# 测量方法的改进和测量误差的评定

## ——采用SN比的新统计方法——

函授教育

新的统計方法讲座

教材

日本规格协会

上海市第一机电工业局科技情报研究所

# 测量方法的改进和测量误差的评定

## ——采用SN比的新统计方法——

日本规格协会



上海市第一机电工业局科技情报研究所

# 作　者

（以姓氏字母顺序）

| | |
|---|---|
| 东京大学名誉教授 | 朝香鐵一 |
| 计量研究所第一研究部计测装置科 | 石田　一 |
| 计量础究所第一研究部计测装置科 | 小池昌義 |
| 青山学院大学工科教授 | 田口玄一 |
| 计量研究所第三研究部力学计测科科长 | 樋田並照 |
| 计量研究所第一研究部计测装置科科长 | 矢野　宏 |
| 明治大学工科教授 | 山本健太郎 |
| 青山学院大学理工科讲师 | 横田巽子 |

# 出版说明

为适应质量管理工作的需要，促进产品质量提高，必须吸取外国先进技术，最近我所收集了日本规格协会一九七九年六月出版的，日本著名学者、质量管理专家田口玄一博士和其他许多教授、专家合著的《测量方法的改进和测量误差的评定》一书。该书主要阐明采用SN比(信噪比)的新统计方法，是计测管理应用的专著。日本规格协会把它当作函授教育“新的统计方法讲座”的课本。其主要内容包括：测量误差的经济性；校正误差的计算；校正和误差；SN比的引进；SN比误差与测量误差；校正周期和SN误差；信号因素、水平的确定方法；SN比的比较；测量误差的求法；测量方法的实验设计等。现全文翻译出版，以供参考。

本书由方志翔、黄伟和同志翻译。

由于时间仓促和翻译出版工作人员的水平所限，工作中难免有错误和不妥之处，希广大读者批评指正。

另外，在本书的翻译审校过程中，发现原文有印刷错误。对此，我们在一九八一年四月田口玄一博士来华时，与其进行了商讨，并征得本人同意，作了修改，特此说明。

# 向读者推荐

东京大学名誉教授
东京理科大学工科教授　朝香鐵一

本书指明了对于计量管理、应用测量数据和分析报告、进而搜集分析这些结果作出结论来说，测量误差在经济上所带来的巨大影响，它具体地说明了这种影响在批量生产中是如何之大。从而揭示了对测量仪器进行合理的管理和校正等的必要性。

下面按每章的顺序介绍重点推荐的内容和希望读者注意的地方。

序言写得非常详细，考虑得很周到，它谈到了第一～十二章内容的大纲，很值得反复阅读和仔细领会，而且通过这样系统归纳，使读者对后述章节中的一些基本观点难于理解时，只要反复阅读这一部分，也就能够理解了。

例如，损失函数L的公式为

$$L(y)=k(y-m)^2$$

在上式中，若测量结果y偏离真值m为Δ时的损失为A，则A为

$$A=(m+\Delta)=k(m+\Delta-m)^2=K\Delta^2$$

则k就为

$$k=\frac{A}{\Delta^2}$$

进而，在批量生产时的损失L如下式所示

$$L=\Sigma L(y_i)=k\Sigma(y_i-m)^2nk\sigma^2$$

把k式代入，则

$$L=n\frac{A}{\Delta^2}\sigma^2=nA\frac{\sigma^2}{\Delta^2}=nA\left(\frac{\sigma}{\Delta}\right)^2$$

