0002$.(即 $\delta=0.0002$ 时.当 $|x-2|<\delta$ 时,$|y-4|<0.001$)满足题意.

A 4. 当 $x\to\infty$ 时,$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to1$.问 X 等于多少,使当 $|x|>X$ 时,

$$|y-1|<0.01?$$

解　要使 $|y-1|=\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<0.01$,只须

$$|x|>\sqrt{\frac{4}{0.01}-3}=\sqrt{397},$$

取 $X=\sqrt{397}$,当 $|x|>X$ 时,就有 $|y-1|<0.01$.

A 5. 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to0$ 时极限为零.

证明　$\forall\varepsilon>0$,要使 $||x|-0|=|x|<\varepsilon$,

只须取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-0|<\delta$ 时,就有 $||x|-0|<\varepsilon$,所以

$$\lim_{x\to0}|x|=0.$$

A 6. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左、右极限,并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

解

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^-}1=1,$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1,$$

因为 $f(0^-)=f(0^+)$,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

$$\varphi(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\varphi(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

因为 $\varphi(0^-)\neq\varphi(0^+)$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$ 不存在.

B 7. 证明:若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限都存在且等于 A,则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

证明　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X_1>0$,当 $x>X_1$ 时,

$$|f(x)-A|<\varepsilon;$$

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,对于上述 $\varepsilon>0$, $\exists X_2>0$,当 $x<-X_2$ 时,

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$,则当 $|x|>X$ 时,有 $x>X$ 或 $x<-X$,因而有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

B 8. 根据极限定义证明:函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明　充分性.设 $f(x_0^-)=A=f(x_0^+)$,于是对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$,当 $-\delta_1<x-x_0<0$ 或 $0<x-x_0<\delta_2$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $-\delta<x-x_0<0$ 或 $0<x-x_0<\delta$ 时,上式也成立.这表示 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,所以

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

必要性.设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

取 $\delta_1=\delta_2=\delta$,则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$,当 $-\delta_1<x-x_0<0$ 及 $0<x-x_0<\delta_2$ 时,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

因此　$f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$.　证毕.

B 9. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理,并加以证明.

解　$x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性定理为:如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,那么存在常数 $M>0$ 和 $N>0$,使得当 $|x|>N$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理证明:取 $\varepsilon=1$,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则 $\exists N>0$,当 $|x|>N$ 时,有

$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1$,

记 $M=|A|+1$，定理就得到证明.

习题 1-4

▲ 1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

答　两个无穷小的商不一定是无穷小. 例如当 $x\to 0$ 时，x^2，$3x^2$，x^3 都是无穷小，但

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{x^2}{3x^2}$ 不是无穷小；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^3}=\infty$，$\dfrac{x^2}{x^3}$ 也不是无穷小.

▲ 2. 根据定义证明：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为当 $x\to 3$ 时的无穷小；

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小.

证明　(1) $\forall\varepsilon>0$，由

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<\varepsilon,$$

可知只须取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，便有

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon,\text{即有}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}=0,$$

所以 $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 当 $x\to 3$ 时为无穷小.

(2) $\forall\varepsilon>0$，由

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\varepsilon,$$

可知只须取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，便总有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,\text{即有}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

所以 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时为无穷小.

▲ 3. 根据定义证明：函数 $y=\dfrac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件，能使 $|y|>10^4$？

证明　$\forall M>0$，要使 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|=\left|\dfrac{1}{x}+2\right|>M$，只须

$$\left|\frac{1}{x}\right|>M+2,\text{即}|x|<\frac{1}{M+2},$$

取 $\delta=\dfrac{1}{M+2}$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，便总有

$$\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|>\left|\frac{1}{x}\right|-2>M,$$

所以当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1+2x}{x}$ 是无穷大.

由上面证明可知，当 $0<|x|<\dfrac{1}{10\,002}$ 时，$|y|>10^4$.

▲ 4. 求下列极限并说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}$.

