两篇关于大系統稳定性
綜述的譯文

（I）

M. Araki：非线性大系统的稳定性——利用M矩阵的复合系统方法的二次阶理论

（II）

D, D. Siljak：大系统的稳定性

贺建勋
洪　陶　合译

厦门大学常微与最优控制教研室
厦门大学科学技术情报研究室

非线性大系统的稳定性——利用M矩阵的复合系统方法的二次阶理论

Mituhiko Araki

提要——研究了分析大系统稳定性的复合系统方法，集中地注意于采用M－矩阵的二次阶理论。这里，就术语"复合系统法"来说，我们指的是将大系统分解成为较小的子系统，并做两步分析（即首先分析子系统，而后将所得的结果综合起来並化成整体的性质）、以统一的观点描叙李雅普诺夫稳定性和输入－输出稳定性，并且阐明了它们之间的相互联系。作为一个应用，对某些类型的多输入多输出系统给出了单频率域稳定性准则。其内容对非线性大系统的稳定性分析一般是有用的。

I. 引　言

当我们要分析大规模非线性系统的稳定性时，立刻会面临计算方面的困难，这种困难随着系统的规模增大而迅速增长，並阻碍我们清楚的考察各种因素对整个系统性能的影响。这种情形促使许多研究者发现并运用"复合系统方法"（简称"CS法"）。这里，术语"CS法"，我们指的是将一个大系统分解成较小的子系统，再作两步分析（即第一步分析每个子系统；第二步将所得结果综合起来化为整体的性质）的方法。其主要目的是 i）减少计算工作量，ii）获得对各种因素影响的清晰

的考察。

自从1965年Bailey发表了第一篇论文以来，对Lyapunov稳定性和输入一输出稳定性两方面的分析，CS法都得到了发展[2]—[28]。CS法的这两类发展看起来距离相当远，因为问题的背景和所讨论的稳定性的类型很不相同。然而，它们同有一个共同的基本想法，其表现在定理证明的明显的平行性。此外，当应用于具有实际意义的某一类大系统时，如果对两边做二次阶分析，则由CS法得到的两类稳定性的条件是互相吻合的。说得更确切一些，可以证明，L_2稳定性（即二次阶输入一输出稳定性）的频率域条件，对于借助于复合系统法和用二次阶Lyapunov函数进行成功的Lyapunov分析定来是充分的（在限定的意义上也是必要的）。[1]

考虑到上述情形，作者决定在这篇论文里既包括Lyapunov稳定性也包括输入一输出稳定性，集中注意于采用M－矩阵的二次阶理论。在第二节中用CS法于Lyapunov稳定性分析。在那里，利用二次型Lyapunov函数（从二次阶拓广）对大范围一致渐近稳定性的分析得到了详尽的研究，而且运用其他形式的Lyapunov函数对其他Lyapunov稳定性的分析也有讨论。在第三节中，CS法被用于输入一输出稳定性的分析。特别地，详细研究了L_2稳定性，而且为两类实用的大系统写出了频率域稳定性准则。在第四节中，比较了上面两节的方法和结果。在第五节，给出了书目评注及其他注解。关于M－矩阵的定理和定义汇集于附录A，而有关Lyapunov稳定性则放在附录B。必须指出，比如说，定理A1是附录A的第一条定理，等等。

---

1) 这一结果是关于圆准则(circle criterion)和二次阶Lyapunov函数对复合系统情形的一个众所周知事实的推广。

采用了以下的略写符号："Composite system"（复合系统）略记为 CS；SS 表示"Subsystem"（子系统）；a.s.i.l. 既表示是"asymptotic stability in the large"（大范围渐近稳定性）又表示是"asympotically stable in the large"（在大范围内渐近地稳定）；而 IO 是"input-output"（输入—输出）的略写。单竖 | | 用来表示 $x\in R^m$ 的欧几里得范数；由

$$|x| = \left\{ x_1^2 + \cdots + x_m^2 \right\}^{1/2}$$

给出，同时也表示一个数量的绝对值。双竖 ‖ ‖ 用来表示一个时间函数 $Z(t)$，$t\in R$ 的范数定义，如下：

$$\|Z\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} Z(t)^T Z(t)\,dt \right\}^{1/2} \quad Z\in L_2^{(\mu)}。$$

Ⅱ. 复合系统的李雅普诺夫稳定性

A. 问题的背景，主题以及方法之概要

考虑一个由

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \qquad x\in R^m,\quad t\in R \tag{1}$$

