高等数学习题解答

原书缺页

解：把[0, 5]分成n个等长小区间$[(i-1)\frac{5}{n}, i\frac{5}{n}]$

且取$\xi_i=\frac{i5}{n}$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

所求距离S近似为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} g\frac{5i}{n}\cdot\frac{5}{n}=g\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=25g\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\therefore\ S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{25g}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{25}{2}g.$$

6.4. 把质量为m的物体从地球表面升高到高度为h的位置，需作功多少？用定积分表示之。[地球吸引物体的力按以下的规律来确定：$f=mg\frac{R^2}{r^2}$，其中m表物体的质量，R表地球的半径，r表地球中心至物体的距离]。

解：物体由地面升高到高度h，则r是由R增加到$R+h$。

在$[R,\ R+h]$中取分点

$$r_0=R<r_1<r_2<\cdots<r_{n-1}<r_n=R+h,$$

则　$\triangle r_i=r_i-r_{i-1}$，$\because$　$r_{i-1}<\sqrt{r_{i-1}r_i}<r_i$，

$\therefore$ 取 $\xi_i=\sqrt{r_{i-1}r_i}$，

所求功A的近似值$A_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle r_i=\sum_{i=1}^{n} mg\frac{R^2}{\xi_i^2}\triangle r_i$，

$$\lim_{\|\triangle r\|\to 0} A_n=\lim_{\|\triangle r\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} mg\frac{R^2}{\xi_i^2}\triangle r_i=\int_R^{R+h} mg\frac{R^2}{r^2}dr$$

$$-(r_i-r_{i-1})=mgR^2\sum_{i=1}^{n}\Big(\ 1$$

$$=mgR^2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_n}\right),$$

$$\therefore A=\lim_{n\to\infty} A_n=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right).$$

16.5. 放射性物体的分解速度 v 是时间 t 的函数 $v=v(t)$，i
表示放射性物体由时间 T_0 到 T_1 所分解的质量 m，

(a) 用积分和式表示其近似值；

(b) 用积分表示其准确值。

解：在 $[T_0, T_1]$ 中取分点

$$t_0=T_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=T_1.$$

设 $\triangle t_i=t_i-t_{i-1}$，在 $[t_{i-1}, t_i]$ 中任取 ξ_i，

则 $m\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\triangle t_i$.

$$\therefore \quad m=\lim_{\|\triangle t\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\triangle t_i=\int_{T_0}^{T_1}v(t)\,dt.$$

16.6. 直接应用定积分定义计算下列积分：

(a) $\int_a^b x\,dx \quad (a<b)$； (b)* $\int_0^1 e^x dx$；

(c)* $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

解：a) 把 $[a, b]$ 分成 n 个等长小区间

$$\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}, a+\frac{i(b-a)}{n}\right],$$

且取 $\xi_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$，则 $\int_a^b x\,dx$ 对应的

$$\sum^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{}$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\sum i\right]$$

$$=(b-a)\left[a+\frac{b-a}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right].$$

$$\int_a^b x\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b-a)\left[a+\frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=(b-a)\left[a+\frac{b-a}{2}\right]=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

) 把[0，1]分成n个等长小区间$\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$，

且取$\xi_i=\frac{i}{n}$，则$\int_0^1 e^x dx$对应的积分和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i$$

$$=\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}\left[1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}e^{\frac{1}{n}}(1-e)$$，设 $e^{\frac{1}{n}}-1=\alpha>0$，

$$\frac{1}{n}=\ln(1+\alpha),$$

$$\int_0^1 e^x dx=\lim S_n=\lim$$

设分点为 $a=1$，aq，aq^2，…，$aq^n=2$，

即 $q=\sqrt[n]{2}>1$，小区间 $\left[aq^{i-1}, aq^i\right]$ 长 aq^i-aq^{i-1}

$=aq^{i-1}(q-1)$。

且取 $\xi_i=aq^i$，则 $\int_1^2\frac{dx}{x}$ 对应的积分和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{aq^i}aq^{i-1}(q-1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q-1}{q}=n\cdot\frac{q-1}{q}$$

$$=n\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}}.$$

设 $2^{\frac{1}{n}}-1=\alpha$，则 $2^{\frac{1}{n}}=1+\alpha$，$\frac{1}{n}\ln 2=\ln(1+\alpha)$。

$$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\ln 2}{\ln(1+\alpha)}=\ln 2\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$=\ln 2$。

定 积 分 的 性 质

解：a) 把 ⌊a，

它们的值）下列积分哪一个较大：

解：$\because$ $1\leqslant x$， 两边乘 $x^2\geqslant 0$， $\therefore$ $x^2\leqslant x^3$.

