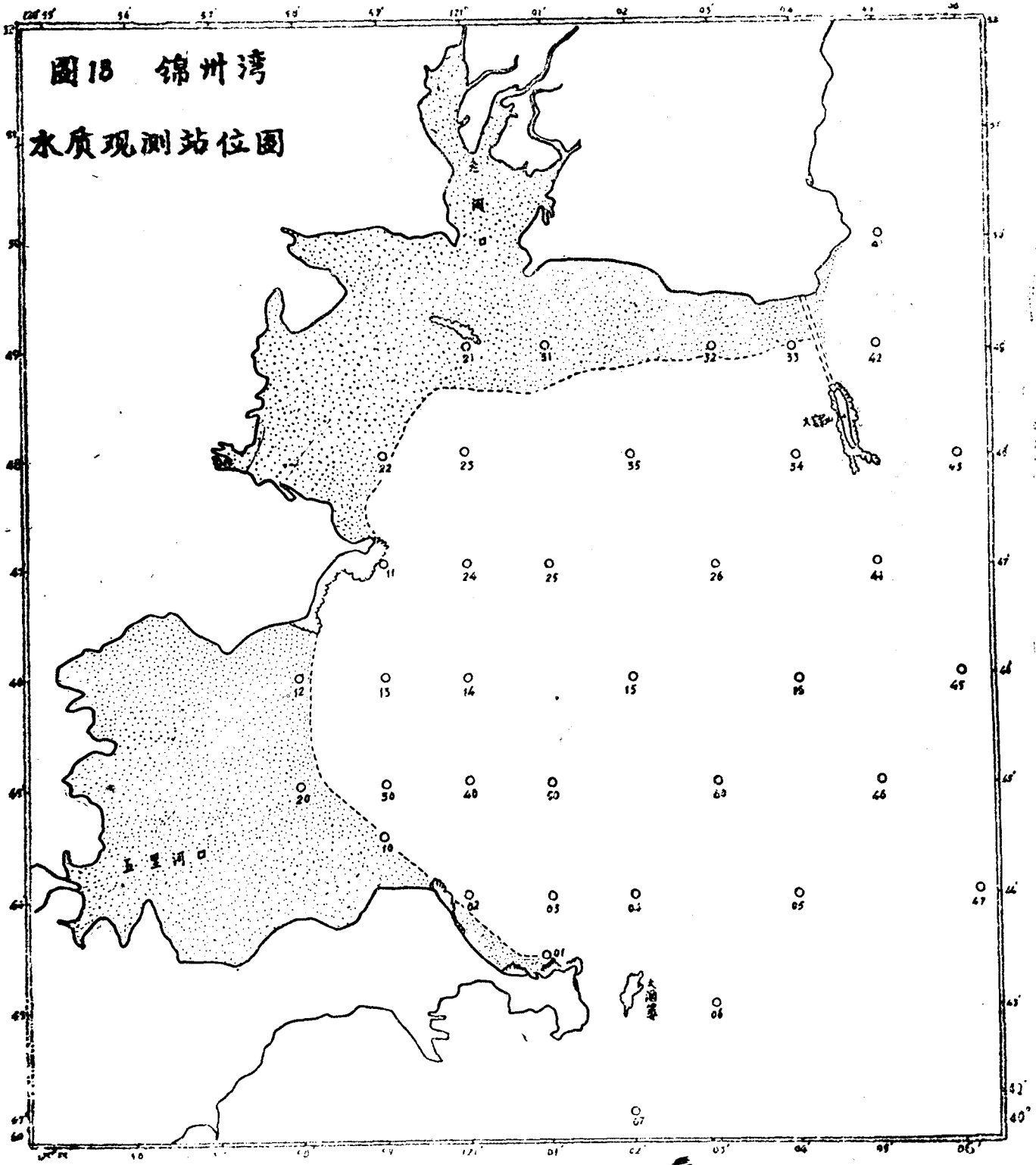


# 锦州湾污水稀释扩散数值模拟

## II 扩散数值计算

国家海洋局海洋环境保护研究所

一九八一年七月



# 锦州湾污水稀释扩散数值模拟

## II、扩散数值计算

王凤华 张德福 宋有强

(国家海洋局海洋环境保护研究所)

### 一、前言

随着沿海工业的发展，海域环境保护受到国家和社会的普遍关注。我国也即将在海洋环境保护中颁布自己的环境保护条例。为适应海洋环境规划和管理需要，建立海洋环境影响预测方法等，将是我们面临的迫切任务。