式中，σ若减少为原来的1/2、1/4…等时，则

$$L=n\frac{A}{4}\left(\frac{\sigma}{\Delta}\right)^2$$

$$L=n\frac{A}{16}\left(\frac{\sigma}{\Delta}\right)^2$$

上式说明了损失将减少多少，若进一步使

$$\sigma=\frac{1}{8}\Delta,\ \frac{1}{10}\Delta\ \cdots\cdots 等等时,$$

则L等于下列各值

$$L=nA\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{nA}{64}$$

$$L=nA\left(\frac{1}{10}\right)^2=\frac{nA}{100}$$

**它如实地说明了损失是怎样减少的，指出了计量管理的重要性。**

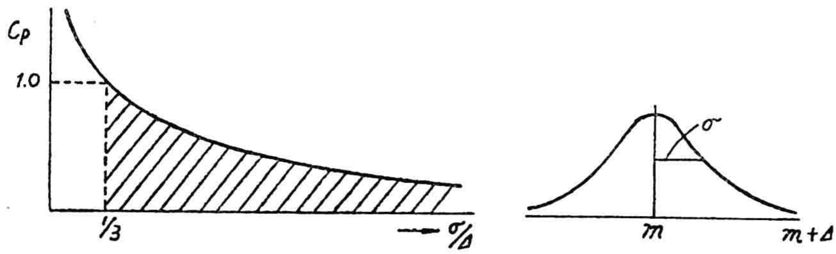
若再进一步把这种概念扩大到工序能力方面，则其定义为

$$C_p = \frac{2\Delta}{6\sigma} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\sigma} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sigma}{\Delta}\right)}$$

所以，其关系式为

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta}\right) C_p = \frac{1}{3}$$

明确了必须使$\frac{\sigma}{\Delta} \leqslant \frac{1}{3}$。




以上内容在序言中已作详细说明，所以在阅读第一章以后的正文时，就容易理解了。像这样在序言中详细叙述本书大纲的著作也是不多的，它为读者进一步阅读和研究指明了方向。

在**第一章**中介绍了假定在测量仪器的测量特性值M和刻度值y之间存在着下列关系式

$$y = \beta M$$

时采用一个、三个和五个标准量具校正测量仪器的方法和校正后误差的求法。

在**第二章**中介绍了假定在测量仪器的测量特性值M刻度值y之间存在着下列关系式

$$y = 2 + \beta M$$

时采用一个、三个和五个标准量具校正测量仪器的方法和校正后误差的求法。

在**第三章**中说明了校正和测量的关系。指出测量的目的就是根据测量结果采用校正式来估计真值，其校正方法共有六种。

在**第四章**中说明了存在M这一标准量具(信号因素)时的情况。介绍了对于M和相应的读数值y来说，如果采用比例式校正时，则

$$y = \beta M + e$$

因为

$$M = \frac{y}{\beta} - \frac{e}{\beta}, \qquad \hat{M} = \frac{y}{\beta}$$

所以

$$测量误差 = 测量值 - 真值$$

$$\hat{M} - M = \frac{e}{\beta}$$

这个 $e/\beta$ 称为 SN 比误差。那末

$$\frac{\Sigma(\hat{M}-M)^2}{n-1}=\frac{\Sigma e_i^2}{n-1}\times\frac{1}{\hat{\beta}^2}$$

然而校正后的误差为

$$V'_e=\frac{\hat{\sigma}_e^2}{\hat{\beta}^2}$$

于是它的倒数为

$$\eta=\frac{\hat{\beta}^2}{\hat{\sigma}^2}$$

我们把这个倒数称之为 SN 比，把 $\beta^2$ 作为信号，把 $\sigma^2$ 作为噪音。

然后通过七个实例，对 SN 的比计算进行了说明，读者可根据具体情况选用。

在**第五章**中，把 SN 比的倒数即进行了正确校正后的测量方法的误差方差 $Ve'$ 称为 SN 比误差。换言之，SN 比误差就是进行了理想校正之后所得到的测量方法的误差方差。在本章中阐述了 SN 误差和测量误差的关系。介绍了在日常校正中采用一个、三个及 K 个标准量具进行校正时测量误差的求法。