$\therefore$ $\int_1^2 x^2dx\leqslant\int_1^2 x^3dx$.

(c) $\int_1^2 \ln x dx$还是$\int_1^2(\ln x)^2dx$?

解：$\because$ $1\leqslant x\leqslant 2<e$， $\therefore$ $0\leqslant \ln x<1$

$\ln x<1$，两边乘 $\ln x\geqslant 0$，

$\therefore$ $(\ln x)^2\leqslant \ln x$,

$\therefore$ $\int_1^2(\ln x)^2dx\leqslant\int_1^2 \ln x dx$.

(d) $\int_3^4 \ln x dx$还是$\int_3^4(\ln x)^2dx$?

解：$\because$ $e<3\leqslant x$， $\therefore$ $1<\ln x$,

两边乘 $\ln x>1>0$,

$\therefore$ $\ln x<(\ln x)^2$,

$\therefore$ $\int_3^4 \ln x\, dx\leqslant\int_3^4(\ln x)^2dx$.

.8. 估计下列各积分的值：

(a) $\int_1^4(x^2+1)dx$

解：$\because$ $1\leqslant x\leqslant 4$， $1\leqslant x^2\leqslant 16$,

$\therefore$ $2\leqslant x^2+1\leqslant 17$,

$\therefore$ $2(4-1)\leqslant\int_1^4(x^2+1)dx\leqslant 17(4-1)$,

$\therefore$ $6\leqslant\int_1^4(x^2+1)dx\leqslant 51$.

(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)dx$.

解：$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$， $0\leqslant\sin^2 x\leqslant 1$，

$\therefore \quad 1 \leqslant 1+\sin^2 x \leqslant 2$

$$\therefore \quad 1\cdot\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx \leqslant 2\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right),$$

即 $$\pi \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx \leqslant 2\pi.$$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,$

解：$\because$ $\mathrm{arctg}\,x$ 是 x 的单调增加函 数，

若 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$，则 $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \mathrm{arctg}\,x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$，

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \leqslant x\,\mathrm{arctg}\,x \leqslant \frac{\pi}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$$

$$\leqslant \pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

即 $$\frac{\pi}{9} \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx \leqslant \frac{2}{3}\pi.$$

(d) $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2-x}dx.$

解：先求 $\varphi(x)=e^{x^2-x}$ 在 $[0,2]$ 上的最大值，最小

$$\varphi'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)=0, \quad x=\frac{1}{2},$$

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}}, \quad \varphi(2)=e^2,$$

$\therefore \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$ 时， $e^{-\frac{1}{4}} \leqslant e^{x^2-x} \leqslant e^2,$

$\therefore\quad e^{-\frac{1}{4}}(2-0)\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant e^2(2-0)$,

即 $\quad 2e^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2$.

16. 9. 试计算函数 $y=2x^2+3x+3$ 在区间〔1, 4〕上的平均值。

解：$\overline{I}=\frac{1}{4-1}\int_1^4(2x^2+3x+3)dx$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_1^4$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(64-1)+\frac{3}{2}(16-1)+3(4-1)\right]$

$=\frac{1}{3}\left(42+\frac{45}{2}+9\right)=24.5$.

16.10. 试计算函数 $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ 在区间〔1,8〕上的平均值。

解：$\overline{I}=\frac{1}{8-1}\int_1^8\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\frac{1}{7}\cdot 2\left[3\sqrt[3]{x}\right]_1^8$

$=\frac{2}{7}\cdot 3(2-1)=\frac{6}{7}$.

上限（或上限）为变量的定积分

16. 11. 试求函数 $y=\int_0^x\sin x dx$，当 $x=0$，

$x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 时的导数。

解：$\because\quad y'=\sin x$.