过去，人们曾把水工实验模拟当作预测水质的主要手段。但是，由于问题的复杂性，实验模拟遇到许多疑难问题无法解决。近十几年来，随着高速电子计算机的迅速发展和新计算技术的出现，以数学模型来解决复杂问题的系统分析方法，在环境科学中发挥了巨大的威力，成为引人注目的动向。目前，环境系统分析方法已成为环境预测强有力手段之一。

海域污染是个复杂的系统，涉及问题很广。但是污染防治的核心问题，在于根据水域对污水的扩散稀释能力，合理控制入海污染物的排放量。本文将以数学模型为手段，集中解决污染物的扩散稀释问题(图1)。作为整个课题的第一部份，采用浅水长波模型计算锦州湾潮流场；第二部分，在潮流计算的基础上，使用二维扩散模型，以化学耗氧量(COD)作为有机污染综合指标，模拟了锦州湾潮流污染扩散。验证结果表明，

计算的COD浓度场与实测浓度分布总趋势相当吻合。各观测点的计算值与实测值很接近，平均相对误差为10%。

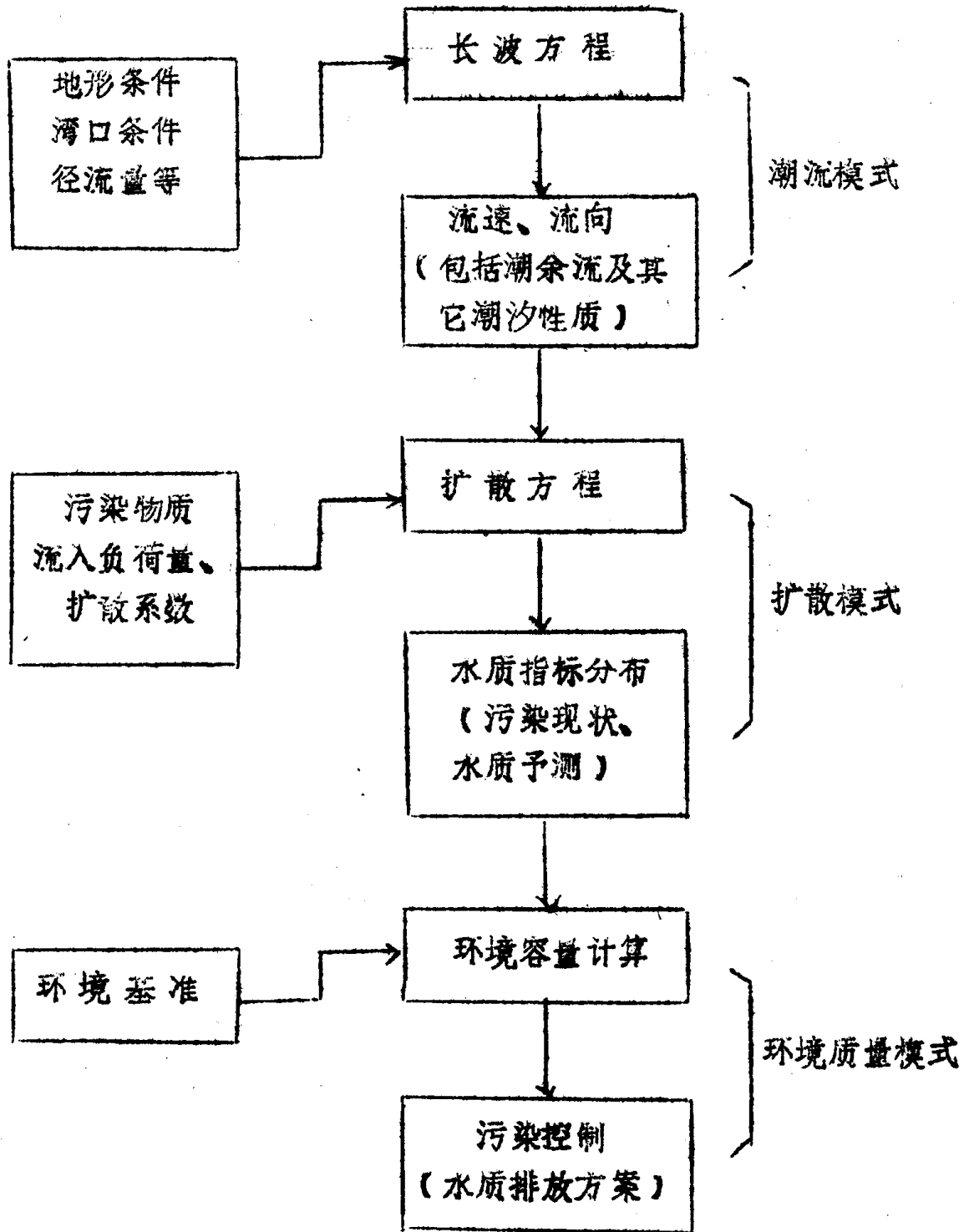


图1 水质控制模式略图

## 二、基本方程

假定在某一给定方向上物质通过（每单位时间、单位面积的物质）正比于该方向上的浓度梯度，比例系数称为涡动扩散系数，那么在X向（纵向）、Y向（横向）、Z向（垂向）上的物质通量分别为：

$-E_x P \frac{\partial C}{\partial X}$ ， $-E_y \rho \frac{\partial C}{\partial Y}$ ， $-E_z P \frac{\partial C}{\partial Z}$ 。C是物质浓度， $\rho$ 是海水出度，规定沿浓度梯度减小的方向流通量为正。

在湍流运动中，为求得总物质通量，必须把湍流贡献加到整体运动所产生的物质运输通量上，即：

$$\text{纵向物质通量} = uC - E_x \frac{\partial C}{\partial X}$$

$$\text{横向物质通量} = vC - E_y \frac{\partial C}{\partial Y}$$

$$\text{垂向物质通量} = wC - E_z \frac{\partial C}{\partial Z}$$

式中u、v、w分别为纵向、横向和垂向的流速。根据物质守恒原理，单位体积内应满足如下形式的物质平衡方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial X} \left( uC - E_x \frac{\partial C}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( vC - E_y \frac{\partial C}{\partial Y} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial Z} \left( wC - E_z \frac{\partial C}{\partial Z} \right) + S \end{aligned} \quad (1)$$

式中S(X、Y、Z、t)是外部加于系统的源的强度。