给出的动态系统。其中假定 $f(x,t)$ 满足解对任意初值条件的存在性、唯一性和连续性所必需的光滑性要求。并且还满足

$$f(0,t) = 0 \qquad t\in R \tag{2}$$

因此 $x=0$ 是一个平衡位置。在系统规模很大（即 m 是大的且 f 是大的且 f 是复杂的）的情形下，我们希望确保平衡位置 $x=0$ 的 Lyapunov 稳定性，但这时直接对（1）构造 Lyapunav 函数很困难。在这种情况，我们通常可以期望系统由一些较小

的子系统组成。所以，我们假设（1）能被分解成

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1,t) + g_1(x,t) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_n t) + g_n(x,t)
\end{aligned}
\qquad (CSI)
$$

其中 $x_j \in R^{m_j}$，$m_1+\cdots+m_n=m$，$x=(x_1^T,\cdots,x_n^T)^T$，而且 $f_j(x_j,t)$ 及 $g_j(x,t)$ 满足关系

$$f(x,t)=(f_1(x_1,t)^T+g_1(x,t)^T,\cdots,f_n(x_n,t)^T+g_n(x,t)^T)^T$$

并假定满足

$$f_j(0,t)=0 \quad j=1,\cdots,n;\quad t\in R \qquad (3)$$

$$g_j(0,t)=0 \quad j=1,\cdots,n;\quad t\in R\text{。} \qquad (4)$$

我们的观点是把系统（1）看做由 n 个状态向量为 x_j 的子系统组合成的。也就是说，我们认为系统（1）是由具有输入为 y_j、输出为（状态本身）x_j 的互相关联的几个动态系统：

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_j,t)+y; \qquad (5-j)$$

组合而来，并由下列关系式相关联

$$y_j = g_j(x_j,t).$$

反映这一观点，我们称由（1）［等价地，由方程（CS1）］给出的系统为复合系统（1）（简写作CS1），称由（5-j）给出的系统为第 j 个子系统。而称 $g_j(x,t)$ 为互相关联（interconnection）。为方便起见，考虑自由动态系统

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_j,t) \qquad (5h-j)$$

我们将称它为第 j 个孤立子系统。下面，我们仅仅研究关于(CSI)的平衡位置 $x=0$ 和孤立子系统的平衡位置 $x_j=0$ 的稳定性。因此，我们只说CSI（或孤立子系统）是稳定的，渐近稳定的，$a.s.i.l$，等等。倘若 $x=0$（或 $x_j=0$）具有这种性质的话。

现在，让我们来对如何分析CSI做一个一般的考虑。由于分解系统的结果，使我们可以指望对孤立系统构造Lyapunov函数变得比较容易一些（倘若它们是稳定的）。因此，我们假定Lyapunov函数 $v_j(x_j,t)$ 是为每一孤立子系统构造的，并且考虑它们的加权和（设 $d_1,\cdots,d_n$ 为正常数）：

$$v(x,t)=d_1v_1(x_1,t)+\cdots+d_n v_n(x_n,t) \quad (6)$$

作为CSI的Lyapunov函数的待选函数。因为 $v(x,t)$ 从 $v_j(x_j,t)$ 承继了定正[2)]，渐减[2)]（decrescence）和径向无界[2)]的性质。我们要检验的唯一条件是 $dv/dt|_{(CSI)}$（沿着(CSI)的解的导数）的定负性。

从(6)，我们得到

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(CSI)}=\sum_{j=1}^{n} d_j \left.\frac{dv_j}{dt}\right|_{(CSI)}$$

其中

$$\left.\frac{dv_j}{dt}\right|_{(CSI)}=\frac{\partial v_j}{\partial t}+(\mathrm{grad}_j v_j)^T\{f_j(x_j,t)+g_j(x,t)\} \quad (8)$$

$$=\left.\frac{dv_j}{dt}\right|_{(Sn-j)}+(\mathrm{grad}_j v_j)^T g_j(x,t),$$

$$\mathrm{grad}_j\, v_j=\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_1^{(j)}},\cdots,\frac{\partial v_j}{\partial x_{m_j}^{(j)}}\right)^T$$