解　(1) $\dfrac{2x+1}{x}=2+\dfrac{1}{x}$，而 $\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷小，由定理 1 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2.$$

(2) $x\neq 1$ 时，$\dfrac{1-x^2}{1-x}=1+x$，而 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，由定理 1 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}=1.$$

▲ 5. 根据函数极限或无穷大的定义，填写下表（题例在同一表中）：

解

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时即有 $f(x)>M$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0+0$	$\forall\varepsilon>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0<x-x_0<\delta$ 时即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0<x-x_0<\delta$ 时即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0<x-x_0<\delta$ 时即有 $f(x)>M$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0<x-x_0<\delta$ 时即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0-0$	$\forall\varepsilon>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时即有 $f(x)>M$	$\forall M>0$　$\exists\delta>0$ 使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时即有 $f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0$　$\exists X>0$ 使当 $\|x\|>X$ 时即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $\|x\|>X$ 时即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $\|x\|>X$ 时即有 $f(x)>M$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $\|x\|>X$ 时即有 $f(x)<-M$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0$　$\exists X>0$ 使当 $x>X$ 时即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $x>X$ 时即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $x>X$ 时即有 $f(x)>M$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $x>X$ 时即有 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0$　$\exists X>0$ 使当 $x<-X$ 时即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $x<-X$ 时即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $x<-X$ 时即有 $f(x)>M$	$\forall M>0$　$\exists X>0$ 使当 $x<-X$ 时即有 $f(x)<-M$

▲ 6. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

解　$y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界. 事实上，$\forall M>0$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内总能找到 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

使得

$$|2k\pi\cos(2k\pi)|=|2k\pi|>M,$$

这只须 $|k|>\dfrac{M}{2\pi}(k\in\mathbf{Z})$ 即可.

但 $y=x\cos x$ 当 $x\to+\infty$ 时不是无穷大.如取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n\in\mathbf{N})$,当 $n\to\infty$ 时,$x_n\to\infty$,有

$$y(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

这说明当 $x\to+\infty$ 时 $x\cos x$ 不是无穷大.

B 7. 证明:函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1]$上无界,但这函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

证明 $\forall M>0$,取 $x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,$(k\in\mathbf{N})$

$$y(x_k)=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

要 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$,只须 $k>\dfrac{1}{2\pi}\left(M-\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1]$上无界.

又若取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}(n\in\mathbf{N})$,当 $n\to\infty$ 时,$x_n\to0^+$,而

$$y(x_n)=n\pi\sin(n\pi)=0,$$

这说明当 $x\to0^+$ 时函数不是无穷大.

习题 1-5

A 1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4+5}{2-3}=-9.$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}.$

(5) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2hx+h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=2-0+0=2.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{0}{1}=0.$

(9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\dfrac{2}{3}.$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=(1+0)(2-0)=2.$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}$

$=2.$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1+(n-1)]\cdot(n-1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}.$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=\dfrac{1}{5}.$

(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}$

$=-1.$

A 2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=0$,

所以$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{0}{2}=0$,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$.

A 3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 (1) 因为当 $x\to0$ 时,x^2 是无穷小量,而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$,$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界变量,所以 $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量,故$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 因为当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量,而$|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,$\arctan x$ 为有界变量,故$\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x$ 是无穷小,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

B 4. 证明本节定理 3 中的(2).

证明 因为 $\lim f(x)=A$,所以 $f(x)=A+\alpha$ ($\lim\alpha=0$),

同理　因为 $\lim g(x)=B$，所以 $g(x)=B+\beta$　($\lim\beta=0$)，

故　$f(x)\cdot g(x)=(A+\alpha)(B+\alpha)$
$=AB+A\beta+B\alpha+\alpha\beta=AB+\gamma$，

其中 $\gamma=A\beta+B\alpha+\alpha\beta$ 仍为无穷小，所以

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x).$$

习题 1-6

A 1. 计算下列极限：

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{\omega x}\cdot\omega=\omega\cdot1=\omega$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{\cos3x}=1\cdot\dfrac{3}{1}=3$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{\sin5x}\cdot\dfrac{2}{5}=1\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x=1\cdot1=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=2$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{x}{2^n}\Big/\dfrac{x}{2^n}\right)\cdot x=x\cdot1=x$.

