共通一次シリーズ③

57年版

傾向と対策

共通一次 数学I

横浜国大教授・理博 樋口禎一著

旺文社

数学高考题解与动向

桐口祯一编写
李振安 译
于 信 校

齐齐哈尔市科技情报研究所

前　　言

本书是日本横滨国立大学数学教授桐口祯一编写，于1981年6月份出版的新书。作者主要根据近几年来日本国立、公立高校数学统考试题来分析归纳了数学教学法研究以及数学试题的新动向，对于去年高校数学统考试题做了题解，并预测了1982年数学试题。为了使学生适应这一形式发展的需要，作者以8章23节的篇幅精辟地分析、归纳了初、高中学生应该掌握的数学知识。在书中每一小节里通过基本类型题、典型例题、练习题、实战题（历年高考题）的各种形式来训练学生分析问题和解决问题的能力。从而让学生掌握有关的数学的公理、定理和公式。全书涉及94个基本类型题、128个例题、44个练习题、35个实战题、44幅图形、50余条定理以及118个基本公式，广泛地包括初、高中数学内容。代数、三角、几何、解析几何、向量运算、逻辑推理以及概率等各部分所占比例适中，脉络清晰。结合我国数学教学的实际，对部分章、节做了删减。

本书对于初、高中所学的数学公理、定理公式归纳比较完整。有系统化和规范化的特点，做到了举一返三、启发学生独立思考、掌握数学知识的作用，对于提高读者用数学方法思考问题的能力有着较大的指导意义。

本书适于我国初、高中在校学生学习以及毕业升学、就业考试参考用。对于中学数学教师全面掌握数学教学规律及知识系统化、规范化有着重要参考价值。

译者　一九八一年十二月

目　录

第四章　指数、对数、三角函数

第五章　向　　量

第六章　平面解析几何

第七章　排列组合与概率

第八章　集合与推理

一九八一年日本国立、公立高校

数学统考试题题解

考试时间：　　100分钟

分　　数：　　每题40分，共200分

1、设$P(X)=ax^3+a^2x^2+3bx-11a$

（Ⅰ）填空：

用$(X-1)$除$P(x)$得到余式$a^2-\boxed{}a+\boxed{}b$，而用$(X-1)$去除商式，得到的余式用R表示

$R=\boxed{}a^2+\boxed{}a+\boxed{}b$

（Ⅱ）a、b是什么数时，$(X-1)$才能整除$P(x)$？并求出函数R有最大和最小时的a、b值。

〔解〕

（Ⅰ）∵　$P(x)=(x-1)\{a^2x^2+(a^2+a)x+a^2+a+3b\}+a^2-10a+3b$，用$(X-1)$除$P(x)$的余式为$a^2-10a+3b$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得知，$(X-1)$整除$P(x)$的条件为$a^2-10a+3b=0$　∴　$3b=a(10-a)$……①，从已知条件得知，$3b$是正数，∴$0<a<10$，并且$3b$是3的倍数，∴$a=3,6,9$或者$10-a=3,6,9$，因此，①的正整数解是$(a,b)=(1,3),(3,7),(4,8),(6,8),(7,7)$,

(9，3)六个数組。

2、设点D为锐角三角形ABC一边BC的中点，过D点向AB，AC引垂线，交点分别是E、F，使AE：EB＝7：5，AF：FC＝5：3，BC、CA、AB三边的长度分别是a、b、c。B和C分别表示∠B、∠C的大小。

（Ⅰ）填空：

$$\cos B=\boxed{}\,\frac{c}{a}\qquad \cos C=\boxed{}\,\frac{b}{a}$$

$$\frac{2}{a}=\frac{\sqrt{\boxed{}}}{b}=\frac{\sqrt{\boxed{}}}{c}$$

（Ⅱ）若a＝4，△ABC的面积等于多少？

〔解〕

（Ⅰ）按已知条件画一三角形。由直角三角形DBC、DCF分别求得：

$$\cos B=\frac{5}{6}\cdot\frac{c}{a},\ \cos C=\frac{3}{4}\cdot\frac{b}{a}$$

又∵ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$并将cosB，cosC代入求得：

$$\frac{2}{a}=\frac{\sqrt{2}}{b}=\frac{\sqrt{3}}{c}$$

（Ⅱ）∵ $a=4$，$c=2\sqrt{3}$，$\cos B=\frac{5\sqrt{3}}{12}$，

$$\therefore\quad \sin B=\frac{\sqrt{69}}{12}$$

$\therefore \triangle ABC$面积 $=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{69}}{12}$