---

2) 见附录B。

而 $x_k^{(j)}$ 是 x_j 的第k个分量。于是，(7)和(8)启示了稳定性分析的以下步骤。

由复合系统方法进行李雅普诺夫稳定性分析的一般程序：

步骤A（子系统的分析）求得 $dv_j/dt|_{(Sh-j)}$ 的一个界。

步骤B（互相关联的分析）求得 $g_j(x,t)$ 的一个界。

步骤C（互相关联结构的稳定性条件）尝试出能保证在上述界限下使(7)为是负的（所有）α_j 存在的条件。

在 II-B-II-D 里的定理几乎都按上述步骤得到。它们之间的差别来源于步骤A和B所用的界。

B 运用二次型李雅普诺夫函数的大范围一致渐近稳定性准则

关于CS1的一致 $a.s.i.l$，我们有下面的定理。

定理I：如果下述三个条件得到满足，则CS1为大范围一致渐近稳定。

Ia) 对每一孤立子系统，存在一个定正，渐减、径向无界的函数 $v_j(x_j,t)$，它有连续的偏导数，使得

$$\left.\frac{dv_j}{dt}\right|_{(Sh-j)} \leqslant -\alpha_j\{u_j(x_j)\}^2 \quad x_j\in R^{n_j};\ t\in R \qquad (9)$$

$$|grad_j\, v_j| \leqslant u_j(x_j) \qquad x_j\in R^{n_j};\ t\in R \qquad (10)$$

其中 α_j 是一正常数，而 $u_j(x_j)$ 是一定正函数。

Ib) 存在非负常数 β_{jk}，使得

$$|g_j(x,t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}u_k(x_k) \qquad x\in R^{n};\ t\in R. \qquad (11)$$

Ic) 由 $a_{jj}=\alpha_j-\beta_{jj}$；$a_{jk}=-\beta_{jk}\ (j\neq k)$ (12)

给定的 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{jk})$ 是一个M-矩阵。即A的顺序

主子式都是正的，亦即

$$D_j \triangleq \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{bmatrix} > 0 \quad j=1,\cdots,n \tag{13}$$

证明：由1c)，我们能够选择 $d_j>0$，使得 $DA+A^TD$ 是一个正定矩阵，这里 $D=diag(d_1,\cdots,d_n)$（由定理A1）。由(6)定义 $v(x,t)$。则 $v(x,t)$ 是定正，渐减且径向无界的。从(7)－(12)，我们得到

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(CS1)} \leq \sum_{j=1}^{n} d_j\left[-\alpha_j\{u_j(x_j)\}^2+u_j(x_j)\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}u_k(x_k)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(d_j a_{jk}+d_k a_{kj})u_j(x_j)u_k(x_k). \tag{14}$$

因为 $DA+A^TD$ 是正定的，(14)的右边是 x 的一个定负的函数。因而，CS1是一致地a.s.i.l的（由定理B1）。（证毕）

定理的三个条件对应于II－B中叙述的一般程序的三个步骤。1a)意味着孤立子系统的大范围一致渐近稳定性和 $v_j(x_j,t)$ 是一个Lyapunov函数。如稍后给出的例中所看到的，这一条件为二次函数 $v_j(x_j,t)=x_j^TP_jx_j$ 所典型地满足。如此，满足条件1a)的 $v_j(x_j,t)$ 称为二次型Lyapunov函数。常数 α_j 在给出Lyapunov函数关于 $u_j(x_j)^2$ 的减少速率的一个下界的意义上说来，代表着"稳定度"。另一方面，在给出 $g_j(x,t)$ 的关于 $u_k(x_k)$ 的一个上界的意义上说来，1b)的常数 β_{jk} 表示"互相关联的强度"。A为M－矩阵的这个条件(1c)中所要求的）意味着对角线上的元素比起非对角线上的元素来"叁个地较大"[36][37]。由此，考虑(12)，我们得到以下的解释：定理1说的是，如果子系统的稳定度叁个地比互相

关联的强度大，则全系统是稳定的。

应用定理 1，我们需要获得满足 1a) 和 1b) 的函数 v_j 及 u_j。对大多数 Lyapunov 函数问题说来，通常没有求出 v_j 及 u_j 的一般方法。幸而，几种适合我们用途的 v_j 及 u_j，可以根据以往的研究结果求得。