A 2. 计算下列极限：

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1-x)^{\frac{1}{-x}}]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=\mathrm{e}^2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=\mathrm{e}^2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-k}=\mathrm{e}^{-k}$.

(k 为正整数)

B 3. 根据函数极限的定义，证明极限存在的准则 Ⅰ′.

证明　仅就 $x\to x_0$ 的情形证明之，$x\to\infty$ 及其他情形的证明类似.

$\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，于是 $\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，总有

$|g(x)-A|<\varepsilon$，从而 $A-\varepsilon<g(x)$；　(1)

又 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，对于上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，总有

$|h(x)-A|<\varepsilon$，从而 $h(x)<A+\varepsilon$.　(2)

再由题设，当 $x\in\mathring{U}(x_0,r)$ 时，总有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\qquad(3)$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,r\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，(1)、(2)、(3) 同时成立，即有

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

所以 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，即 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

B 4. 利用极限存在准则证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$；

(3) 数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 的极限存在；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

证明　(1) 因为 $1<\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}<1+\dfrac{1}{n}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$.

(2) 因为 $n\cdot\dfrac{n}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant n\cdot\dfrac{n}{n^2+\pi}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\pi}{n}}=1$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{n}{n^2+\pi}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\pi}{n^2}}=1$，

由夹逼准则有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

(3) 用单调有界数列必有极限来证明该极限存在. 此数列的通项为 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$　($n=2,3,\cdots$)，$x_1=\sqrt{2}$. 先证单调性. 由

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重根号}}$$

$>\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+0}}}=x_{n-1}$

($n=2,3,\cdots$)，知数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 下证它有上界. 用数学归纳法来证.

当 $n=1$ 时，$x_1=\sqrt{2}<2$. 设 $x_n<2$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2,$$

故对一切自然数 n，都有 $x_n<2$，故数列 $\{x_n\}$ 收敛，即其极限存在.

(4) 当 $x>0$ 时，

$$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x,$$

而　$\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[n]{1+x}=1$；　(1)

又当 $x<0$ 时，

$$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1,$$

而　$\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt[n]{1+x}=1$，　(2)

由(1)、(2) 知 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$.

(5) 因为当 $x>0$ 时，$\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}<\left[\dfrac{1}{x}\right]+1$，故有

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x},$$

从而 $\quad x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant x\cdot\frac{1}{x}.$

因为

$$\lim_{x\to0^+}x\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to0^+}(1-x)=1;$$

$$\lim_{x\to0^+}x\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1,$$

所以由夹逼准则有

$$\lim_{x\to0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

习题 1－7

A 1. 当 $x\to0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^2}{2-x}=0$，所以 x^2-x^3 是比 $2x-x^2$ 高阶的无穷小.

A 2. 当 $x\to1$ 时，无穷小 $1-x$ 和(1) $1-x^3$，(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶？是否等价？

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)=3$；

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}(1+x)=1,$$

所以(1) $1-x$ 和 $1-x^3$ 是同阶无穷小，但不等价；

(2) $1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是等价无穷小.

A 3. 证明：当 $x\to0$ 时，有：

(1) $\arctan x\sim x$； (2) $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

证明 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}\xlongequal{y=\arctan x}\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\tan y}$

$$=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=1,$$

所以 $\arctan x\sim x(x\to0$ 时$)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x^2}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot2\cos x}=1,$$

所以 $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}(x\to0$ 时$)$.

A 4. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-m}$

$$=\begin{cases}1, & \text{当 } n=m \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n>m \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } n<m \text{ 时}.\end{cases}$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{1}{6}x^3}=-3.$$

B 5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

(1) $\alpha\sim\alpha$(自反性)；

(2) 若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$(对称性)；

(3) 若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$(传递性).

证明 (1) 因为 $\lim\frac{\alpha}{\alpha}=1$，所以 $\alpha\sim\alpha$.

(2) 因为 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{1}{1}=1$，所以 $\beta\sim\alpha$.

(3) 因为 $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\left(\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)=1\cdot1=1$，

所以 $\alpha\sim\gamma$.

习题 1－8

A 1. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant2,\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

解 (1) 在分段点 $x=1$ 处

$$f(1^-)=\lim_{x\to1^-}x^2=1=f(1);$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1=f(1),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续. 其图形见图 1－4.