方程(1)是三维输运——扩散基本方程。就目前计算技术水平而言，求三维输运方程的数值解仍然十分困难。因此，通常将方程(1)化成一维

或二维空间平均形式求解。考虑锦州湾水浅，水层的垂直混合比较均匀，本文取方程(1)垂向积分形式，即二维扩散模式：

$$\frac{\partial}{\partial t} (HC) = - \frac{\partial}{\partial X} (HuC) - \frac{\partial}{\partial y} (HVC) + \frac{\partial}{\partial X} (HE_x \frac{\partial C}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial y} (HE_y \frac{\partial C}{\partial y}) + S_m \quad (2)$$

式中  $C$  表示深度平均浓度  $C = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} C dz$ ， $H$  表示海水总深度，

$H = h + \zeta$  ( $h$  是水深， $\zeta$  是平均海平面以上的瞬时海面高度)。  $u$ 、 $V$ 、 $\zeta$  由本题第一部份潮流数值计算求得。在扩散计算中作为已知量出现的  $S_m$  表示投放在单位面积上的物质负荷量， $E_x$ 、 $E_y$  分别为  $X$ 、 $y$  方向上的弥散系数，表示速度切变和湍流扩散引起的物质交换率的量度。

鉴于目前弥散系数还没有完善的理论公式，在实际应用中，多半用半经验半理论的公式表示。Elder (1959) 在 Taylor 研究的基础上，提出了开敞明渠中定常流动的纵向弥散系数计算公式：

$$K_x = 5.93 hu^* \quad (3)$$

式中  $h$  为水深， $u^*$  为摩擦速度。同时 Elder 还建立了侧向弥散系数估算公式：

$$K_y = 0.28 H u^* \quad (4)$$

从这两个系数的量阶上不难看出，侧向弥散系数比纵向弥散系数小得多，因而在应用中可以忽略。

后来 Leendest J. J 将 Elder 纵向弥散系数公式中的摩擦速度以平均速度表示：

$$u^* = \left( \frac{\tau_b}{\rho} \right)^{1/2} = u_s g^{1/2} C^{-1} \quad (5)$$

式中  $\tau'_x$  是在平均流动方向上的海底切应力。将(5)式代入(3)式中得：

$$K_x = 5.93 H \bar{u} g^{1/2} C^{-1} \quad (6)$$

在潮流扩散计算中，用各点流速分量  $u$ 、 $v$  绝对值的平均值代替上式中的  $\bar{u}$ ，(6)式变成：

$$\begin{aligned} K_x &= 5.93 \sqrt{g} |\bar{u}| h/c \\ K_y &= 5.93 \sqrt{g} |\bar{v}| h/c \end{aligned} \quad (7)$$