$=\sqrt{23}$

3、填空

（1） 若 $\vec{a}=(4,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$，

那么 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 5)$的表示式分别为：

$\vec{e_1}=\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{b}$，$\vec{e_2}=\boxed{}\vec{a}-\boxed{}\vec{b}$

（2） 以O点为圆心的圆内接四边形ABCD

若$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$\angle BCD=\frac{5}{12}\pi$，$\angle BDC=\frac{\pi}{4}$

那么 $\vec{OD}=\boxed{}\vec{OA}-\boxed{}\vec{OB}$

〔解〕

（1） 设$\vec{e_1}=x\vec{a}+y\vec{b}$

解方程组：

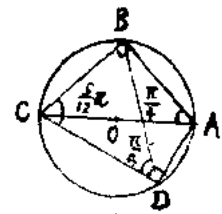
$$\begin{cases}4x+3y=1\\3x+2y=0\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}X=-2\\y=3\end{cases}$$

又设 $\vec{e_2}=u\vec{a}+v\vec{b}$，$(u,\ v)=(3,\ 4)$

（2） 据已知条件画图

∵ $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$

∴ $\triangle ABC$是等腰三角形



设圆半径等于1，圆心为座标原点，则A（1，0），B（0，1）

$$\angle CAD = \frac{\pi}{3},\ D\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB}$$

4、在同一平面上给出几条直线，用它尽可能组成三角形。例如，给出四条直线，其中任意两条不平行且任意三条不交于一点，能组成四个三角形.

（1） 给出十条直线，任意两条均不平行.

（Ⅰ） 问任意三条直线不交于一点时，能组成几个三角形?

（Ⅱ） 恰巧有一点是三条直线的交点，问能组成几个三角形?

（Ⅲ） 恰巧有两点是三条直线的交点，问能组成几个三角形?

（2） 有十条直线，其中有一组两条线平行，其余线即没有相互平行的直线，也没有三条线交于一点的机会，问能组成几个三角形?

〔解〕

（1）（Ⅰ） 因为有三条直线就能组成一个三角形，所以能组成 $C_{10}^{3} = 120$个三角形。

（Ⅱ） 因为三条线交于一点不能组成三角形

所以组成$120-1=119$个三角形

（Ⅲ） 同样道理，组成$120-2=118$个三角形

（2） 凡任意三条线都能够组成三角形，减去不能组成三角形的两条平行线，即

$C_{10}^{3}-C_{8}^{1}=120-8=112$个三角形

5、讨论充要条件

① 不必要也不充分

② 必要不充分

③ 充分不必要

④ 必要充分

问以下各式属于那种条件？

（1） 因为$x(x-2)=y(y-2)=z(z-2)=0$，（x、y、z均为实数）

（Ⅰ） $xyz(x-2)(y-2)(z-2)=0$ $\boxed{\quad}$

（Ⅱ） $x^2y^2z^2+(z-2)^2(y-2)^2(z-2)^2=0$ $\boxed{\quad}$

（Ⅲ） $x^2(x-2)^2+y^2(y-2)^2+z^2(z-2)^2=0$ $\boxed{\quad}$

（2） 因为$x>1$，$y>1$，x、y为实数

$x+y>2$且$xy>1$ $\boxed{\quad}$

（3） 因为$x^2-8x+15\geqslant0$，x为实数

$x^2-3x+1\leqslant0$ $\boxed{\quad}$

（4） 因为$x^2-2x-8\leqslant 0$，x为实数

$|x-3|+|x+1|\leqslant 6$

（5）因为点P和△ABC在同一平面上，且点P在AC边上

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$

〔解〕

（1） 设$x(x-2)=A$，$y(y-2)=B$，$z(z-2)=C$

讨论 $A=B=C=0$、$ABC=0$，$A^2+B^2+C^2=0$ 的关系。

讨论分别满足不等式的x值范围和包含关系。

（Ⅰ） 必要不充分

（Ⅱ） 不必要也不充分

（Ⅲ） 必要充分

（2） 必要不充分

（3） 充分不必要

（4） 将x改写成$x\leqslant -1$，$-1\leqslant x\leqslant 3$，$3<x$

$|x-3|+|x+1|\leqslant 6$的解是$-2\leqslant x\leqslant 4$，与$x^2-2x-8\leqslant 0$的解相同，所以是充分必要的。