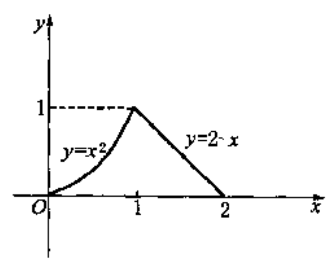

图 1－4

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,1)$，$(1,+\infty)$ 内连续.

在 $x=1$ 处，$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1=f(1)$，$f(1+0)=$

$\lim\limits_{x\to1^+} 1 = 1 = f(1)$,

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续.

在 $x=-1$ 处, $f(-1-0)=1$, $f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1^+} x=-1$,

$$f(-1-0)\neq f(-1+0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 间断, $x=-1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 其图形见图1-5.

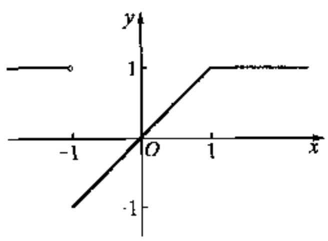

图 1-5

A 2. 下列函数在指出的点处间断,说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点,则补充或改变函数的定义使它连续.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x=1$, $x=2$;

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$, $x=k\pi$, $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$, $x=0$;

(4) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$;

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x-2}=\infty,$$

所以 $x=1$ 是第一类间断点中的可去间断点,令 $y(1)=-2$,则 $y(x)$ 在点 $x=1$ 处连续;而 $x=2$ 是 $y(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$; $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$ $(k\neq0)$;

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0,$$

所以, $x=0$ 和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 是 $y(x)$ 的第一类中的可去间断点,分别补充定义 $y(0)=1$ 与 $y\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,则 $y(x)$ 在这些点处连续;而 $x=k\pi(k\neq0)$ 是 $y(x)$ 的第二类中的无穷间断点.

(3) 当 $x\to0$ 时, $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$ 的值在0与1之间来回变动, $\lim\limits_{x\to0}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 不存在,所以 $x=0$ 是 $y(x)$ 的第二类间断点的振荡间断点.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to1^-}y(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$,

$$\lim_{x\to1^+}y(x)=\lim_{x\to1^+}(3-x)=2\neq\lim_{x\to1^-}y(x),$$

所以 $x=1$ 是 $y(x)$ 的第一类间断点的跳跃间断点.

B 3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,判别其类型.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x, & 当\ |x|>1,\\ 0, & 当\ |x|=1,\\ x, & 当\ |x|<1.\end{cases}$

在分段点 $x=-1$ 处,因为

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x)=1,$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,$$
$$\lim_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim_{x\to-1^+}f(x),$$

所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类中的跳跃间断点.

在分段点 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1,$$

所以 $x=1$ 也为第一类中的跳跃间断点.

B 4. 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq0$,则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$,当 $x\in U(x_0)$ 时, $f(x)\neq0$.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\neq0$,不妨设 $f(x_0)>0$ ($f(x_0)<0$ 可同样证明),由极限的局部保号性定理知,存在某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$,当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时, $f(x)>0$ 即 $f(x)\neq0$.

又 $f(x_0)\neq0$,故去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 可替换为邻域 $U(x_0)$,得证.

B 5. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

(1) $x=0,\pm1,\pm2,\pm\dfrac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\dfrac{1}{n},\cdots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点,且它们都是无穷间断点;

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续,但 $|f(x)|$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(3) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义,但仅在一点连续.

答 (1) $f(x)=\cot(\pi x)+\cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{Q}^C.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ -x, & x\in\mathbf{Q}^C.\end{cases}$

习题 1-9

A 1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间,并求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

解 因为 $f(x)$ 在 $x_1=-3$, $x_2=2$ 处无意义,故间断,所以连续区间为 $(-\infty,-3)$, $(-3,2)$, $(2,+\infty)$. 而

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x+3)(x^2-1)}{(x+3)(x-2)},$$

故 $$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x-2}=-\frac{8}{5};$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}=\infty.$$

C 2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，证明函数 $\varphi(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$，$\psi(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$ 在点 x_0 也连续.