在**第六章**中探讨了在测量误差中，由于校正间隔而产生的误差的求法。为此阐述了采用一个和两个标准量具时校正周期的确定方法，並就校正周期和经济性举例进行了说明。

在**第七章**中详细介绍了信号因素(M)水平的确定方法。

当没有标准量具，但是当信号因素的水平为下式中任一值时，就能计算一次效应，对此举例进行了说明。

1）$|M_1-M_2|=h_1, |M_2-M_3|=h_1, \cdots\cdots, |M_{K-1}-M_K|=h_{K-1}$

$$h_1=h_2=\cdots\cdots=h_{K-1}=h$$

$$\frac{h_1}{h_2},\ \frac{h_2}{h_3},\ \cdots\cdots,\ \frac{h_{K-2}}{h_{K-1}}=r$$

2）$\dfrac{M_2}{M_1}=\dfrac{M_3}{M_2}=\cdots\cdots=\dfrac{M_K}{M_{K-1}}=C$

在**第八章**中介绍了信号因素(M)的水平间隔为下列值时水平的确定的方法。

$$\frac{M_2}{M_1}=\frac{M_3}{M_2}=C$$

在**第九章**中，对 SN 比给予了物理的意义，因为它是校正后误差方差的倒数，是评定测量仪器及测量方法尺度的特性值。因此，在本章中，用实例介绍了一个可控因素时 SN 比的比较方法，以具体数字说明了 SN 比较大时增加的收益。

接着，当可控因素的水平为$(i=3)$、信号因素的水平为$(K=10)$时，计算各个水平的 SN 比，确定置信区间，比较了 SN 比的大小，从而提供了物理上的评定方法。

在**第十章**中叙述了存在两个以上可控因素时的 SN 比的比较方法，以实例说明了提高 SN 比的可控因素、信号因素的选择方法。为此，用实例介绍了寻求 SN 比的最佳条件所进行的试验设计的方法，即采用多元排列进行因素搭配。根据水平的各个组合求出 SN 比，对可控因

素的每个水平分别整理SN比值，进行方差分析，寻求SN比的最佳条件的方法。这时，要计算每个可控因素的SN比，在计算上是需要作较大努力的。

在**第十一章**中，说明了当得到了足够稳定性的标准量具时，量具示值即误差的大小。然后，用实例说明了在校正时存在多大的校正误差。

在**第十二章**中，介绍了采用试验设计的方法来研制SN比较高的测量方法、研究稳定性较好的标准量具、确定标准量具的示值方法等，特别是介绍了四个因素时正交表的具体应用实例。

上面对序言和各章的梗概和要点作了说明，如果能引起读者一点兴趣，则感到荣幸。虽然有时在某些方面增加了一些解释，希望读者能充分理解SN比的含义，找到它的应用场合，有针对性地解决各位的实际问题，並能引起连锁反应，以便扩大应用。我极力向各位推荐：这是一部名著，一本有用的教科书，它指明了在学术上和在现场应用上能获得巨大成功的根本原因，希望读者认真一读。

1979年5月15日

# 目　　录

# 序言　测量误差的经济性

## 0.1 计量值及其误差

计量管理的目的是为了求得计量值，並根据此值采取某些措施。其目的是为了对未达到或超过目标值的部分进行补偿，是为了根据此值采取措施以便进入下一阶段。例如，做西装时测量胸围，是为了使制作的西装胸围的尺寸留有最恰当的余量。如果西装做得过小，那么，穿起来胸部就会觉得紧，有时简直不能穿。反之如果做得过大，穿在身上也会感到不舒服。因此，实际上存在着一个胸围紧宽程度适当的尺寸，这种合适尺寸是在每个人的胸围尺寸上再加上一个最恰当的余量来决定的。

另外，在制造功率正好为1马力的电动机时，如果制成的电动机功率只有0.8马力或1.2马力，那么往往会带来问题。过去也有些厂商宣传说，本厂生产的电动机标称功率虽只1马力，但实际上可达1.5马力等等。但是，假如大门开关用的电动机的功率最好是1马力，而现在达到了1.5马力。当功率为1马力时，人们不小心被门挟住也不至于被挟死，但功率达到1.5马力时，人被挟住后也可能被挟死。若标称功率为1马力的电动机，其真正的功率却是1.5马力，也许会使人丧命。

