高等数学习题集题解

（一）

一 九 八 五 年 三 月

第一章　函数及图形

预　备　知　识

1.1　对照写出等价的不等式与区间：

(1)	$\|x\|<3$	1°	$4<x<6$
(2)	$\|x-1\|<3$	2°	$-3<x<3$
(3)	$\|3-2x\|<1$	3°	$x>3$ 或 $x<-1$
(4)	$\|1+2x\|\leqslant 1$	4°	$x>2$
(5)	$\|x-1\|>2$	5°	$-2<x<4$
(6)	$\|x+2\|\geqslant 5$	6°	$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$
(7)	$\|5-x^{-1}\|<1$	7°	$1<x<2$
(8)	$\|x-5\|<\|x+1\|$	8°	$x\leqslant -7$ 或 $x\geqslant 3$
(9)	$\|x^2-2\|\leqslant 1$	9°	$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$
(10)	$x<x^2-12<4x$	10°	$-1\leqslant x\leqslant 0$

解　(1)　$|x|<3 \Longleftrightarrow -3<x<3$，即 (1)$\Longleftrightarrow$2°

(2)　$|x-1|<3 \Longleftrightarrow -2<x<4$，即 (2)$\Longleftrightarrow$5°

(3)　$|3-2x|<1 \Longleftrightarrow 1<x<2$，即 (3)$\Longleftrightarrow$7°

(4)　$|1+2x|\leqslant 1 \Longleftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 0$，即 (3)$\Longleftrightarrow$7°

(5)　$|x-1|>2 \Longleftrightarrow x>3$ 或 $x<-1$，即 (5)$\Longleftrightarrow$3

(6)　$|x+2|\geqslant \Longleftrightarrow x\leqslant -7$ 或 $x\geqslant 3$，即(6)$\Longleftrightarrow$8°

(7)　$|5-x^{-1}|<1 \Longleftrightarrow 4<x^{-1}<6 \Longleftrightarrow \frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$，

即 (7)$\Longleftrightarrow$9

(8)　$|x-5|<|x+1| \Longleftrightarrow (x-5)^2<(x+1)^2$

$\Longleftrightarrow x^2-10x+25<x^2+2x+1 \Longleftrightarrow x>2$，

即 (8)$\Longleftrightarrow$4°

（9） $|x^2-2|\leqslant 1 \Longleftrightarrow -1\leqslant x^2-2\leqslant 1$

由 $x^2-2\leqslant 1$ 得 $x^2\leqslant 3$，$|x|\leqslant\sqrt{3}$。$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$。又由$x^2-2\geqslant -1$得$x^2\geqslant 1$，$|x|\geqslant 1$，$x\geqslant 1$或$x\leqslant -1$。

$\therefore -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$或$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$，即(9)$\Longleftrightarrow$6°

(10) $x<x^2-12<4x$，由 $x^2-12<4x$得$-2<x<6$，由$x^2-12>x$得$x<-3$或$x>4$。于是$x<x^2-12<4x\Longleftrightarrow 4<x<6$。即(10)$\Longleftrightarrow$1°。

1.2 试讨论下述命题的真伪，并申明理由

（1） $x<5$就是$|x|<5$

（2） $|x-5|<2$就是$3<x<7$

（3） $|1+3x|\leqslant 1$ 即 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$

（4） 不存在实数x，使得$|x-1|=|x-2|$

解 （1） 伪命题。因为$|x|<5\Longleftrightarrow -5<x<5$。

（2） 真命题。因为$|x-5|<2\Longleftrightarrow -2<x-5<2$
$\Longleftrightarrow 3<x<7$

（3） 伪命题。因为$|1+3x|\leqslant 1\Longleftrightarrow -1\leqslant 1+3x\leqslant 1\Longleftrightarrow -2\leqslant 3x\leqslant 0\Longleftrightarrow -\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0$

（4） 伪命题。设$|x-1|=|x-2|$，则$(x-1)^2=(x-2)^2$解之易知$x=\dfrac{3}{2}$可使$|x-1|=|x-2|$

1.4　证明下列各式：

（1）$|-x|=|x|$　　（2）$|x-y|=|y-x|$

（3）$|x|=\sqrt{x^2}$　　（4）$|x/y|=|x|/|y|\quad(y\neq 0)$

（5）$|x+y|\leqslant|x|+|y|$

（6）$|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|\leqslant\big|x-y\big|\leqslant|x|+|y|$

