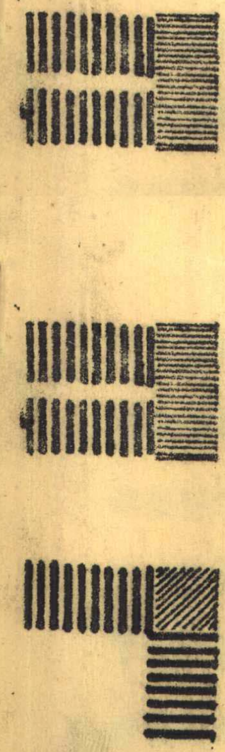
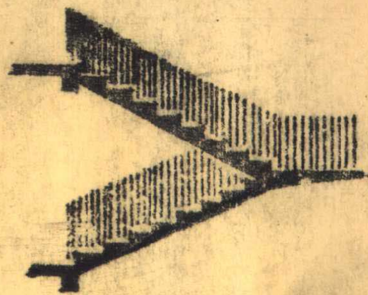
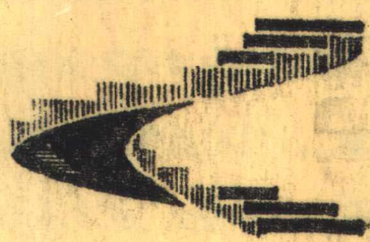
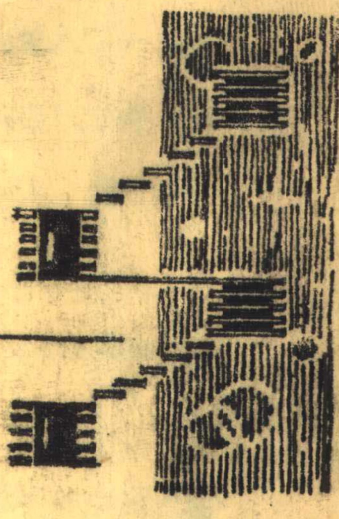
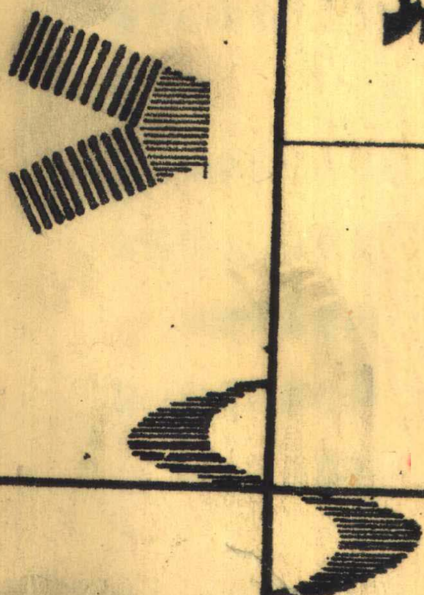


楼梯结构设计









内部资料
仅供参考

天津市建筑设计院情报组

1984

前　　言

目前在建筑设计中，楼梯型式多种多样，常见的有普通标准型楼梯（包括目前我们最常用的代梁和无梁折板式楼梯），悬挑折板式楼梯（包括两跑或三跑悬挑楼梯），螺旋楼梯，折式楼梯等。对这些楼梯的结构计算方法，过去已有很多建议而得到普遍推广应用。但资料分散，难于查找。为便于我院设计人员参考应用，我们编录了这本册子，其中除选编了部分国外研究成果外，也编入了一些国外最近的研究论文。有的为了应用我们将一些繁复的公式推导过程删节，但有的因力量水平所限我们只能全部将译文编入，供大家研究分析。