也就是说，产品上所标明的特性值，今后将越来越要求正确，並且国家越发达，标称值与实际值就越一致。像钟表一类的测量仪器，其指示的时刻与真正的时刻的差值称为测量误差。误差的大小就是质量。1马力的电动机，不论是新的还是旧的，在各种使用条件下，其标称值都要求是1马力。也就是说，与标称值之间的差值的大小是个重要的质量问题。如果质量设计恰当，那么标称值本身所表示的是品种，而不是质量。在这时，只有波动才是质量。那么，由波动所造成的经济损失有多大呢？首先让我们从如何衡量产品的波动在经济上所造成的损失的大小这个问题来进行研究。

## 0.2 特性值的波动及其损失

首先来讨论产品特性值的波动所造成的损失。假设农用塑料薄膜厚度的目标值为m。如图0.1所示，有两根损失曲线，制造厂的经济损失曲线C和消费者的损失曲线Q，这两根曲线的和即综合损失曲线为L，一般尺寸公差的中心值和目标值是由这个综合损失曲线L为最小时的点来决定的。

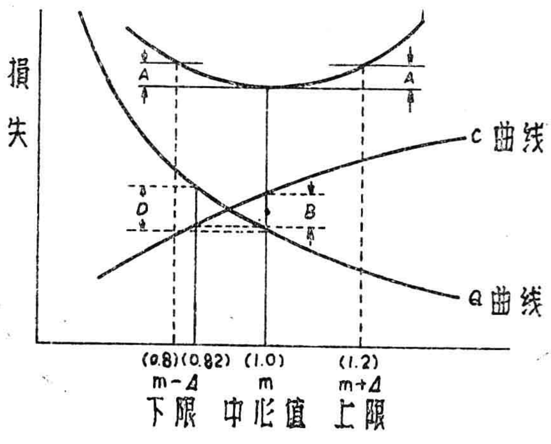



图0.1　目标值和公差的上、下限

几年以前，在农用塑料薄膜的厚度方面

曾出现过这样的问题。某种塑料薄膜的厚度公差规定为

$$1.0\pm0.2(\text{毫米}) \tag{0.1}$$

这时某制造厂通过质量管理，对其厚度的波动可以控制在±0.02毫米以内，所以将制造公差改为

$$0.82\pm0.02(\text{毫米}) \tag{0.2}$$

但立即发生了多起用户索赔事件。

关于塑料薄膜的厚度公差，如果其厚度的中心值增大，则材料费、加工费、运输费等的制造成本将随着成本曲线C而上升。另一方面，如果厚度的中心值减小，薄膜容易破损，农民必须换新的或进行修理。随着质量的下降，损失Q将增加。这个曲线就是Q曲线。"尺寸公差的中心值m，就是以这两根曲线之和即曲线L为最小时的点m来决定的。"因此，当m=1.0毫米时，如果厚度的平均值改为0.82毫米，那么如图0.1所示，制造厂的生产成本将降低B日元，但是，对消费者来说，将增加比B日元大得多的D日元的损失。为了降低生产成本而改变尺寸公差的中心值或目标值，这种行为可以说比小偷还坏。当小偷偷了1万日元时，被偷的人损失了1万日元，小偷得益1万日元，而社会的损失却是±0。如果改变了尺寸公差的中心值或目标值，自己可以得到1万日元的利润，但对消费者或后续工序，将带来比1万日元多得多，则是2万日元的损失。

塑料薄膜协会对塑料薄膜的厚度始终规定为1毫米。而把公差范围±0.2毫米，改成了对波动的允差，这种允差要求不论测量薄膜的哪个部位，波动都必须在此范围之内。

允差±Δ是由下述方法来决定的。

当特性值偏离中心值m时，损失就增加。並且当偏离m+Δ以上或m−Δ以下时，损失曲线L的值将增加，这时如果对次品进行处理，这对整个社会来讲是有利的。也就是说，当把次品报废、返修或降级处理造成的损失为A日元时，损失函数L(y)增加到A日元以上时的点，将成为尺寸公差的上限和下限值。