（5） 因为A、B、C、P的位置向量分别为$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{p}$，

$\vec{a}-\vec{p}+\vec{b}-\vec{p}+\vec{c}-\vec{p}=\vec{b}-\vec{a}$，∴ $\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}$，P是AC线上的一点，如果点P在AC的中点，那么，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}$ 条件式不成立，所以是充分不必要。

一九八二年日本国立、公立高校数学统考模拟试题

分数：每题40分共200分

时间：100分钟

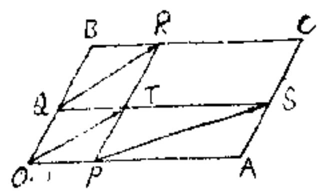
1、设：已知函数$f(x)=x^2-34x+208$和$g(x)=3^x-1$的复合函数为$f[g(x)]$，试解答下列各题。

（1） 求满足$f[g(x)]=0$的实数x的值.

（2） 当$1\leqslant x\leqslant 3$时，求$y=f[g(x)]$的最大值和最小值。

2、设二次方程$4x^2-mx+n=0$的系数m和n为整数且$1\leqslant m\leqslant 20$，$1\leqslant n\leqslant 10$，求该方程的两个根都是奇数时的m和n的值.

3、不在同一直线上的已知二向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$为平行四边形OACB的两条邻边，点P分线段OA成1∶2，点Q分线段OB成1∶1过点P引PR∥OB交BC于R过点Q引QS∥OA交AC于S，T为PR与QS的交点



试用向量$\vec{a}$和$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{PS}$，$\overrightarrow{QR}$和$\overrightarrow{OT}$.

4、一个红箱里有三个红球和一个白球，另一个白箱里有三个白球和一个红球，按下面的规则依次从箱中取球：

（1） 第一次从红箱中任取一球；

（2） 若前一次取出的是红球，则后一次便从红箱中任取一球；若前一次取出的是白球，则后一次便从白箱中任取一球.

（3） （1）、（2）取出的球都要放回原来的箱里.

设第n次取出的球是红球的概率记为p_n.

① 求p_1，p_2，p_3.

② 求p_n-1与p_n的关系.

5、下列各条件是使命题

$|a-b|=|a+b|$（a，b为实数）成立的哪一类条件（①充分不必要②必要不充分③充分必要④不充分不必要），把答案写在后边的括号里.

（1） $a^2b-ab^2=0$ （ ）

（2） $ab=0$ （ ）

（3） $a-b=0$ （ ）

（4） $a^2+b^2=0$ （ ）

（5） $(a-b)^2=(a+b)^2$ （ ）

参考解答

1、（1） 由$f[g(x)]=(3^x-1)^2-34(3^x)+208$

$$=(3^x)^2-36(3^x)+243$$

$$=(3^x-9)(3^x-27)=0$$

易解得 $x_1=2$， $x_2=3$

(2) 将 $f[g(x)]$ 变形，有 $f[g(x)]$

$$=(3^x-18)^2-81 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

由函数 3^x 的单调性和抛物线的性质，可知函数（1）在区间〔1，3〕内只有 $f[g(1)]=(3-18)^2-81=144$，$f[18]=-81$ 和 $f[g(3)]=0$ 可能为最大、最小值，比较这三个数便可得出函数 $y=f[g(x)]$ 在〔1，3〕内的最大值为144，最小值为－81.

2、因二次方程的根为实数，根据判别式应有 $m^2\geqslant 16n$.

设二根为 x_1 和 x_2 则 由根与系数的关系可得出

$$x_1+x_2=\frac{m}{4} \text{和} x_1\cdot x_2=\frac{n}{4}$$

又 因为 x_1、x_2 都是奇数，所以 $\frac{m}{4}$ 应为偶数，而 $\frac{n}{4}$ 为奇数.