上述方程(2)表示流场中物理输送过程，右端前两项是平流项，代表整个水体运动携带的质量平流；右端3、4项是弥散项，代表湍流造成的质量输送，从数量上看，纵向的弥散输送比平流输送要小得多；右端最后一项代表外部的物质输入率及系统内部生化作用的物质产生率两项之和。本文中姑且不考虑  $COD$  的衰减率，而将其看成一种相对保守性物质。因此在本计算中， $S_m$  项实际上就是加入系统的  $COD$  流入负荷量。

### 三、计算方法

#### I、差分方程

按照ADI法的步骤，将平流—扩散方程(2)离散成相应的有限差分形式。由于扩散计算中应用了潮流计算中  $u$ 、 $v$ 、 $\zeta$  等存储量，因而计算水域、座标、网格、差分格式及引入符号均须与潮流计算相同（详见本题第I部份—潮流数值计算一文）。浓度  $C$  的差分点与水位  $\zeta$  相同；扩散系数  $K_x$  和  $K_y$  的差分点分别与潮流分量  $u$ 、 $v$  相同。

在前半时间步长  $P\Delta t \rightarrow (P + \frac{1}{2})\Delta t$  中，按行计算，对  $x$  的差分取隐式；对  $y$  的差分取显式。方程(2)的差分式为：

$$\begin{aligned}
& C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})}) - C_{m,n}^{(P)} (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P)}) + \\
& \frac{\Delta t}{2\Delta S} \left\{ (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})}) V^{(P+\frac{1}{2})} \frac{-x^{(P+\frac{1}{2})}}{C} \right\}_x + \\
& \frac{\Delta t}{2\Delta S} \left\{ (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P)}) V^{(P)} \frac{-y^{(P)}}{C} \right\}_y - \\
& \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} \left\{ (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})}) E_x^{(P+\frac{1}{2})} C_x^{(P+\frac{1}{2})} \right\}_x - \\
& \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} \left\{ (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P)}) E_y^{(P)} C_y^{(P)} \right\}_y - \frac{\Delta t}{2} S_m = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

在后半时间步长  $(P+\frac{1}{2})\Delta t \rightarrow (P+1)\Delta t$  中，按列计算，对 X 差分取显式，对 y 差分取隐式。方程(2)的差分式为：

$$\begin{aligned}
& C_{m,n}^{(P+1)} (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+1)}) - C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})}) + \\
& \frac{\Delta t}{2\Delta S} \left\{ (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})}) V^{(P+\frac{1}{2})} \frac{-x^{(P+\frac{1}{2})}}{C} \right\}_x + \\
& \frac{\Delta t}{2\Delta S} \left\{ (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+1)}) V^{(P+1)} \frac{-y^{(P+1)}}{C} \right\}_y - \\
& \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} \left\{ (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})}) E_x^{(P+\frac{1}{2})} C_x^{(P+\frac{1}{2})} \right\}_x - \\
& \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} \left\{ (\bar{h} + \zeta_{m,n}^{(P+1)}) E_y^{(P+1)} C_y^{(P+1)} \right\}_y - \frac{\Delta t}{2} S_m = 0 \quad (9)
\end{aligned}$$



差分方程(8)与(9)中，平流项差分出现的 $\bar{c}$ ，不能采用空间平均，否则计算结果会出现负浓度，特别是在污染源附近或在计算开始之后间接点的浓度差很大的水域会发生这种现象。实际上只有上游点的浓度影响下游点的浓度。因此求平流项的中心差分须用逆风格式代替，即用上游点的浓度代替邻近下游点的浓度，其数学表达式为：

$$c_{m+\frac{1}{2},n}^{(P+\frac{1}{2})} = \alpha c_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} + (1-\alpha) c_{m+1,n}^{(P+\frac{1}{2})} \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \alpha = 0 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{l} U_{m+\frac{1}{2},n}^{(P+\frac{1}{2})} \geq 0 \\ U_{m+\frac{1}{2},n}^{(P+\frac{1}{2})} < 0 \end{array} \right)$$

$$c_{m-\frac{1}{2},n}^{(P+\frac{1}{2})} = \beta c_{m-1,n}^{(P+\frac{1}{2})} + (1-\beta) c_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 1 \\ \beta = 0 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{l} U_{m-\frac{1}{2},n}^{(P+\frac{1}{2})} \geq 0 \\ U_{m-\frac{1}{2},n}^{(P+\frac{1}{2})} < 0 \end{array} \right)$$