例 1：（线性子系统）假设 $f_j(x_j,t)=F_j x_j$，这里 F_j 是一个 Hurwitz 矩阵。并假设 $g_K(x,t)$ 允许一个关于 x_j 为线性阶的界。于是，我们可以应用 $v_j(x_j,t)=x_j^T P_j x_j$ 及 $u_j(x_j)=r_j(x_j^T Q_j x_j)^{1/2}$，其中 P_j 和 Q_j 为正定矩阵，满足 $P_j F_j+F_j^T P_j=-Q_j$ 以及 $r_j=\max_{x_j\neq 0}|2P_j x_j|/(x_j^T Q_j x_j)^{1/2}$。对这些 v_j 及 u_j 而言，(9) 中的 $\alpha_j=1/r_j^2$。

例 2：（绝对稳定性问题中讨论的系统）3) 假定第 i 个孤立子系统是绝对稳定性问题[31]中所讨论的系统。则如众所周知的，在一特定条件下，函数

$$v_j(x_j,t)=x_j^T P_j x_j+\theta_j\int_0^{c_j^T x_j}\phi_j(\sigma)\,d\sigma$$

（P_j 是正定矩阵；θ_j 是常数；c_j 是 m_j 维向量，ϕ_j 是含于系统的非线性函数且满足扇形条件）成为一个 Lyapunov 函数且 (9) 成立，并有 $\alpha_j[u_j(x_j)]^2=\tilde{x}_j^T\tilde{Q}_j\tilde{x}_j$，其中 $\tilde{x}_j=(x_j^T,\phi_j(c_j^T x_j))^T$，而 $\tilde{Q}_j$ 是一个适当的正定矩阵。这样，如果 $g_K(x,t)$ 提供了一个关于 $\tilde{x}_j$ 为线性阶的界，我们能够一起运用上述的 v_j 和 $u_j(x_j)=r_j(\tilde{x}_j^T\hat{Q}_j\tilde{x}_j)^{1/2}$（$r_j$ 是 (10) 的

---

3) 对不熟悉绝对稳定性问题的读者，[25]可提供颇为详细的解释以及具体的结果。[13] 的第 V 节及[47]的 III 节也是了解这种讨论的好的参考文献，虽然这两篇论文并不是直接与定理 1 有关。

一个比例因子。

例3：（指数稳定的子系统）如果第 j 个孤立子系统是指数稳定的．从[30]知道有一个 Lyapunov 函数 $v_j(x_j,t)$ 满足

$$\left.\frac{dv_j}{dt}\right|_{(5h-j)}\leqslant -\epsilon_{j1}|x_j|^2;\qquad |grad_j\, v_j|\leqslant \epsilon_{j2}\,|x_j|。$$

因此，如果 $g_K(x,t)$ 允许一个关于 x_j 为线性阶的界，我们就能一起运用这个 v_j 和 $u_j(x_j)=\epsilon_{j2}|x_j|$（上面保证了 v_j 的存在，然而不幸地是未给出计算它的任何确定的办法。）。

例4：（非指数稳定的子系统）假设 $n_j=1$ 且 $f_j(x_j,t)=-\phi_j(x_j)$

其中 $0<\phi_j(x_j)x_j\quad(x\neq 0)$；$\Phi_j(x_j)\triangleq\int_0^{x_j}\phi_j(\sigma)d\sigma\to\infty$ 当 $|x_j|\to\infty$。又设 $g_K(x,t)=C_{Kj}\phi_j(x_j)+g_K'(x,t)$ 这里 $g_K'(x,t)$ 是不依赖于 x_j 的函数。于是我们能够运用 $v_j(x_j,t)=\Phi_j(x_j)$ 及 $u_j(x_j)=|\phi_j(x_j)|$。若 $\phi_j(x_j)$ 为有界，则孤立子系统是非指数稳定的。

定理1假定所有孤立子系统是 a.s.i.l. 的，且 $u_j(x_j)$ 是定正的。这些假定可以如下面一样减弱，而对于取得一个更敏捷的准则来说，定理2是更受推荐。我们指出，在上面例子中的 v_j 及 u_j 也可运用于定理2。

定理2：CS1是大范围一致渐近稳定的，若满足以下三个条件：

2a) 对每一孤立子系统，存在一定正、渐减、径向无界且有连续偏导数的函数 $v_j(x_j,t)$，使得

$$\left.\frac{dv_j}{dt}\right|_{(5h-j)}\leqslant -\alpha_j\{u_j(x_j)\}^2-w_j(x_j)\quad x_j\in R^{n_j};\ t\in R\quad(15)$$