再考虑条件 $1\leqslant m\leqslant 20$ 和 $1\leqslant n\leqslant 10$ 便可推得：

$m=8$，$n=4$

3、由图可知

$$\vec{QR}=\vec{QB}+\vec{QT}=\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{3}\vec{OA}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a};$$

$$\vec{PS}=\vec{PT}+\vec{PA}=\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{2}{3}\vec{OA}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\vec{OT}=\vec{OQ}+\vec{OP}=\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{3}\vec{OA}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}.$$

4、此题是古典概率问题

① $P_1=\frac{3}{4}$，$P_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

$$P_3=P_2\ \frac{3}{4}+(1-P_2)\frac{1}{4}=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$$

② 第n－1次从箱中任取出一球的事件有四种可能，即从红箱中取出一红球；从红箱中取出一白球；从白箱中取出一红球，从白箱中取出一白球，又因为P_{n-1}表示第n-1次取出的球是红球的概率，那么取出的球是白球的概率就是$1-P_{n-1}$，因此第n－1次不论是哪一种可能事件，第n次取出的球是红球的概率都是

$$P_n=P_{n-1}\frac{3}{4}+(1-P_{n-1})\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}P_{n-1}$$

5、命题$|a-b|=|a+b|$即$a-b=\pm(a+b)$由此可推得$a=0$或$b=0$；反之，由命题$a=0$或$b=0$可推得$|a-b|=|a+b|$所以命题“$|a-b|=|a+b|$”等价于命题“a、b中至少有一个为零”

由此便容易看出

条件(1)$a^2b-ab^2=ab(a-b)=0$为必要非充分条件

(2)$ab=0$为必要且充分条件

(3)$a-b=0$为不必要不充分条件

(4)$a^2+b^2=0$为充分不必要条件

(5)$(a-b)^2=(a+b)^2$为充分必要条件

第一章 数和代数式

§1 整式

基本类型题

1、已知$x+y=-1$，$xy=1$，求x^2+y^2和x^3+y^3

〔解〕将立方、平方和化成$x+y$与xy的形式

$\because\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\therefore\ x^2+y^2=-1,\ x^3+y^3=2$

2 分解 $2x^3-x^2-7x+6$

〔解〕

用因式分解定理，找出公因式

设 $f(x)=2x^3-x^2-7x+6$，$\because f(1)=0$

$\therefore x-1$ 是 $f(x)$ 的因式，提出 $X-1$

$f(x)=(x-1)(2x^2+x-6)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x+2)(2x-3)$

3、若用 $(x+1)$ 除整式 $f(x)$ 余 -7，若用 $(2x-1)$ 除 $f(x)$，余 -1，问，若用 $2x^2+x-1$ 去除 $f(x)$ 时，余式为多少？

〔解〕首先将除式进行因式分解，之后使用除法原理

设 $f(x)=(x+1)(2x-1)Q(x)+ax+b$

根据剩余定理得：

$$f(-1)=-a+b=-7,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2}+b=-1$$

解出 $a=4$，$b=-3$

$\therefore$ 余式为：$4x-3$

4、若实数a、b、c满足 $a+b+c=5$，$ab+bc+ca=3$，$abc=-3$，那么 $a^2+b^2+c^2$ 和 $a^3+b^3+c^3$ 等于多少？

〔解〕把平方和、立方和用 $a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc 表示有

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=19$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$$

$=80$

例题1、分解 $2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$

〔**解**〕上式 $=2x^3-3x^2-2x-a(4x^2-6x-4)$

$=x(2x^2-3x-2)-2a(2x^2-3x-2)$

$=(2x+1)(x-2)(x-2a)$

例题2、使 $2x^3-x^2-7x+6$ 与 $2x^3-(4a^2-3)x+4a^2-5$ 具有二次最大公约数的有理数a的正数是多少？此时的最大公约数是多少？

〔**解**〕设 $f(x)=2x^3-x^2-7x+6$，$f(1)=0$

据此，$f(x)$ 具有因式 $(x-1)$，用 $x-1$ 去除 $f(x)$ 得：

$f(x)=(x-1)(2x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+2)(2x-3)$

又设 $g(x)=2x^3-(4a^2-3)x+4a^2-5$

$g(x)=2x^3+3x-5-4a^2(x-1)$

$=(x-1)(2x^2+2x+5)-4a^2(x-1)$

$=(x-1)(2x^2+2x+5-4a^2)$

在这里，当 $h(x)=2x^2+2x+5-4a^2$ 的因式是 $x+2$ 或 $2x-3$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 才具有二次公约数。

（Ⅰ）若 $x+2$ 是因式，

那么，$h(-2)=8-4+5-4a^2=0$

$9-4a^2=0\quad a=\frac{3}{2}$