$$c_{m,n+\frac{1}{2}}^{(P)} = \gamma c_{m,n}^{(P)} + (1-\gamma) c_{m,n-1}^{(P)} \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 1 \quad (P) \\ \quad \quad \quad (V_{m, n+\frac{1}{2}} \geq 0) \\ \gamma = 0 \quad (P) \\ \quad \quad \quad (V_{m, n+\frac{1}{2}} < 0) \end{array} \right.$$

$$-y(P) C_{m, n-\frac{1}{2}} = \delta C_{m, n-1}^{(P)} + (1-\delta) C_{m, n}^{(P)} \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = 1 \quad (P) \\ \quad \quad \quad (V_{m, n-\frac{1}{2}} \geq 0) \\ \delta = 0 \quad (P) \\ \quad \quad \quad (V_{m, n-\frac{1}{2}} < 0) \end{array} \right.$$

将(10)~(13)式代入(8)式中，进行整理后得前半时间步长按行计算的隐式差分方程：

$$A_{m-1, n}^{(P+\frac{1}{2})} C_{m-1, n}^{(P+\frac{1}{2})} + B_{m, n}^{(P+\frac{1}{2})} C_{m+1, n}^{(P+\frac{1}{2})} + D_{m+1, n}^{(P+\frac{1}{2})} C_{m+1, n}^{(P+\frac{1}{2})} = F_{m, n}^{(P)} \quad (14)$$

其中：

$$A_{m-1, n}^{(P+\frac{1}{2})} = -\frac{\Delta t}{4\Delta S} \left( \frac{-y}{h} + \zeta \right) \left( \beta U_{m-\frac{1}{2}, n}^{(P+\frac{1}{2})} + \frac{1}{\Delta S} [K_x]_{m-\frac{1}{2}, n}^{(P+\frac{1}{2})} \right)$$

$$B_{m, n}^{(P+\frac{1}{2})} = \zeta \left( \frac{\Delta t}{4\Delta S} \left( \frac{-y}{h} + \zeta \right) \left( \alpha U_{m+\frac{1}{2}, n}^{(P+\frac{1}{2})} + \right) \right)$$

$$\frac{1}{\Delta S} \left\{ K_x^{(P+\frac{1}{2})} \right\}_{m+\frac{1}{2},n} - \frac{\Delta t}{4\Delta S} \left( h_{m+\frac{1}{2},n} \frac{-y}{m+\frac{1}{2},n} + \zeta_{m+\frac{1}{2},n} \frac{-x(P+\frac{1}{2})}{m+\frac{1}{2},n} \right) \left\{ (1-\beta) U_{m-\frac{1}{2},n}^{(P+\frac{1}{2})} \right\}$$

$$- \frac{1}{\Delta S} \left\{ K_x^{(P+\frac{1}{2})} \right\}_{m-\frac{1}{2},n}$$

$$D_{m+1,n}^{(P+\frac{1}{2})} = \frac{\Delta t}{4\Delta S} \left( h_{m+\frac{1}{2},n} \frac{-y}{m+\frac{1}{2},n} + \zeta_{m+\frac{1}{2},n} \frac{-x(P+\frac{1}{2})}{m+\frac{1}{2},n} \right) \left\{ (1-\alpha) U_{m+\frac{1}{2},n}^{(P+\frac{1}{2})} \right\} - \frac{1}{\Delta S} \left\{ K_x^{(P+\frac{1}{2})} \right\}_{m+\frac{1}{2},n}$$

$$F_{m,n}^{(P)} = \frac{\Delta t}{4\Delta S} C_{m,n-1}^{(P)} \left( h_{m,n-\frac{1}{2}} \frac{-x}{m,n-\frac{1}{2}} + \zeta_{m,n-\frac{1}{2}} \frac{-y(P)}{m,n-\frac{1}{2}} \right) (\delta V_{m,n-\frac{1}{2}}^{(P)} + \frac{1}{\Delta S} \left\{ K_y^{(P)} \right\}_{m,n-\frac{1}{2}})$$

$$+ C_{m,n}^{(P)} \left\{ \zeta_{m,n}^{(P)} + h_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{4\Delta S} \left( h_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{-x}{m,n+\frac{1}{2}} + \zeta_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{-y(P)}{m,n+\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