其中 α_j 是一常数，$u_j(x_j)$ 是非负定函数而 $w_j(x_j)$ 是定正函数。

2b) 存在一常数 β_{jK}，满足 $\beta_{jK}\geq 0$，当 $j\neq K$ 时，使得

$$(\mathrm{grad}_j\, v_j)^T g_j(x,t) \le u_j(x_j)\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}\, u_k(x_k) \quad x\in R^m;\ t\in R \quad (16)$$

2c) 同(1C)。

证明完全跟定理1的证明平行。要注意，在这里 $u_j(x_j)$ 可以是非定负的，因为加上了 $w_j(x_j)$。这一点在当 $g_j(x,t)=\sum_{k=1}^{n} C_{jk}x_k$ 和矩阵 C_{jk} 不是满秩的时候显得很重要（参考IV-B节）。还应注意 β_{jj}，从而 α_j 可以是负的，因为 $(\mathrm{grad}_j\, v_j)^T g_j$ 是直接估算的。这允许子系统是不稳定的，当 g_j 明显地依赖 x_j 时成为很重要。

例5：（不稳定子系统）设 $n=2$ 及 $m_j=1$，

$f_j(x_j,t)=0.5x_j\ (j=1,2)$，

且
$$g_1(x,t)=-x_1\cosh\phi_1(x_2,t)+0.4x_2;$$
$$g_2(x,t)=-x_2\cosh\phi_2(x_1,t)+0.4x_1\sin x_2 x_1$$

其中 ϕ_1 及 ϕ_2 为实值函数。通过利用 $v_j(x_j,t)=x_j^2/2$ 和 $u_j=|x_j|\,(j=1,2)$，我们得到 $\alpha_1=\alpha_2=-0.5$，$\beta_{11}=\beta_{22}=-1$，$\beta_{12}=\beta_{21}=-0.4$。对于这些值，2C)是满足的，而因此根据定理2，是一致地a.s.i.l.（因为孤立子系统是不稳定的，定理1显然不能用）。

C、大范围一致渐近稳定的其他准则。

由改变对 $dv_j/dt\,|_{(Sh-j)}$ 和对 g_j 的假设，我们可以得到如下几个不同的稳定性准则：

定理3：CS1是一致a.s.i.l.的，若下列三条件得到满足。

3a) 对 $\alpha_j>0$，2a) 得到满足。

3b) 存在一个非负常数 δ_{jk}，使得

$$(\mathrm{grad}_j\, v_j)^T g_j(x,t) \le u_j(x_j)\Big[\sum_{k=1}^{n} \delta_{jk}\{u_k(x_k)\}^2\Big]^{1/2},\ x\in R^m;\ t\in R \quad (17)$$

3c) $n\times n$ 矩阵 $A'=(a'_{jk})$ 是一个 M－矩阵，其中

$$a'_{jj}=\alpha_j^2-\delta_{jj},\quad a'_{jk}=-\delta_{jk}\quad (j\neq k) \tag{18}$$

证明：由 3c)，存在 $d'_j>0$ 使得 $\sum_{j=1}^n d'_j a'_{jk}>0$（由定理 A1）．按 (6) 式定义 $v(x,t)$，其中 $d_j=\alpha_j d'_j$。从 (15) 和 (17)，我们得到

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(CS1)}\leqslant\sum_{j=1}^n d_j\left\{-\alpha_j u_j^2-w_j+u_j\left(\sum_{k=1}^n\delta_{jk}u_k^2\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^n d_j\left\{-\frac{\alpha_j}{2}u_j^2+\frac{1}{2\alpha_j}\sum_{k=1}^n\delta_{jk}u_k^2-w_j\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\sum_{j=1}^n d'_j a'_{jk}\right)u_k^2-\sum_{j=1}^n d_j w_j\text{。}^{4)} \tag{19}$$

右边是定负的，因此我们有一致 a.s.i.l.。（证毕）

定理 2 和 3 能够应用于同一复合系统，但也可能出现一个成立，而另外一个失效的情形：

例 6．设 $n=3$，$m_1=m_2=m_3=1$，且对于 $v_j(x_j,t)=x_j^2/2$，$u_j(x_j)=|x_j|$ 及 $\alpha_j=4.1$ $(j=1,2,3)$，(15) 式得到满足的。考虑这种情形，其时