$\therefore\quad y'(0)=0$，$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

16．12．试求函数 $y=\int_0^{z^2}\frac{dx}{(1+x^3)}$ 对 Z 的二阶导数当 $Z=1$ 时的值。

解：$y=\int_0^{u}\frac{dx}{(1+x^3)}$，　$u=z^2$，

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dz}=\frac{1}{1+u^3}2z=\frac{2z}{1+z^6}.$$

$$\therefore\quad y''=\frac{2(1+z^6)-2z\cdot 6z^5}{(1+z^6)^2}=\frac{2-10z^6}{(1+z^6)^2}.$$

故　$y''(1)=\frac{2-10}{(1+1)^2}=\frac{-8}{2^2}=-2.$

16．13．下限为变量上限为常量的定积分，对其下限的导函数为何？求函数 $y=\int_x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$ 对 x 的导数。

解：$\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'_x=\left(-\int_b^x f(t)\,dt\right)'_x=-f(x)$，

$$\therefore\quad y'_x=\left(\int_x^5\sqrt{1+x^2}\,dx\right)'_x=-\sqrt{1+x^2}.$$

16．14．求由参数表示式 $x=\int_0^t\sin t\,dt$，$y=\int_0^t\cos t\,dt$ 所给定的函数 y 对 x 的导函数。

解　$y'_x=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{\sin t}=\operatorname{ctg} t.$

16．15．试求由 $\int_0^y e^t\,dt+\int_0^x\cos t\,dt=0$ 所决定的隐函数对于 x 的导数 y'。

解：等式两边对 x 求导，　$e^y y'_x+\cos x=0$，

$$\therefore\quad y'_x=\frac{-\cos x}{e^y}$$

$\because$　函数即 $e^y-1+\sin x=0$，　$\therefore$　$y'_x=\frac{-\cos x}{1-\sin x}.$

$e^y-1+\sin x=0$?

16．16．当 x 为何值时函数 $I(x)=\int_0^x xe^{-x^2}dx$ 有极值？

解：$I'(x)=xe^{-x^2}$，驻点为 $x=0$。

x		0	
$I'(x)$	$-$		$+$
$I(x)$	↘		↗

∴ $I(0)=0$ 为极小值。

16．17．物体运动的速度与时间的平方成正比。设从时间 $t=0$ 开始 3 秒钟后，物体经过 18 厘米。试求距离 S 和时间 t 的函数关系。

解：∵ $v(t)=kt^2$，

∴ $S(t)=\int_0^t kT^2dT=\left[k\cdot\frac{T^3}{3}\right]_0^t=\frac{k}{3}t^3$。

又 $t=3$ 时，$S(3)=18$。

∴ $18=\frac{k}{3}\cdot 3^3$，　　∴ $k=2$。

因此 $S(t)=\frac{2}{3}t^3$。

18．一质点作直线运动，已知其速度 $v=2t+4$（厘米/秒）。试求在前 10 秒钟内质点所经过的路程。

解：∵ $v(t)=2t+4$。

$$\therefore\ S(t)=\int_0^t v(T)dT=\int_0^t(2T+4)dT$$

$$=\left[T^2+4T\right]_0^t=t^2+4t。$$

因此 $S(10)=100+4\times10=140$ (cm)

16．19．一曲边梯形是由抛物线 $y=x^2$，横轴和变动的但始终平行于纵轴的直线所围成的。试求曲边梯形面积的增量 $\triangle s$ 及微分 ds 当 $x=10$ 且 $\triangle k=0.1$ 时的

位。并求用微分代替增量所发生的绝对误差与相对误差。

解：$S(x)=\int_0^x x^2dx=\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^x=\frac{x^3}{3}$。

$dS=S'(x)\triangle x=x^2\triangle x$。

$x=10$，$\triangle x=0.1$ 时，

$$\triangle S=S(10.1)-S(10)=\frac{10.1^3-10^3}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(1030.301-1000)=10.100\dot{3}.$$

$dS=100\times0.1=10$。

$$\left|\triangle S(x)-dS(x)\right|=10.100\dot{3}-10=0.100\dot{3}.$$

$$\left|\frac{\triangle S(x)-dS(x)}{dS(x)}\right|=\frac{0.100\dot{3}}{10}=0.0100\dot{3}.$$

计算定积分（应用牛顿——莱布尼兹公式）

在题 16.20—16.38 中，计算下列定积分：

16．20．$\int_1^3 x^3dx$。

解：$I=\left(\frac{x^4}{4}\right)_1^3=\frac{1}{4}(3^4-1^4)=20$

16．21．$\int_0^a(3x^2-x+1)dx$。

解：$I=\left(x^3-\frac{x^2}{2}+x\right)_0^a=a^3-\frac{a^2}{2}+a$

$$=a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right).$$

16．22．$\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$。

解：$I=\left[\frac{x^3}{3}+\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3\times 8}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=2\frac{5}{8}$.