（7）已知a，b，m为正数，且$a<b$，则

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$$

（8）若$a>0$，$b>0$，则

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

（9）$x>0$，则

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$$

当且仅当$x=1$时，等式成立。

（10）$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

证（1）当$x\geqslant 0$时，左端$=|-x|=x=|x|=$右端，当$x<0$时，左端$=|-x|=-x=|x|=$右端，所以$|-x|=|x|$。

（2）利用(1)的结果，$|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|$。

（3）$$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

于是推得　$|x|=\sqrt{x^2}$

（4）当$y\neq 0$时，有$|x|=\left|\frac{x}{y}\cdot y\right|=\left|\frac{x}{y}\right|\cdot|y|$，于是有

$|x/y|=|x|/|y|$。

（5）因为$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$，$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$，所以$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|$，故$|x+y|\leqslant|x|+|y|$。

（6） 因为对任意的实数 a，有 $a \leqslant |a|$，所以 $|x| - |y| \leqslant \big||x| - |y|\big|$；$\because |x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|$. 从而有 $|x| - |y| \leqslant |x-y|$，同理可得 $|y| - |x| \leqslant |x-y|$，

$\therefore \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$；而由（5）即知 $|x-y| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|$。

（7） $\because \quad \dfrac{a+m}{b+m} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{(b-a)m}{b(b+m)}$，由 $a, b, m > 0$，$a < b$，即得 $\dfrac{a+m}{b+m} - \dfrac{a}{b} > 0 \quad \therefore \quad \dfrac{a+m}{b+m} > \dfrac{a}{b}$.

（8） $\because \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$，$\therefore a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. 所以

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

（9） 利用（8）的结论，有

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}, \qquad \therefore \quad x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

若等号成立，即有 $x + \dfrac{1}{x} = 2$ 此时得 $x = 1$；而当 $x = 1$ 时，有 $1 + 1/1 = 2$，等式成立。故当且仅当 $x = 1$ 时等式成立。

（10） 用数学归纳法证明。

当 $n = 2$ 时，$|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$，不等式成立。

假设当 $n = K$ 时有 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_k| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots |x_k|$，则当 $n = K+1$ 时，$|x_1 + x_2 + \cdots x_k + x_{k+1}| = |(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1}| \leqslant |x_1 + x_2 + \cdots + x_k| + |x_{k+1}| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}|$.

不等式成立。

1.5 解不等式

（1） $-2 < \dfrac{1}{x+2} < 2$ （2） $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| > \dfrac{x-2}{x+1}$

（3） $|x - A| < \varepsilon$（$\varepsilon > 0$ 为常数）

（4）$\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$

解　(1) $-2<\dfrac{1}{x+2}<2 \Longleftrightarrow \left|\dfrac{1}{x-2}\right|<2$，

即　$|x+2|>\dfrac{1}{2}$ 从而得 $x>-\dfrac{3}{2}$ 或 $x<-\dfrac{5}{2}$.

(2) 1°. 当 $\dfrac{x-2}{x+1}\geqslant 0$ 时，不等式无解。2°。当 $\dfrac{x-2}{x+1}<0$ 时，不

不等式成为 $\dfrac{x-2}{x+1}<-\dfrac{x-2}{x+1}$，即 $\dfrac{x-2}{x+1}<0$ 则有

$$\begin{cases} x-2<0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-2>0 \\ x+1<0 \end{cases}$$

由第一不等式组得 $-1<x<2$；第二不等式组无解．故原不等式的解为 $-1<x<2$．

（3）$|x-A|<\varepsilon$，$\therefore\ -\varepsilon<x-A<\varepsilon$，从而得解 $A-\varepsilon<x<A+\varepsilon$．

（4）原不等式等价于下面两个不等式组

$$1^\circ \begin{cases} (x+1)(x+2)>0 \\ 3x-1>0 \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} (x+1)(x-2)<0 \\ 3x-1<0 \end{cases}$$

1° 的解为 $x>2$；2° 的解为 $-1<x<\dfrac{1}{3}$，故原不等式的解为

$-1<x<\dfrac{1}{3}$ 或 $x>2$．

1.6　解高次不等式：

（1）$|x^2-3x+2|\geqslant x^2-3x+2$　　（2）$x^2-7x+12>0$

（3）$|x(1-x)|\leqslant 0.5$　　（4）$-2x^2+4x-7>0$

（5）$x^3+x^2-30x<0$

解　(1)因为对任意实数 a 恒有 $|a|\geqslant a$，故对任意的实数 x，恒有 $|x^2-3x+2|\geqslant x^2-3x+2$ 成立，故解为 $-\infty<x<+\infty$．