$g_1(x,t)=x_2+3x_3$；$g_2(x,t)=3x_1+x_3$；$g_3(x,t)=x_1+3x_2$。

于是，我们可得 $\beta_{12}=\beta_{23}=\beta_{31}=1$，$\beta_{13}=\beta_{21}=\beta_{32}=3$，$\delta_{12}=\delta_{23}=\delta_{31}=2$，$\delta_{13}=\delta_{21}=\delta_{32}=18$。这些值使 2c) 满足，但 3c) 不满足。因而，定理 2 断定为一致 a.s.i.l.；定理 3 却不能（这里 $\beta_{jj}=\delta_{jj}=0$；$j=1,2,3$）。

例 7：在例 6 中，改变互相关联的形式使之成为

$$g_1(x,t)=(8x_2^2+8x_3^2)^{1/2};$$

---

4) 不等式 $-ac^2+bc\leqslant-(1/2)ac^2+(b^2/2a)\ (a>0)$ 被用来导出第二行。

$$g_2(x,t)=(8x_1^2+8x_3^2)^{1/2};$$
$$g_3(x,t)=(8x_1^2+8x_2^2)^{1/2}.$$

于是，我们得到 $\beta_{jk}=2\sqrt{2}$ 及 $\delta_{jk}=8$ ($j,k=1,2,3;\ j\neq k$)。对这些值 2c) 不满足，但 3c) 却满足。因而，从定理3可得出一致 a.s.i.l. 的结论，而从定理2却得不到（这里 $\beta_{jj}=\delta_{jj}=0;\ j=1,2,3$）。

上面的区别显然来自于用于估算互相关联的函数的形式是否跟实际的互相关联的函数相匹配。其次，变更关于 $dv_j/dt|_{(sh\text{-}j)}$ 的假设，我们得到：

定理4：CS1 为一致地 a.s.i.l. 的，若下述两条件得到满足。

4ab) 对每一子系统，存在一个定正、渐减且径向无界函数 $v_j(x_j,t)$，使得 $D^+v_j|_{(CS1)}$ 存在并满足

$$D^+v_j|_{(CS1)}\leqslant-\alpha_j u_j(x_j)-w_j(x_j)+\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}u_k(x_k),\ x\in R^m;\ t\in R \tag{20}$$

其中 α_j, $u_j(x_j)$ 和 $w(x_j)$ 是如同 2a) 中所说的，β_{jk} 当 $j\neq k$ 时是常数，满足 $\beta_{jk}\geqslant 0$，而 $D^+v_j|_{(CS1)}$ 是由

$$D^+v_j|_{(CS1)}=\lim_{h\to+0}\frac{v_j(x_j(t+h),t+h)-v_j(x_j(t),t)}{h}$$

定义的。其中 $x_j(t)$ 是 (CS1) 的解。

4c) 跟 2c) 一样。

定理5：CS1 是一致地 a.s.i.l. 的，若以下两条件满足：

5ab) 对每一个子系统，存在一个定正，渐减且径向无界的函数 $v_j(x_j,t)$ 使得 $D^+v_j|_{(CS1)}$ 存在并满足

$$\epsilon_{j1}u_j(x_j)\leqslant v_j(x_j,t)\leqslant\epsilon_{j2}u_j(x_j) \tag{21}$$

$$D^+v_j|_{(CS1)}\leqslant-\epsilon_{j3}u_j(x_j)-w_j(x_j)+\left[\sum_{k=1}^{n}\delta_{jk}\{u_k(x_k)\}^2\right]^{1/2} \tag{22}$$

其中 ϵ_{j1}，ϵ_{j2}，ϵ_{j3} 和 δ_{jk} 是非负常数，而 $u_j(x_j)$ 和 $w_j(x_j)$ 如 2a) 中所设。

5c) 对于由 $\alpha_j = \epsilon_{j1}\epsilon_{j3}/\epsilon_{j2}$ (23)

给出的 α_j 的值 3c) 满足。

在上面的两个定理中，我们使用 $D^+v_j|$(CS1)（即避免用 $dv_j/dt|$(5n-j) 及 $grad_j v_j$），因为如在[13]和[18]里所见，一个满足 4ab)（或 5ab）的 v_j 的典型例子是 $v_j(x_j,t)=|x_j|$，它在 R^m 的子空间 $x_j=0$ 上是没有偏微商的，所以若是没有上述发现，要获得满足要求的合适的 v_j 是难以置信的。这里的证明同定理2的和定理3是平行的，对于定理5，我们除了运用

$$v'(x,t)=d_1v_1(x_1,t)^2+\cdots+d_n v_n(x_n,t)^2 \qquad (24)$$

来代替(6)式的 $v(x,t)$ 外（对定理4，参考[18]）。我们能找得到跟例6和例7类似的这种例子，它们显示出定理2-5的独立性。

我们称满足条件 4ab) 的函数 v_j 为线性型的，而称满足 5ab) 的函数为线性阶的（其差别在(21)中定义）。

D 其他类型的李雅普诺夫稳定性准则

如果我们在定理1-5中去掉关于 v_j 的径向无界性的假定，则得到判断一致渐近稳定性的定理。在那种情况下，对吸引区域的研究就变得重要[38]，[39]。如果我们不但去掉上述假定，还从(15)，(20)及(22)中去掉 $w_j(x_j)$，则得到判断一致稳定的定理。