将损失函数L(y)围绕其中心值m作泰勒展开

$$\begin{aligned} L(y) &= L(m+y-m) \qquad (0.3)\\ &= L(m)+\frac{L'(m)}{1!}(y-m)+\frac{L''(m)}{2!}(y-m)^2+\cdots\cdots \end{aligned}$$

当y=m时，损失函数L(y)为最小，所以，这时其导数L′(m)=o。也就是说，特性值y偏离中心值m所带来的损失的主要项是$(y-m)^2$项。若去掉常数项，把比例常数作为k，则下式将予成立。

$$L(y)\doteqdot k(y-m)^2 \tag{0.4}$$

因为y从m偏离Δ时的损失与A日元相等，所以下列关系式将予成立。

$$k=\frac{A}{\Delta^2} \tag{0.5}$$

塑料薄膜制造厂把塑料薄膜当作次品时的损失为10,000日元时，比例常数k为

$$k=\frac{10000}{0.2^2}=250000(\text{日元/毫米}^2) \tag{0.6}$$

虽然当生产的产品只有一件时，式(0.4)也是成立的，但是在实际上，产品往往是生产两件以上。这时，把"$(y-m)^2$的平均值作为方差$\sigma^2$"(正确地说，应是平均的平方误差，因为

太长，所以称为方差)，损失函数L将用下式表示

$$L = k\sigma^2 \tag{0.7}$$

现在平均值为m，用公差(允差Δ的2倍的值称为公差)0.4毫米的1/6的标准离差来进行生产，这时每个产品由波动造成的损失L的值较大，将为下式所示

$$L = 250000 \times \left(\frac{0.4}{6}\right)^2 = 1111.1(\text{日元}) \tag{0.8}$$

假设分布是正态分布，次品率为0.27%计算，由次品所造成的损失只有27.0(日元)，如下式所示

$$10000\ \text{日元} \times 0.0027 = 27.0(\text{日元}) \tag{0.9}$$

产品虽然没有超差，但是勉强达到标准，这时它对社会的损失和刚刚超差的次品对社会的损失是差不多的。以学校为例，60分及格的学生和59分不及格的学生是没有多大差别的。

因此，把标准离差定为现在的一半，即为0.4/12毫米，损失L为

$$L = 250000 \times \left(\frac{0.4}{12}\right)^2 = 277.8(\text{日元}) \tag{0.10}$$

每个产品提高了产品质量，可得833.3日元，以每月生产5万件计算，一个月由于提高产品质量可获利4.166日元。

再举一个计算的例子。某零件的尺寸和公差值规定为m±10微米，超差时作废品处理，这时的损失A＝2000(日元)。那么，损失函数的比例常数k为

$$k = \frac{2000}{10^2} = 20\ (\text{日元/微米}^2) \tag{0.11}$$

由于波动而造成的损失的平均值L为

$$L = 20\sigma^2 \tag{0.12}$$

现在假定所制造的产品特性值的平均值为m，标准离差σ为公差(允差的2倍)20微米的1/6。那么，根据(0.12)式，每个产品的平均损失L为

$$L = 20\ \text{日元} \times \left(\frac{20}{6}\right)^2 = 222.2\ (\text{日元}) \tag{0.13}$$

这时，尽管次品率几乎接近于零(假设正态分布为0.27%)，但由于特性值的波动所造成的每个产品的损失仍为222.2日元。

因此，改进生产工序，把特性值的标准离差改为原来的一半时的损失L′为

$$L' = 20\ \text{日元} \times \left(\frac{20}{12}\right)^2 = 50.6\ \text{日元} \tag{0.14}$$