（2）$x^2-7x+12>0 \Longleftrightarrow (x-3)(x-4)>0$，其解为 $x<3$

或 $x>4$。

（3） $|x(1-x)|\leqslant\frac{1}{2}$等价于下面两个不等式组

$$1°\ \begin{cases} x(1-x)\geqslant 0 \\ x(1-x)\leqslant\frac{1}{2} \end{cases}\qquad 2°\ \begin{cases} x(1-x)<0 \\ x(x-1)\leqslant\frac{1}{2} \end{cases}$$

1°的解为$0\leqslant x\leqslant 1$，2°的解为$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x<0$，或$1<x\leqslant\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

（4） $y=-2x^2+4x-7>0$是开口向下的抛物线，$-2x^2+4x-7=0$ 的判别式为负。故该抛物线与 x 轴不相交，$-2x^2+4x-7$恒为负，所以不等式无解。

（5） $x^3+x^2-30x<0\Longleftrightarrow x(x^2+x-30)<0$， 此不等式等价于下面两个不等式组

$$1°\ \begin{cases} x>0 \\ x^2+x-30<0 \end{cases}\qquad 2°\ \begin{cases} x<0 \\ x^2+x-30>0 \end{cases}$$

1°的解为 $0<x<5$，2°的解为 $x<-6$，故不等式的解为 $x<-6$ 或 $0<x<5$。

1.7 解不等式组：

$$（1）\begin{cases} x-2(x-3)>4 \\ \frac{x}{2}-(x-3)>\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$（2）\begin{cases} x+5\leqslant(x+1)(x+2) \\ x(x+1)+x(x+2)>(2x-1)(x+3) \end{cases}$$

解 （1） 化简不等式组得

$$\begin{cases} x<2 \\ x<\frac{11}{2} \end{cases}$$

故不等式组的解为 $x<2$。

（2） 化简不等式组得

$$\begin{cases} x^2+2x-3\geqslant 0 \\ x<\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

不等式组的解为 $x\leqslant -3$ 或 $1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$。

求 函 数 值

1.8 已知函数 $f(x)=x+1$ 求：$f(2)$，$f(-2)$，$-f(2)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$1/f(2)$，$f(a+b)$。

解 $f(2)=3$；$f(-2)=-1$；$-f(2)=-3$；$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$；$1/f(2)=\frac{1}{3}$；$f(a+b)=a+b+1$。

1.9 设 $\varphi(t)=|t-3|+|t-1|$ 求：$\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(-1)$，$\varphi(-2)$。

解 $\varphi(0)=4$；$\varphi(1)=2$；$\varphi(-1)=6$；$\varphi(-2)=8$。

1.10 求 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，设

（1） $f(x)=ax+b$ （2） $f(x)=x^2+4x+1$

（3） $f(x)=\dfrac{1}{x}$

解 (1) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=a$$

(2) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2+4(x+h)+1-(x^2+4x+1)}{h}$$

$$=2x+h+4$$

(3) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{-1}{x(x+h)}$$

1.11 已知 $G(u)=3$ 求 $G(0)$，$G(u+\Delta u)-G(u)$

解 $G(0)=3$；$G(u+\Delta u)-G(u)=3-3=0$

1.12　设$\Psi(x)=e^x-1$，求$\Psi(0)$，$\Psi(\varepsilon)$，$\Psi(lu2)$.

解　$\Psi(0)=0$,

$\Psi(\varepsilon)=e^{\varepsilon}-1$,

$\Psi(\ln 2)=e^{\ln 2}-1=1$.

1.13　设 $f(x)=\lg x^2$，求$f(10^3)$，$f(-0.001)$.

解　$f(10^3)=\lg 10^6=6$,

$f(-0.001)=\ln 10^{-6}=-6$.

1.14　设　$\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$. 求　$\varphi(-x)$，$\varphi(x)+1$. $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$\varphi(x)$.

解　$\varphi(-x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,

$$\varphi(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$1/\varphi(x)=\frac{1+x}{1-x}.$$

1.15　设 $f(t)=\begin{cases}\sin t & -2<t<0\\ 1+t^2 & 0\leqslant t<2\end{cases}$

求 $f(1)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f(4)$.