Ⅲ 复合系统的输入—输出稳定性.

A. 问题背景

令 $Z^{(u)}$ 是时间 $t\in R$ 在 R^u 中取值的函数 $Z(t)$ 的一个赋范空

间。以 $Z_e^{(\mu)}=\{Z \mid Z_\tau\in Z^{(\mu)}$ 对 $\forall\tau\in R\}$ 定义扩充的赋范空间 $Z_e^{(\mu)}$，其中 Z_τ 是由 $Z_\tau(t)=Z(t)$ 当 $t<\tau$ 和 $Z_\tau(t)=0$ 当 $t\geq\tau$ 所定义的 Z 的截短函数。我们模仿一个（物理的，经济的，等々）具有输入及输出的系统，把它看作一个从 $Z_e^{(\mu)}$ 到其自身的算子 G，一个算子 G 叫做是 IO 稳定的，如果存在非负常数 γ 和 γ'，使得

$$\|(Gz)_\tau\|\leqslant\gamma\|Z_\tau\|+\gamma' \qquad \tau\in R$$

这里以 $\|\ \|$ 记 $Z^{(\mu)}$ 中的范数。对一个满足 $G0=0$ 的算子 G，我们定义增益：

$$\operatorname{gain} G \triangleq \sup_{z\in Z_e^{(\mu)},\,\tau\in R}\frac{\|(Gz)_\tau\|}{\|Z_\tau\|}\text{。}$$

设 z, e, e', y 和 y' 为 $Z_e^{(\mu)}$ 的元，令 C, C', F 和 G 是从 $Z_e^{(\mu)}$ 到其自身的算子，且 $F0=0$ 及 $G0=0$，并考虑 IO 反馈系统

$$e=Cz+y' \quad ; \quad y=Fe$$

$$e'=C'z+y \quad ; \quad y'=Ge'$$

其中 z 是系统的输入（图 1 (a)）。假设系统(25)是适定的(Well--posed)，亦即对任意给定的 $z\in Z_e^{(\mu)}$ 和四个相应地把 z 映像成为解 e, e', y 和 y' 的算子 E, E', Y 及 Y'，存在(25)的唯一的解 e, e', y 和 y'，具有作为物理系统的模型的适宜的性质。要详细了解上述术语与公式，请参考[33]－[35]。下面，我们研究四个算子 E, E', Y 和 Y' 的 IO 稳定性。因为我们只研究这种情形，就是下述的四个算子的 IO 稳定性同时被保证时的情形。我们简单地称输入 输出反馈系统(25)为 IO 稳定的，如果 E, E', Y 和 Y' 全都是 IO 稳定的。（当我们考虑 L_2 空间代替 $Z^{(\mu)}$ 时，我们使用 L_2 稳定的这个术语）。

这里，我们考虑这种情形，即把 $Z^{(\mu)}$ 看作是 n 个子空间 $Z^{(\mu_j)}$ 的直积的情形是适宜的，其中 $\mu_1+\cdots+\mu_n=\mu$，并且

$$\|z\| = \{\|z_1\|^2+\cdots+\|z_n\|^2\}^{1/2}$$

$$z = (z_1^T,\cdots,z_n^T)^T; \qquad z_j \in Z^{(u_j)} \tag{26}$$

我们假定(25)的每个方程能分解为n个部分：

$$\begin{aligned} e_j &= C_j z + y_j' ; & y_j' &= F_j e_j \\ e_j' &= C_j' z + y_j ; & y_j &= H_j e_j' + G_j e' \end{aligned} \qquad j=1,\cdots,n \tag{CS25}$$