16.23. $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$.

解：$I=\int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right]_1^2$

$=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2+1=4\frac{5}{6}$.

16.24. $\int_1^4\sqrt{x}\,dx$.

解：$I=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

16.25. $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$.

解：$I=\int_4^9(\sqrt{x}+x)dx=\left[\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3+\frac{x^2}{2}\right]_4^9$

$=\frac{2}{3}\cdot 27+\frac{81}{2}-\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{16}{2}=45\frac{1}{6}$.

16.26. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.

解：$I=\left[\operatorname{arctg}x\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

16.72. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解：$I=\left[\arcsin x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$.

16.28. $\int_a^{a\sqrt{3}}\frac{dx}{a^2+x^2}$.

解：$I=\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]_a^{a\sqrt{3}}=\frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1\right)$

$=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12a}$.

16.29. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

解：$I=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$.

16.30. $\int_a^b(x-a)(x-b)dx$.

解：$I=\int_a^b(x^2-ax-bx+ab)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a+b}{2}x^2+abx\right]_a^b$

$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{a+b}{2}(b^2-a^2)+ab(b-a)$

$=\frac{1}{6}(b-a)[(2b^2+2ab+2a^2)$

$-3(a+b)^2+6ab]$

$=\frac{1}{6}(b-a)(-b^2+2ab-a^2)$

$=\frac{1}{6}(a-b)(a^2-2ab+b^2)=\frac{1}{6}(a-b)^3$.

16.31. $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$.

解：$I=\int_{-1}^0\left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=\left[x^3+\operatorname{arctg}x\right]_{-1}^0$

$$= 0 + \operatorname{arctg} 0 - (-1)^3 - \operatorname{arctg}(-1)$$

$$= 1 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

16.32. $\int_0^a \left(\frac{bc}{2a^2}x^2 - \frac{bc}{a}x + \frac{bc}{2}\right)dx.$

解：$I = \left[\frac{bc}{6a^2}x^3 - \frac{bc}{2a}x^2 + \frac{bc}{2}x\right]_0^a$

$$= \frac{abc}{6} - \frac{abc}{2} + \frac{abc}{2} = \frac{abc}{6}.$$

16.33. $\int_0^2 (4-2x)(4-x^2)dx.$

解：$I = \int_0^2 (16 - 8x - 4x^2 + 2x^3)dx$

$$= \left[16x - 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{2}\right]_0^2$$

$$= 32 - 16 - \frac{32}{3} + \frac{16}{2} = 13\frac{1}{3}.$$

16.34. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2\theta d\theta.$

解：$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1)d\theta = \left[\operatorname{tg}\theta - \theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$= \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 + 0 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

16.35. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3\theta d\theta.$

解：$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1)\operatorname{tg}\theta d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\theta d(\operatorname{tg}\theta) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\theta d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta+\ln\left|\cos\theta\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\ln\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 0-\ln\cos 0$$

$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

16.36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi$.

解：$I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d(\cos\varphi)=\left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=-\frac{\cos^4\frac{\pi}{2}}{4}+\frac{\cos^4 0}{4}=\frac{1}{4}.$$

16.37. $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta$.

解：$I=\int_0^{\pi}d\theta+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)$

$$=\left[\theta+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi+\cos\pi-\frac{\cos^3\pi}{3}-\left(0+\cos 0-\frac{\cos^3 0}{3}\right)$$

$$=\pi-\frac{4}{3}.$$

16.38. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du$.

解：$\because\int\cos^2 u du=\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin 2u+C$,

$$\therefore\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

16.39. 设k为正整数，证明 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx=0$与$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx=0$。

证：
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx=\left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{k}[\sin k\pi-\sin k(-\pi)]=0。$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx=\left[\frac{-1}{k}\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{-1}{k}[\cos k\pi-\cos k(-\pi)]$$
$$=-\frac{1}{k}(\cos k\pi-\cos k\pi)=0。$$

16.40. 设k，l为正整数，且$k\neq l$，证明

(a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx dx=0$；

(b) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx dx=0$；

(c) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx dx=0$。

证：利用16.39题的结论。

(a)左边$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left\{-\sin(k-l)x+\sin(k+l)x\right\}dx$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}-\sin(k-l)x dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k+l)x dx=0。$$

(b)左边$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(k-l)x+\cos(k+l)x]dx$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-l)x dx$$