$$\left( \gamma V_{m,n+\frac{1}{2}}^{(P)} + \frac{1}{\Delta S} \left\{ K_y^{(P)} \right\}_{m,n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{4\Delta S} \left( h_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{-y(P)}{m,n+\frac{1}{2}} + \zeta_{m,n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\left. \left[ (1-\delta) V_{m,n-\frac{1}{2}}^{(P)} - \frac{1}{\Delta S} \left\{ K_y^{(P)} \right\}_{m,n-\frac{1}{2}} \right] \right\} - C_{m,n+1}^{(P)} \frac{\Delta t}{4\Delta S}$$

$$\left( h_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{-x}{m,n+\frac{1}{2}} + \zeta_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{-y(P)}{m,n+\frac{1}{2}} \right) \left\{ (1-\gamma) V_{m,n+\frac{1}{2}}^{(P)} - \frac{1}{\Delta S} \left\{ K_y^{(P)} \right\}_{m,n+\frac{1}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{\Delta t}{2} \left\{ S_m \right\}_{m,n}$$

同样可得后半时间步长按列计算差分方程：

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} (P+1) & (P+1) & (P+1) & (P+1) & (P+1) & (P+1) & (P+\frac{1}{2}) \\ A & C & +B & C & +D & C & =F \\ m,n+1 & m,n+1 & m,n & m,n & m,n-1 & m,n-1 & m,n \end{matrix}
 \end{aligned}$$

(15)

其中：

$$A = \frac{(P+1) \Delta t -x}{4\Delta S} (h + \zeta) \left[ (1-\alpha)V \frac{(P+1) 1}{m,n+\frac{1}{2} \Delta S} \frac{(P+1)}{y_{m,n+\frac{1}{2}}} \right]$$

$$B = \zeta \frac{(P+1)}{m,n} + h + \frac{\Delta t -x}{4\Delta S} (h + \zeta) (\alpha V \frac{(P+1)}{m,n+\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{1}{\Delta S} [K_y] \frac{(P+1)}{m,n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t -x}{4\Delta S} (h + \zeta) \left[ (1-\beta) \frac{(P+1)}{m,n-\frac{1}{2}} \right]$$

$$V \frac{(P+1) 1}{m,n-\frac{1}{2} \Delta S} \frac{(P+1)}{y_{m,n-\frac{1}{2}}}$$

$$D = \frac{(P+1) \Delta t -x}{4\Delta S} (h + \zeta) \left[ \beta V \frac{(P+1) 1}{m,n-\frac{1}{2} \Delta S} \frac{(P+1)}{y_{m,n-\frac{1}{2}}} \right]$$

$$F = \frac{(P+\frac{1}{2}) \Delta t}{4\Delta S} C \frac{(P+\frac{1}{2}) -y}{m-1,n} \frac{(P+\frac{1}{2}) -x}{m-\frac{1}{2},n} \frac{(P+\frac{1}{2})}{m-\frac{1}{2},n} (\delta U$$

$$+ \frac{1}{\Delta S} [K_x] \frac{(P+\frac{1}{2})}{m-\frac{1}{2},n} + C \frac{(P+\frac{1}{2})}{m,n} \left\{ \zeta \frac{(P+\frac{1}{2})}{m,n} + h - \frac{\Delta t -y}{4\Delta S} (h + \zeta) \frac{(P+\frac{1}{2})}{m+\frac{1}{2},n} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & -x(P+\frac{1}{2}) \\
 & +\zeta_{m+\frac{1}{2},n}
 \end{aligned} \right\} \left[ (1-\delta)U_{m-\frac{1}{2},n} \right. \\
 & \left. \begin{aligned}
 & (P+\frac{1}{2}) \\
 & -\frac{1}{\Delta S} [K_x]_{m-\frac{1}{2},n}
 \end{aligned} \right] \\
 & -C_{m+1,n} \frac{\Delta t}{4\Delta S} \left[ \begin{aligned}
 & -y_{m+\frac{1}{2},n} \\
 & +\zeta_{m+\frac{1}{2},n}
 \end{aligned} \right] \left[ (1-\gamma)U_{m+\frac{1}{2},n} \right. \\
 & \left. \begin{aligned}
 & (P+\frac{1}{2}) \\
 & -\frac{1}{\Delta S} [K_x]_{m+\frac{1}{2},n}
 \end{aligned} \right] + \frac{\Delta t}{2} [S]_{m,n}
 \end{aligned}$$