其中e_j, e_j', y_j和y_j'是$Ze^{(u_j)}$中的元；$e=(e_1^T,\cdots,e_n^T)^T$，$y=(y_1^T,\cdots,y_n^T)^T$，等々。F_j和H_j为从$Ze^{(u_j)}$到自身的算子，而C_j, C_j'和G_j为从$Ze^{(u)}$到$Ze^{(u_j)}$的算子。在(CS 25)里新做的假定是y_j'仅々依赖于e_j。[5] 之所以引入这个假设，是因为它相当地简化了下面的讨论，并且在大多数重要的情况中都可接受。现在，如果我们把$G_j e'$项从(CS25)的第4个方程中去掉，我们得到n个分离的IO反馈系统(即子系统)，如图16所示。在这个意义上，我们称由(25)给出的IO反馈系统(跟CS25给出的等价，如果采纳上面所说的假定。)为复合IO反馈系统(25)(简称CS25)；而称算子G_j为互相关联。[6] 下面，我们从F_j, H_j和G_j的性质来推出保证CS25的IO稳定性的定理。

我们采用以下的记号和规定。$L_2^{(u)}$表示在R^u中取值的函数的L_2空间，其中内积$\langle\ ,\ \rangle$和范数$\|\ \|$由下面给出：

$$\langle z,y\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} z(t)^T y(t)dt; \quad \|z\|^2=\langle z,z\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\{z_1(t)^2+\cdots+z_u(t)^2\}dt. \tag{27}$$

设$\bar{\bar{f}}(t)$为一脉冲响应函数(即对$t<0$, $\bar{\bar{f}}(t)=0$)而$\bar{\bar{f}}_\infty$为一常数。从$L_{2e}^{(1)}$到其自身的线性算子定义为

---

5) 即我们假定 $y'=Fe \Leftrightarrow y_j'=F_j e_j$ 及 $y=Ge' \Leftrightarrow y_j=H_j e_j'+G_j e'$

6) 在IV节中将证明，上述解释跟II节中的状态空间的提法是相匹配的。

$$z(t) \mapsto \bar{\bar{f}}_{\infty} z(t) + \int_0^t \bar{\bar{f}}(t-\tau) z(\tau) d\tau$$

将由Laplace变换$\bar{f}(s)$来代表，$\bar{f}(s)$由下式给出

$$\bar{f}(s) = \bar{\bar{f}}_{\infty} + \int_0^{\infty} \bar{\bar{f}}(t) e^{-s\tau} dt。$$

B. 主题与分析方法的概要

记住下面由Zames[33]得到的著名结果。

小增益（Small Gain）定理　由(25)给定的IO反馈系统是IO稳定的，若

$$(\text{gain } F) \cdot (\text{gain } G) < 1。 \tag{28}$$

下面的例子指出有关上述定理应用于多输入—多输出情形的一个重要特点。

例8：考虑图2中定义在$L_{2e}^{(2)}$上的IO反馈系统，其中实值函数$\phi(\sigma)$假定满足$|\phi(\sigma)| \leq |\sigma|$。如果我们计算关于由(27)给出的范数的增益F及增益G，就得到[7)]

$$\text{gain } F = 0.6\ ;\ \text{gain } G \leq \sqrt{\lambda_{max}(G^T G)} \cong 2.86, \text{其中} G = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}。$$

---

7) 增益的计算如下。令F_1和F_2为相应于变换函数$0.6/(1+s)(1+2s)$和$0.6/(1+3s)(1+0.5s)$的从$L_{2e}^{(1)}$到其自身的线性算子。则因为$Fz = (F_1 z_1, F_2 z_2)^T$和$\|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2$，我们得到$\text{gain } F = \max(\text{gain } F_1, \text{gain } F_2)$。从转移函数的Nyquist图，得$\text{gain } F_1 = \text{gain } F_2 = 0.6$ [33]。至于G，计及其时不变性，$\text{gain } G = \gamma$，这里γ是瞬时增益，由下式给出：

$$\gamma = \sup_{(y_1, y_2) \neq (0,0)} \left(\frac{\{y_1 + 2.5\phi(y_2)\}^2 + \{0.1\phi(y_1) + y_2\}^2}{y_1^2 + y_2^2} \right)^{1/2}$$

因为对函数ϕ，我们只知道$|\phi(\sigma)| \leq |\sigma|$，只能给出G的上界。最小上界从上述知识可以得到，是以$\pm y_1$和$\pm y_2$相应地代换$\phi(y_1)$和$\phi(y_2)$而得的γ的最大值。在这种情形，最大值是对$+y_1$和$+y_2$得到的。