解　$f(1)=1+1=2$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=1+\frac{\pi^2}{4}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为 $t=4$ 在 $f(t)$ 的定义域之外，故 $f(4)$ 不存在.

1.16若 $G(x)=\begin{cases} |x| & |x|<1 \\ 0 & |x|\geqslant 1 \end{cases}$

求 $G(-1)$，$G\left(\frac{1}{2}\right)$，$G(5)$，$G\left(-\frac{1}{4}\right)$.

解 $G(-1)=0$，

$G\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，

$G(5)=0$，　　$G\left(-\frac{1}{4}\right)=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$.

1.17 设
$$y=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

（该函数称为符号函数，记为 sgn$x$)，求 $y(0)$，$y(2)$，$y(100)$.

解 $y(0)=0$，$y(-2)=-1$，$y(100)=1$

1.18 已知(1) $f(x)=ax(a\neq 0)$，(2) $f(x)=\frac{1}{x}$

(3) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1+x}$，且 $f(x)+f(y)=f(z)$，求 z.

解 (1) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y)=f(z)=az$

$\therefore\ z=x+y$

(2) $f(x)+f(y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$，$f(z)=\frac{1}{z}$，因为

$f(x)+f(y)=f(z)\Longrightarrow z=\frac{xy}{x+y}$

(3) $f(x)+f(y)=\ln\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$

于是 $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\frac{1+z}{1-z}\Longrightarrow z=\frac{x+y}{1+xy}$

1.19 设 $f(u)=\lg u$，求证：

(1) $f(u)+f(u+1)=f[u(u+1)]$

(2) $f(x)-f(y)=f(x/y)$

证　（1）$f(u)+f(u+1)$

$$=\lg u+\lg(u+1)=f[u(u+1)]$$

（2）　$f(x)-f(y)=\lg x-\lg y=$

$$\lg\left(\frac{x}{y}\right)=f(x/y)$$

1.20 设$\varphi(x)=e^{x}$，求证：

$$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(x+y)$$

$$\varphi(x)/\varphi(y)=\varphi(x-y)$$

证明　$\varphi(x)\varphi(y)=e^{x}\cdot e^{y}=e^{x+y}=\varphi(x+y)$

$$\varphi(x)/\varphi(y)=e^{x}/e^{y}=e^{x-y}=\varphi(x-y)$$

1.2　设$f(t)=t^{2}-2\cos t$，求证：$f(-a)=f(a)$

证　$f(-a)=(-a)^{2}-2\cos(-a)$

$$=a^{2}-2\cos a=f(a)$$

1.22　设　$f(x)=2x-\sin x$，求证：$f(-t)=-f(t)$

证　$f(-t)=-2t-\sin(-t)=-(2t-\sin t)=-f(t)$。

1.23　设　$f(x)=\frac{1}{2}(a^{x}+a^{-x})$　$(a>0)$，求证

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

证明　$2f(x)f(y)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(a^{x}+a^{-x})(a^{y}+a^{-y})$

$$=\frac{1}{2}\left(a^{x+y}+a^{-(x+y)}\right)+\frac{1}{2}\left(a^{x-y}+a^{-(x-y)}\right)$$

$$=f(x+y)+f(x-y)$$

1.24　设　$f(x)=ax+b$且有$f(0)=-2$，$f(3)=5$，求$f(2)$。

解　$f(0)=b=-2$

$$f(3)=3a+b=5$$

于是 $a=\frac{7}{3}$，$b=-2$，$f(2)=\frac{7}{3}\cdot2-2=\frac{8}{3}$.

1.25　设　$f(x)=ax^{2}+bx+c$，且$f(-2)=0$，$f(0)=1$，

$$f(1)=5,\text{ 求 } f(-1),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$$

解 $f(-2)=4a-2b+c=0$

$f(0)=c=1$

$f(1)=a+b+c=5$

解此方程组，得 $a=\frac{7}{6}$，$b=\frac{17}{6}$，$c=1$，故

$$f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1,$$

$\therefore f(-1)=-\frac{2}{3}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{65}{24}$

1.26 (1)设 $f(n)=\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$，求 $f(2)$，$f(5)$。