部分楼梯计算已由我院研究室编成电算程序，（TRS—80微型计算机），程序使用说明列后供大家使用。

本册子最后还选录了几个我院设计并已建成工程中的混凝土楼梯构造图及国外部分楼梯构造图。

编录的内容不一定恰当，有谬误处请指教。

已建工程楼梯结构构造实例（录自本院施工图）

及部分国外楼梯建筑构造实

例（录自北京市建筑设计院

情报组高宝真等编“国外楼梯”。另件附册

目　录

无支柱楼梯—悬挑楼梯的设计与实例 1

三跑悬挑楼梯计算 39

园弧形楼梯设计 81

折板楼梯的结构设计 118

一、钢筋混凝土楼梯的弹塑性状态 118

二、コ型悬挑楼梯 146

三、V、L型悬挑楼梯 174

四、标准折板楼梯 190

用柱比法计算折式楼梯 212

无支撑悬挑楼梯（分析及详图） 230

悬挑楼梯荷载试验 245

二跑悬挑楼梯计算程序使用说明 249

园弧形楼梯设计计算程序使用说明 257

三跑悬挑楼梯计算程序使用说明 263

已建工程楼梯结构构造实例及部分

国外楼梯建筑构造实例　（另附图）

无支柱楼梯—大悬挑楼梯

<费氏法Fuchssteiner>

一、结构形式：

大悬挑楼梯是利用无梁支承的楼梯平台，把上下梯段连接形成空间结构。这种结构形式，轻巧美观，有独特的建筑效果，图(一)。应力分析时，首先把楼梯简化为由杆件单元组成的空间构架用积分法及最小功原理计算变形，从弹性方程式解出冗余力。

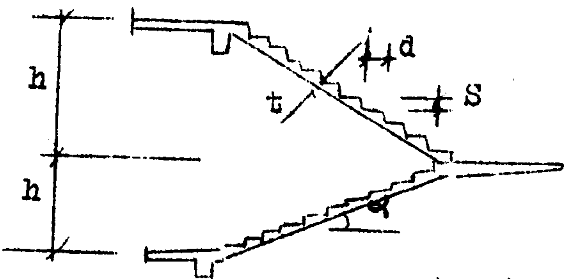
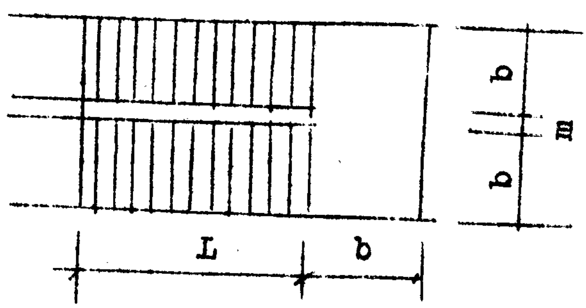


图 (一)



二、基本假定：楼梯端为固定端

(FuchsSteiner)费氏分析方法是假定楼梯支承于楼梯段与楼梯平台的相交线上。在假想支承点施加一个大小相等方向相反的力来代替支座反力。楼梯上下两端与楼板固定。由于几何形状和荷载对称，可将楼梯在平台处切开，这样就得两根受假设反力作用的悬臂梁，并在平台板切开的截面上存在两个冗余力，即挠曲力矩及剪力。如图(二)由外载冗余力矩和剪力可求得变形代入弹性方程即可求得冗余力矩和剪力值。近而求出各种荷载作用下任意截面处的力和力矩再与支承条件下与平台处连续的结果叠加。

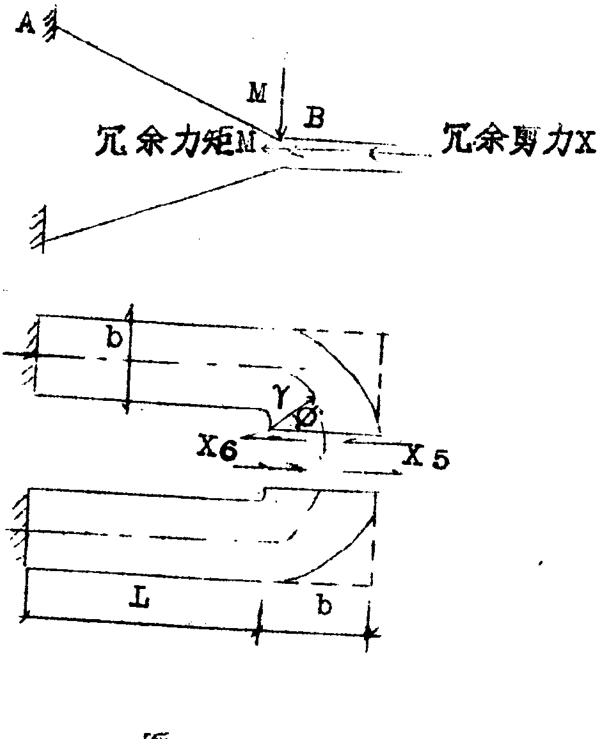


图 二

在很多情况下，楼梯两端并不可能达到完全固定。而只能成为简支或弹性支承。在这种情况下，楼梯可沿支承点自由转动。由于上下梯段是联结在平台上的，楼梯绕支承点的旋转的趋势被作用在楼梯平台平面上的剪力S及平行于剖面B C的剪力所阻止。详图三。