差分方程(14)或(15),对于每一计算行(沿X方向)或计算列(沿Y方向),都可以构成一线性代数方程组 $[A] \cdot [F] = [B]$ 其中 $[F]$ 包括所有要计算的浓度值,系数矩阵 $[A]$ 为三对角型矩阵,该线性方程组用追赶法很容易求解。计算时,同样采用腾式方向交替步骤,在前半时间步长上逐行将浓度场用(14)式计算一遍,在后半时间步长上逐列用(15)式计算一遍,如此交替进行计算,直到浓度分布达到稳定为止。

## II、差分方程稳定性

在平流-扩散方程(2)中,由于 $\zeta$ 、 $h$ 、 $U$ 、 $V$ 、 $E_x$ 、 $E_y$ 都是变量,而且研究海域较复杂,因此精确地研究上述差分方程(14)、(15)的稳定性是困难的。为此,本文作如下简化:设 $\zeta$ 、 $h$ 、 $U$ 、 $V$ 、 $E_x$ 、 $E_y$ 为正的常量,则方程(2)简化为:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + E_y \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \quad (16)$$

而对应的差分方程(14)、(15)简化为:

$$C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} - C_{m,n}^{(P)} + \frac{\Delta t}{2\Delta S} U(C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} - C_{m-1,n}^{(P+\frac{1}{2})}) + \frac{\Delta t}{2\Delta S} V(C_{m,n}^{(P)} -$$

$$C_{m,n-1}^{(P)}) = \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_x(C_{m-1,n}^{(P+\frac{1}{2})} - 2C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} + C_{m+1,n}^{(P+\frac{1}{2})}) +$$

$$\frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_y(C_{m,n-1}^{(P)} - 2C_{m,n}^{(P)} + C_{m,n+1}^{(P)}) \quad (17)$$

$$C_{m,n}^{(P+1)} - C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t}{2\Delta S} U(C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} - C_{m-1,n}^{(P+\frac{1}{2})}) + \frac{\Delta t}{2\Delta S} V$$

$$(C_{m,n}^{(P+1)} - C_{m,n-1}^{(P+1)}) = \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_x(C_{m-1,n}^{(P+\frac{1}{2})} - 2C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})}$$

$$+ C_{m+1,n}^{(P+\frac{1}{2})}) + \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_y(C_{m,n-1}^{(P+\frac{1}{2})} - 2C_{m,n}^{(P+\frac{1}{2})} + C_{m,n+1}^{(P+\frac{1}{2})}) \quad (18)$$

令  $C_{m,n}^{(P)} = T e^{P I \alpha \Delta S m} e^{I \beta \Delta S n}$ ，其中  $I = \sqrt{-1}$ ， $\alpha$ 、 $\beta$  为任意实

数。分别代入(17)及(18)式并消去两边的公因子  $T e^{P I \alpha \Delta S m} e^{I \beta \Delta S n}$

得：

$$T^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta S} U(T^{-\frac{1}{2}} - T^{-\frac{1}{2}} e^{-I \alpha \Delta S}) + \frac{\Delta t}{2\Delta S} V(1 - e^{-I \beta \Delta S})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_x \left( T e^{\frac{1}{2} - I\alpha\Delta S} - 2T + T e^{\frac{1}{2} + I\alpha\Delta S} \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_y \left( e^{-I\beta\Delta S} - 2 + e^{I\beta\Delta S} \right) \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&T \left[ -1 + \frac{\Delta t}{2\Delta S} U \left( 1 - e^{-I\alpha\Delta S} \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta S} V \left( T - T e^{\frac{1}{2} - I\beta\Delta S} \right) \right] \\
&= \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_x \left( e^{-I\alpha\Delta S} - 2e^{I\alpha\Delta S} \right) + \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_y \left( T e^{\frac{1}{2} - I\beta\Delta S} \right. \\
&\quad \left. - 2T + T e^{\frac{1}{2} + I\beta\Delta S} \right) \quad (20)
\end{aligned}$$

在(19)及(20)式中解出  $T^{\frac{1}{2}}$  得：

$$T^{\frac{1}{2}} = \frac{1 - A}{1 + \beta} \quad (21)$$

$$T^{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \beta}{1 + A} \quad (22)$$