(2)若 $U_n=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，求U_4，U_8，U_{11}。

(3)若$y=\frac{n-2}{n^2+1}$，求$y(2)$，$y(5)$。

解 (1) $f(2)=\frac{1}{4}$，$f(5)=\frac{15}{32}$

(2) $U_4=\frac{2}{3}$，　　$U_8=\frac{2}{7}\sqrt{2}$

$U_{11}=-\frac{\sqrt{11}}{10}$

(3) $y(2)=0$，　$y(5)=\frac{3}{26}$

1.27 (1)已知数列1，-1，1，-1，……，试求$f(n)$的表达式；

(2) 已知数列 $\frac{1}{1.2}$，$\frac{1}{2.3}$，$\frac{1}{3.4}$，…，试求$f(n)$的表达式

解 (1) $f(n)=(-1)^{n+1}$。

(2) $f(n)=\frac{1}{n(n+1)}$。

1.28 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ $(0\leqslant x<1)$

(2) $y=\ln(1-x)(x\leqslant 0)$

(3) $\varphi(x)=5^x(-\infty<x<+\infty)$

(4) $y=\sqrt{x-x^2}$

(5) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+4}}$

解 (1) $f(x)$的值域为$[1, +\infty)$

(2) y的值域为$[0, +\infty)$

(3) $\varphi(x)$的值域为$(0, +\infty)$

(4) y的值域为$[0, \frac{1}{2}]$

(5) y的值域为$(0, +\infty)$

1.29 函数$f(x)$满足什么条件，以下各式才有意义

(1) $y=\sqrt[n]{f(x)}$ (n为正整数)

(2) $\varphi(x)=\log_a f(x)$ $(a>0)$

解 (1)当n为奇数时，$f(x)$可为任意实数；当n为偶数时，要求$f(x)\geqslant 0$。

(2) $f(x)>0$。

函数定义域

1.30 求下列各函数的定义域：

(1) $y=x^3-3x+2$

解 定义域为$(-\infty, +\infty)$。

(2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

解 因为对任何$x\in(-\infty, +\infty)$，有$x^2+1>0$，所以定义域为$(-\infty, +\infty)$。

(3) $F(u)=\frac{|u|}{u}$

解 定义域为$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$， （4） $g(t)=\dfrac{2t-1}{t^2-3t+2}$

解 当 $t^2-3t+2\neq 0$ 即 $t\neq 1$，$t\neq 2$ 时才有定义，故定义域为 $(-\infty, 1)$，$(1, 2)$，$(2, +\infty)$。

（5） $y=\sqrt{2+x-x^2}$

解 y的定义域是使$2+x-x^2\geq 0$的点，故定义域为$[-1, 2]$

（6） $\varphi(r)=\dfrac{r-1}{\sqrt{r^2-r-2}}$

解 当 $r^2-r-2>0$ 时，函数有意义。由此不等式即得定义域为$(-\infty, -1)$，$(2, +\infty)$。

（7） $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$

解 当$\sqrt{x-1}$，$\sqrt{1-x}$，$\sqrt{x^2+1}$同时有定义时，函数才有定义。这就要求满足不等式组

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \\ x^2+1\geq 0 \end{cases}$$

得解$x=1$。故定义域为$x=1$.

（8） $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

解 x 须满足 $1-x\neq 0$，$\dfrac{1}{1-x}>0$ 及$x+2\geq 0$。即 $x\neq 1$，$1-x>0$，$x\geq -2$ 所以得定义域$[-2, 1)$。

（9） $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

解 因为$\dfrac{1+x}{1-x}>0$，即要满足

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 1+x<0 \\ 1-x<0 \end{cases}$$

得定义域$(-1, 1)$。

（10） $\varphi(x)=\log_2\log_2 x$

解 函数要求 $x>0$ 且 $\log_2 x>0$ 即 $x>1$。故定义域为 $(1,+\infty)$

1.31 求下列函数的定义域：

（1） $F(y)=\dfrac{1}{\ln(y-1)}$

解 要求满足 $\ln(y-1)\neq0$ 即 $y-1\neq1$ 且 $y-1>0$ 所以有 $y>1$ 但 $y\neq2$。故定义域为 $(1,2)$，$(2,+\infty)$

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sin x\pi}$

解 由 $x+2\geqslant0$，$\sin x\pi\neq0$ 得 $x>-2$，$x\neq K$。这里 $K=0$，±1，$\pm2\cdots$。故定义域为 $(-2,-1)$，$(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$，…，$(k,k+1)$，…。