所以，把表示波动幅度的标准离差改为一半时，每个产品将得益166.6日元。这个值比(次品的损失)×(次品率)的值大得多。在求次品率时，对分布不作假设是求不出的。现假设一年内的产品尺寸的分布是属于正态分布，其平均值为m，标准离差σ为(20/6)微米。众所周知，因为超过3σ界限的次品率为0.27%，所以，次品的损失为

$$2000 \times 0.0027 = 5.4(\text{日元}) \tag{0.15}$$

但是，实际的损失为222.2日元，超过5.4日元的41倍。

到了发展中国家，经常有人提出这样的问题。“从先进国家的第一流企业中引进了技术，无论材料和零件都采用了符合外国企业提供的标准的合格品，对产品又进行了全数检查，剔

除了超差产品。但是，最终制成的产品在市场上销售后被使用时，还会出现问题，产生许多故障等等，这是为什么？"

对此，将作下列的回答："在先进国家中，对产品几乎没有进行全数检查的，大部分的特性值在公差中心值m周围的波动值都较小，其标准离差已小于1/8公差。即使进行了全数检查，剔除了超差的产品，但是这些产品是勉强符合标准的，仍将造成很大的损失。须进一步提高工序能力，请参见表0.1"。

也就是说，当产品的特性值虽然没有超差，若是勉强达到公差的上下限时，它给后道工序或市场带来的损失与次品所造成的损失A几乎相同。

因此，对制造部门来说，尽管没有出现次品，但不能说已可满足了。如果特性值是度量数据，则重要的是要努力使波动经常接近于零。图纸所规定的公差是一种检验标准，而决不是为了控制用的。当然，毫无疑问，如果控制的费用大而波动的减少所带来的收益小，那么这种控制是不足取的。采用比减少波动所得到的收益小得多的费用来达到减少波动的目的，这就是生产部门所肩负的任务。

## 0.3 工序能力和损失函数

现在用上节的例子来求各种平均值和标准离差时的损失函数L的值。其结果示于表0.1，表中注有*符号的情况是假定数据分布是正态分布而求出的值。把它画成图的话，如图0.2所示。表中其他情况，不管是什么分布都是成立的。实际上，分布的形式在质量管理上几乎是无意义的，只有方差的值是多大，这才是重要的。

表0.1 工序能力和损失函数

尺寸公差 $m \pm 10$（微米）

次品损失 $A = 2000$（日元）

损失函数 $L = 20\sigma^2$（日元）

| 情况 | 平均值 | 标准离差S | 筛选 | 方差（平均平方误差）$\sigma out^2$ | 损失L(日元) | 次品率p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | m | 20/6 | 未进行 | $(20/6)^2$ | 222 | 0.27* |
| 2 | m | 20/8 | 未进行 | $(20/8)^2$ | 125 | 0.01* |
| 3 | m | 20/16 | 未进行 | $(20/16)^2$ | 31 | 0.00* |
| 4 | m | $20/\sqrt{12}$ | 未进行 | $20^2/12$ | 667 | 0.00* |
| 5 | m | 20/6 | 进行 | $0.986^2\times(20/6)^2$* | 216* | 0.27* |
| 6 | m | 20/4 | 未进行 | $(20/4)^2$ | 500 | 4.55* |
| 7 | m | 20/4 | 进行 | $0.880^2\times(20/4)^2$* | 387* | 4.55* |
| 8 | m | 20/2 | 未进行 | $(20/2)^2$ | 2000 | 31.73* |
| 9 | m | 20/2 | 进行 | $0.539^2+(20/2)^2$* | 581* | 31.73* |
| 10 | m－5 | 20/8 | 未进行 | $5^2+(20/8)^2$ | 625 | 2.27* |
| 11 | m－5 | 20/16 | 未进行 | $5^2+(20/16)^2$ | 531 | 0.00* |
| 12 | m－10 | 0 | 未进行 | $10^2$ | 2000 | 0.00* |