证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\};$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}.$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点连续，故 $f(x)+g(x)$，$|f(x)-g(x)|$ 及 $|f(x)+g(x)|$ 在 x_0 点处都连续，从而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 x_0 处也连续.

A 3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{5}.$

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)=\ln 1=0.$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

(5) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x-4-x}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=2.$$

(6) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}.$$

$$=\cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$$

(7) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

A 4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0.$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(4) $$\lim_{x\to 0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}\right]^3$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}\right]^3=e^3.$$

(5) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}$$

$$=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{3}}\right\}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{2}\cdot\frac{x-1}{x+6}}=e^{-\frac{3}{2}}.$$

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+\tan x)-(1+\sin x)]\cdot(x\sqrt{1+\sin^2x}+x)}{[x^2(1+\sin^2x)-x^2]\cdot(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\tan x-\sin x)(\sqrt{1+\sin^2x}+1)}{x^2\sin^2x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)(\sqrt{1+0}+1)}{x\sin^2x(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2x}=\frac{1}{2}.$$

B 5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

应当怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

解 由初等函数的连续性知 e^x 在 $(-\infty,0)$ 连续，$a+x$ 在 $(0,+\infty)$ 连续. 对于 $f(x)$ 的分段点 $x=0$，由

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^x=e^0=1;$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

可知要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须且只须

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\text{，即 }a=1.$$

故当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

习题 1－10

A 1. 证明方程 $x^2-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 令 $f(x)=x^5-3x-1$，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，又

$$f(1)=-3<0,\ f(2)=25>0.$$

由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使 $f(\xi)=0$，ξ 即为方程在 1 和 2 之间的根.

A 2. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有

一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证明　令 $f(x)=x-a\sin x-b$, $f(x)$ 在 $[0, a+b]$ 上连续. 又 $f(0)=-b<0$, $f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$.

若 $f(a+b)=0$，则 $a+b$ 就是题设方程的一个正根，结论成立；

若 $f(a+b)>0$，则由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0, a+b)$，使得 $f(\xi)=0$，ξ 即是不超过 $a+b$ 的一个正根.

B 3. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a, b]$ 上的任意两点 x、y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.

证明　首先证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

在 $[a, b]$ 上任取一点 x_0. 对于 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，由 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$ 得

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|<L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

又由题设 $f(a)\cdot f(b)<0$，由零点定理知，至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.

B 4. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 (x_1, x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，又 $[x_1, x_n]\subset[a, b]$，所以 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续. 设 $M=\max\limits_{x_1\leqslant x\leqslant x_n}\{f(x)\}$，$m=\min\limits_{x_1\leqslant x\leqslant x_n}\{f(x)\}$，则有

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M,$$

由介值定理推论知，存在 $\xi\in[x_1, x_n]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

C 5. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

证明　令 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，由极限定义知，对于给定的 $\varepsilon>0$，$\exists X>0$，只要 $|x|>X$，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon，即 A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

又由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，从而在 $[-X, X]$ 连续，根据有界性定理，$\exists M_1>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M_1,$$

取 $M=\max(M_1, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|)$，则有

$$|f(x)|\leqslant M,\ \forall x\in(-\infty, +\infty),$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

C 6.* 在什么条件下，(a, b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续？

答　若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在(为有限值)，则补充定义

$$f(a)=\lim_{x\to a^+}f(x),\ f(b)=\lim_{x\to b^-}f(x),$$

于是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，由一致连续性定理，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续，从而也在 (a, b) 内一致连续. 即当 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 都存在时，$f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

总 习 题 一

A 1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的______条件. 数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的______条件.

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的______条件. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的______条件.

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的______条件. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的______条件.

(4) $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的______条件.

答　(1) 必要；充分.　(2) 必要；充分.
(3) 必要；充分.　(4) 充分必要.

A 2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有(　　).

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小；

(B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小；

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小；

(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

答　由课本第九节例 7 知道，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\ln 2+\ln 3=\ln 6,$$

故知 $f(x)$ 是与 x 同阶但非等价的无穷小，因此选(B).