其中复数A、B为：

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\Delta t}{2\Delta S} V \left( 1 - e^{-I\beta\Delta S} \right) - \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_y \left( e^{-I\beta\Delta S} - 2 + e^{I\beta\Delta S} \right) \\
&= \left( \frac{\Delta t}{2\Delta S} V + \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} E_y \right) (1 - \cos\beta\Delta S) + I \frac{\Delta t}{2\Delta S} V \sin\beta\Delta S \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\Delta t}{2\Delta S} U (1 - e^{-I\alpha\Delta S}) - \frac{\Delta t}{2(\Delta S)^2} E_x (e^{-I\alpha\Delta S} - 2 + e^{I\alpha\Delta S}) \\
 &= \left( \frac{\Delta t}{2\Delta S} U + \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} \frac{E_x}{X} \right) (1 - \cos\alpha\Delta S) + I \frac{\Delta t}{2\Delta S} U \sin\alpha\Delta S \quad (24)
 \end{aligned}$$

使(21)与(22)式相乘得：

$$T = \frac{(1-A)(1-B)}{(1+A)(1+B)} \quad (25)$$

由(23)及(24)式可知A、B的实部大于等于零。又由图(2)可知对任意 $\alpha$ 、 $\beta$ 均有：

$$\left| \frac{1-A}{1+A} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{1-B}{1+B} \right| \leq 1$$

代入(25)式得：

$$|T| = \left| \frac{1-A}{1+A} \right| \cdot \left| \frac{1-B}{1+B} \right| \leq 1$$

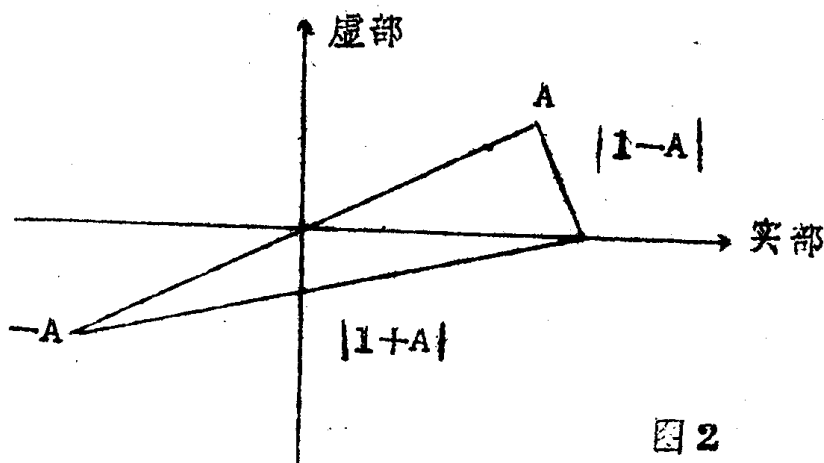


图 2



由此得出：差分方程(17)、(18)式对于任意 $\Delta t$ 和 $\Delta S$ 都是绝对稳定的。但不能由此断定，当 $\zeta$ 、 $h$ 、 $U$ 、 $V$ 、 $E_x$ 、 $E_y$ 是变量时，差分方程(14)、(15)也是绝对稳定的。然而可以预料，扩散方程比潮流方程差分格式的稳定性要好。实际计算时，也可用一阶偏微分方程 $\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial X} = 0$ 的显式格式的稳定性条件估算，即：

$$\frac{\Delta t}{2} \leq \alpha \frac{\Delta S}{\max(U, V)} \quad (26)$$

一般取 $\alpha \approx 0.2 - 0.25$ 。

### III、初始浓度及边界浓度的确定

虽然初始浓度不影响最终计算结果，但对计算时间影响很大。如果初始浓度取值适当，则可收到缩短计算周期的效益。通常有这样几种确定初始浓度的方法：(1)以现场监测的浓度分布作初值；(11)用简化方程的解析解作初值；(111)用二维输运方程的定常解作初值。本文中，初始浓度用第(1)种方法给定。

边界浓度按闭边界和开边界分别加以处理：在闭边界上，由于垂直于边界的流速为零，故闭边界上自然没有物质通量。计算水域外浓度为零。在河口开边界上，浓度处理较为复杂，因为开边界点上的浓度值随流向而改变，所以从计算水域流向外海时，浓度变化应满足连续条件

$$\frac{\partial C}{\partial t} = u \frac{\partial C}{\partial X}, \quad \text{其差分式为：}$$

$$C_{m+1, n}^{(P+\frac{1}{2})} = C_{m+1, n}^{(P)} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S} U \left( C_{m+\frac{1}{2}, n}^{(P+\frac{1}{2})} - C_{m-1, n}^{(P)} \right) \quad (27)$$

从外海流入时，其浓度随外海区水质状况而定：(1)如果外海为清洁