注带*符号的是正态分布，其它可以是任意分布。

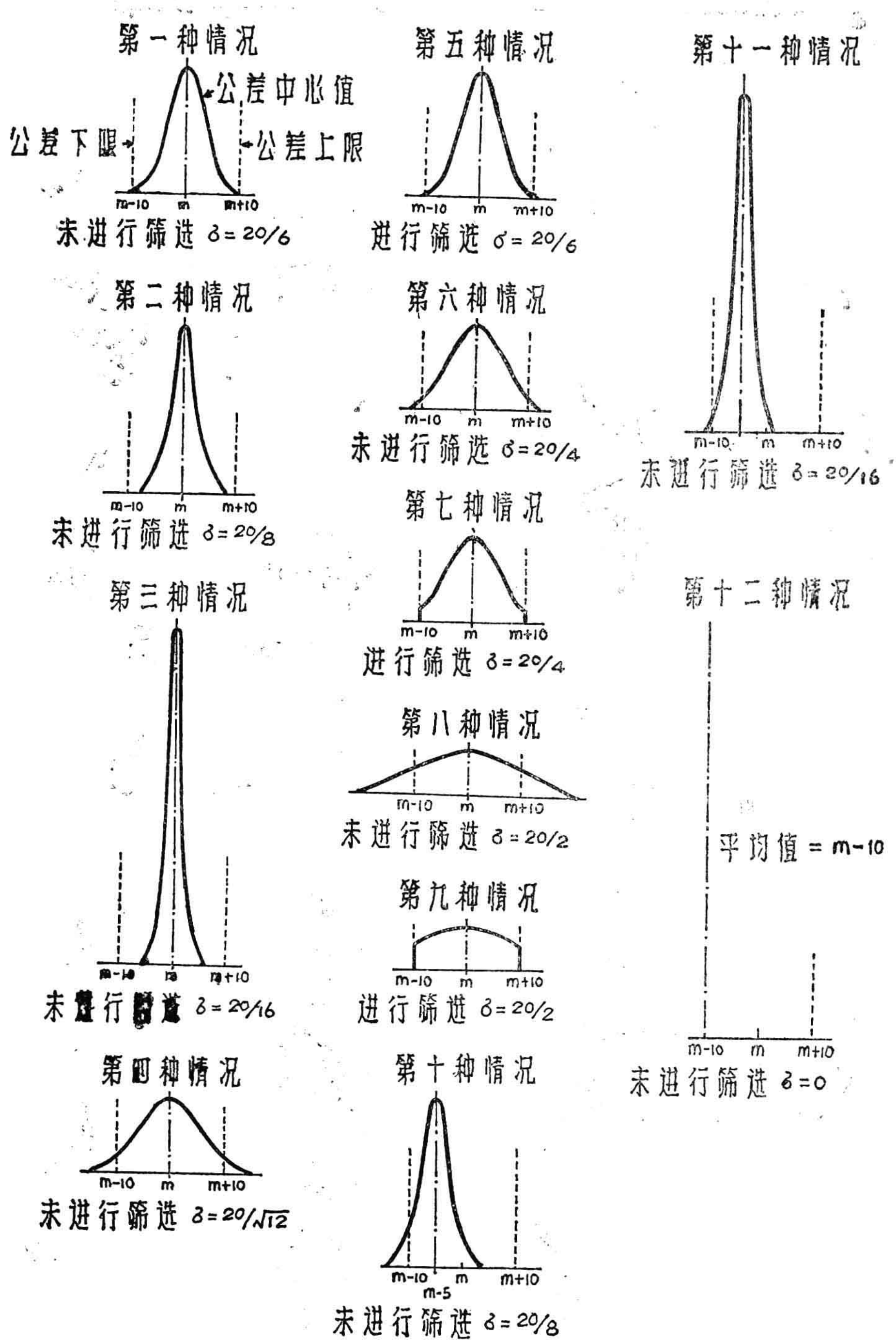



图 0.2 相对于表 0.1 中各种工序能力的分布图(假定为正态分布)