A 3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(e^x)$；　(2) $f(\ln x)$；

(3) $f(\arctan x)$；　(4) $f(\cos x)$.

解　(1) 由 $e^x\in[0, 1]$，知 $x\in(-\infty, 0]$.

(2) 由 $\ln x\in[0, 1]$，知 $x\in[1, e]$.

(3) 由 $\arctan x\in[0, 1]$，知 $x\in[0, \tan 1]$.

(4) 由 $\cos x\in[0, 1]$，知 $x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，$(k\in\mathbf{Z})$.

B 4. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$

求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=0$，$g(x)=0$，所以

(1) $f[f(x)]=f(0)=0$；

(2) $g[g(x)]=g(0)=0$；

(3) $f[g(x)]=f(0)=0$；

(4) $g[f(x)]=g(0)=0$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=x$，$g(x)=-x^2$，所以

(1) $f[f(x)]=f(x)=x$；

(2) $g[g(x)]=g(-x^2)=0$；

(3) $f[g(x)]=f(-x^2)=0$；

(4) $g[f(x)]=g(x)=-x^2$.

综合上述有

$f[f(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$，即 $f[f(x)]=f(x)$.

$g[f(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$，即 $g[f(x)]=g(x)$.

$g[g(x)]=0$. $f[g(x)]=0$.

A 5. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形：

(1) $y=|\sin x|$；

(2) $y=\sin|x|$；

(3) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

解 (1) $y=|\sin x|$ 的图形是将 $\sin x<0$ 的部分作关于 x 轴的对称图形而其余部分不变所得图形(见图 1-6).

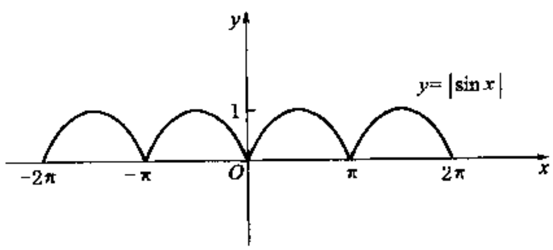

图 1-6

(2) $y=\sin|x|$ 的图形关于 y 轴对称，当 $x<0$ 时，$y=\sin|x|$ 的图形与 $y=\sin x$ 的图形相同(见图 1-7).

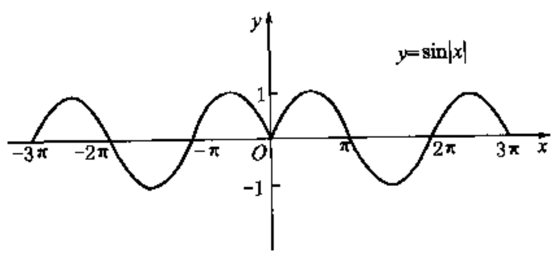

图 1-7

(3) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$ 的振幅为 2，周期为 4π，初相为 0(如图 1-8).

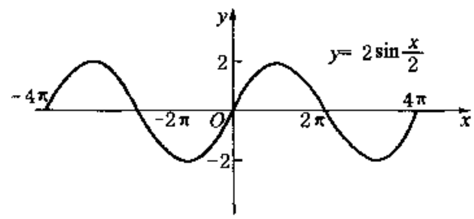

图 1-8

A 6. 把半径为 R 的一圆形铁皮，自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

解 如图 1-9，设所围圆锥的底圆半径为 r，高为 h，由题意有

$$R(2\pi-\alpha)=2\pi r,$$

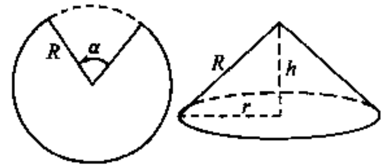

图 1-9

所以 $r=\dfrac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi}$，

$$h=\sqrt{R^2-r^2}$$

$$=\sqrt{R^2-\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R,$$

从而所围圆锥的体积 V 为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}\cdot\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\cdot\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\quad(0<\alpha<2\pi).$$

A 7. 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-5|<\varepsilon$，即要

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|=\left|\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right|$$

$$=|x-3|<\varepsilon,$$

于是，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon.$$

故 $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5.$$

A 8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$ 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$