（3） $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

解 定义域为使 $\sin x-\cos x\neq0$ 的点。亦即 $\mathrm{tg}x\neq1$。

$\therefore$ $x\neq K\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$K=0$，$\pm1$，$\pm2$，…。$\therefore$ 其定义域为

$(k\pi+\dfrac{1}{4}\pi,\ (k+1)\pi+\dfrac{\pi}{4})$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$。

（4） $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$

解 由 $1+x\neq0$ 且 $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant1$，知 x 满足 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant1$。故 $f(x)$ 的定义域为 $[-\dfrac{1}{3},1]$。

（5） $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x\leqslant0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant2\end{cases}$

解 定义域为 $(-\infty,2]$。

（6） $f(x)=(2x)!$

解 定义域为 $x=\dfrac{n}{2}$，其中 $n=0$，1，2，…。

1.32 已知从高为 h 处落下的重物所经过的路径由公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 确定，问（1）此函数的定义域如何？(2) 解析表达式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域怎样？

解 （1） 由题意知 $t\geqslant 0$。当 $S=h$ 时，$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 故定义域为 $0\leqslant t\geqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$。

（2） 解析表达式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $-\infty<t<+\infty$。

1.33 平面圆的面积公式是 $A=\pi R^2$ 的其中 R 是圆的半径，问此函数的定义域是什么？解析表达式 $A=\pi R^2$ 的定义域呢？

解 面积公式 $A=\pi R^2$ 的定义域为 $0<R<+\infty$；解析表达式 $A=\pi R^2$ 的定义域为 $-\infty<R<+\infty$。

1.34 下列各对函数恒等吗？为什么？请指出什么范围内是恒等的？

（1） $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$

解 不恒等，因为定义域不同，前者的定义域是实数轴上 $x\neq 1$ 的所有点，当 $x\neq 1$ 时，

$$f(x)\equiv g(x).$$

(2) $f(x)=1$, $\qquad g(x)=\sin^2x+\cos^2x$

解 恒等，因为定义域、对应关系、值域都相同。

(3) $f(x)=x$, $\qquad g(x)=\sqrt{x^2}$

解 不恒等，因为 $g(x)\geqslant 0$。$f(x)$ 与 $g(x)$ 值域不相同，当 $0\leqslant x<+\infty$ 时，$f(x)\equiv g(x)$。

(4) $\varphi(t)=t$, $\qquad \phi(t)=(\sqrt{t})^2$

解 不恒等，因为定义域、值域都不相同。当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，$\varphi(t)\equiv\phi(t)$。

(5) $f(u)=\ln u^2$, $\qquad F(u)=2\ln u$

解 不恒等，因为定义域不同，前者的定义域为$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$，而后者为$(0, +\infty)$，当$u>0$时，$f(u)\equiv F(u)$。

(6) $w(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$，$Z(x)=\sqrt{x^2-1}$

解 不恒等，定义域前者为$[1, +\infty)$，后者为$(-\infty, -1]$在$[1, +\infty)$在$[1, +\infty]$内，$w(x)\equiv Z(x)$。

(7) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$，

$$g(x)=\arcsin x+\arccos x$$

解 不恒等，因为定义域不同，只考虑$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)\equiv g(x)$。

(8) $f(x)=x$，$g(x)=\sin(\arcsin x)$

解 不恒等，因为定义域不同，只考虑$-1\ x\leqslant 1$时，$f(x)\equiv g(x)$。

(9) $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，$g(x)=2\operatorname{arctg}x\ (0<x<+\infty)$

解 1° $f(x)$与$g(x)$的定义域相同。2° $f(x)$与$g(x)$的值都为$(0, \pi)$。3° 设$y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，则$\cos y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$．

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=\sqrt{x^2}=x$$

由于$0<y<\pi$，故$0<\dfrac{y}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\operatorname{arctg}x=\dfrac{y}{2}$，$y=2\operatorname{arctg}x$。这说明了$f(x)$与$g(x)$的对应关系相同。于是$f(x)\equiv g(x)$ $(0<x<+\infty)$

(10) $f(x)=\operatorname{arctg}x$，$g(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ $(0<x<+\infty)$

解 不恒等，因为对应关系不同。

1.35 试求一个解析表达式（不能用分段的形式）其定义域为

(1) $-2\leqslant x\leqslant 2$，(2) $0<|x|<2$，(3) $x\neq 2, 3, 4$。

解 (1) $y=\sqrt{4-x^2}$