当工序的波动较大，对制造出来的产品进行了全数检查，剔除了次品，只让正品出厂时，其分布状态接近于图 0.2 中的第四种的均匀分布或第九种的分布。即使全部产品都在公差范围之内，这时每件产品由于波动所造成的损失为 667 日元和 581 日元。令人惊奇的是它所造

成的损失比第六种情况即次品率达到 4.55%，而不进行检查时所造成的损 失 500 日 元 还 要大。由此可知，当数值为计量值时，全数检查没有什么大作用，重要的是提高工序能力。

另外，如图 0.2 的第十一种情况所示，因为工序能力 $C_P$ 值达 8/3，如为了节约材料 等，将中心值向一边偏移 5 微米左右，这时，尽管所生产的产品全部为合格品，但 是 由 于 m 的的偏移所造成的每件产品的损失也达到了 531 日元，这种情况由于波动所造成的损失比次品率达到 4.55%但不经检查而出厂的第六种情况的损失大得多。这表明，重要的是不 但 需 要提高工序能力，而且要遵守尺寸公差的中心值。

在许多特性值中，由于工序能力的不足，仅对少数几个项目进行了全数检查，这对多数情况是不会有什么问题的。但是像发展中国家那样，对多数零件进行全数检查是不可能得到良好的最终产品的。因为当所有的特性值接近于公差的中心值时，可以保证产品在各种环境下，在相当长的时间内，满足功能的要求。

据说在某个企业中已经要求表示工序能力的标准离差 σ 至少要小于公差的 1/8。正确 地说，重要的是应该把为提高工序能力而增加的费用与减少波动而提高质量的收益进行比较，来探求最佳工序能力。这时最好进行表 0.1 那样的计算。

## 0.4 测量误差及其损失

测量误差所带来的损失与特性值误差所带来的损失是相同的。当测量值和真值一致时，将不存在测量误差，所以，这时测量误差所造成的损失为零。假定测量值为 y，真值为 m 时的损失函数为 L(y)，对测量误差(y－m)所造成的损失可进行下列泰勒展开。

$$L(y)=L(m+y-m)=L(m)+\frac{L'(m)}{1!}(y-m)+\frac{L''(m)}{2!}(y-m)^2+\cdots\cdots \qquad (0.16)$$

式中 L(m)和L′(m)均为零。因此，测量误差所造成的损失的主要项是第三项 的$(y-m)^2$。如果将$(y-m)^2$项的比例常数作为 k，损失函数 L(y)则可近似地表达为

$$L(y)=k(y-m)^2 \qquad (0.17)$$

比例常数 k 可根据图 0.3 求得。

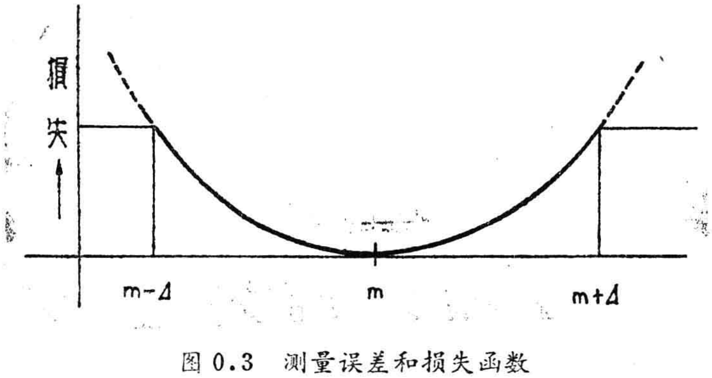



图 0.3 测量误差和损失函数

图中，Δ 是产品中心值的允差。当测量误差大于 Δ 时，误认为特性值的公差中心值大于(m＋Δ)或小于(m－Δ)，而把它当作次品处理，这时将产生 A 日元的损失。即当测量误差(y－m)的大小大于允差 Δ 时其损失为 A。将 A 代入(0.17)式中，则比例常数 k 可由下式求得