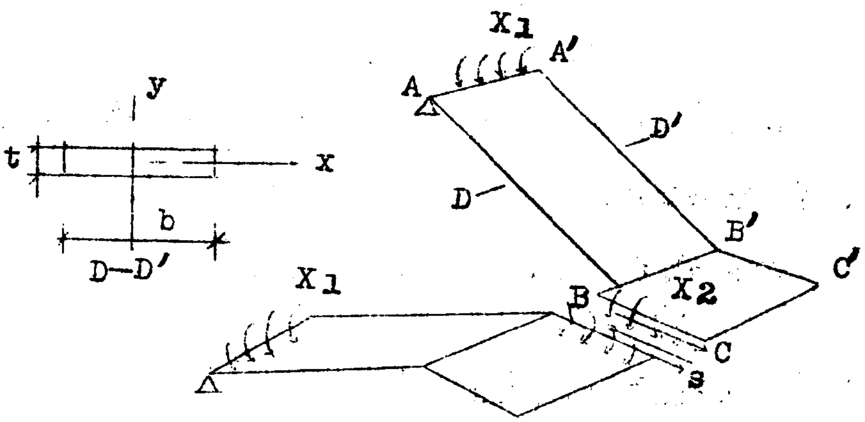


图 三

如果把楼梯分割成对称的两部分；则由于楼梯平台在楼梯井处的突出部份而使梯台趋向以剖面B C为轴心而旋转，致使楼梯板发生扭矩。楼梯平台板实际上是连续的，故上述绕B C轴心的旋转被X_2所阻止。当梯端是固定时则有一未知力X_1存在。由上述分析而得出计算图表详见附录。（计算两种支承条件下的X_1 X_2）。

三、计算方法及步骤：

(一) 由外加荷载及两个未知力作用而产生的变形可由积分法计算，其通式如下

$$EI_x\delta_{ik}=\int M_{xi}\cdot M_{xk}\,d_s+\int M_{xi}\cdot M_{yk}\cdot\frac{I_x}{I_y}\cdot ds$$

$$+\int M_{Ti}\cdot M_{TK}\cdot\frac{EI_x}{GI_T}\cdot ds \quad \text{------------(1)}$$

在计算变形时，剪力和法向力的影响可以略去。在 M_y 方向，由于梯板的形状就象高度很深十分刚劲的梁，因此 M_y 对全部变形所起的作用可以忽略不计，故公式(1)可简化为

$$EI_x\delta_{ik}=\int M_{xi}M_{xk}\,d_s+\int M_{Ti}M_{TK}\cdot\frac{EI_x}{GI_T}ds$$

------------(2)

因为楼梯板的 I_x/I_y 值≈0·01，故可忽略不计。

方程中微分 ds 为：

在梯台：$ds=\gamma\,d\varnothing$

在梯段：$ds=\frac{dx}{\cos\alpha}$

抗扭刚度：$\therefore\quad GI_T=\frac{2EI_xI_y}{I_x+I_y}$

$$\because\quad\frac{GIx}{GI_x}=\frac{1}{2}\left(\frac{I_x}{I_y}+1\right)$$

由公式(2)求得的变形，代入弹性方程即可求出未知力X_1 和X_2：

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\delta_{10}=0 \\ X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\delta_{20}=0 \end{aligned}\right\} \text{------------(3)}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1=\frac{\delta_{10}\delta_{22}-\delta_{20}\delta_{12}}{\delta_{12}^2-\delta_{11}\delta_{22}}=0 \\ X_2=\frac{\delta_{20}\delta_{11}-\delta_{10}\delta_{12}}{\delta_{12}^2-\delta_{11}\delta_{22}} \end{aligned}\right\} \text{------------(4)}$$

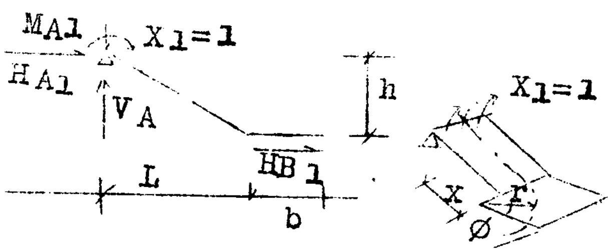
(二) 在各种荷载情况下静定系统中的力和力矩。

当$X_1=1$时

$H_{B1}=H_{A1}=1/h$

$V_{A1}=0$

$M_{A1}=r/h$



平台内：

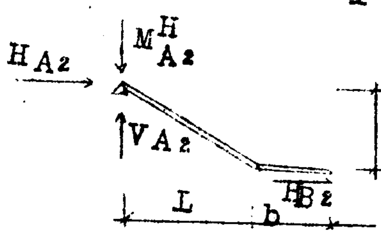
$$\left.\begin{aligned}
&Q_{x_1} = 0\\
&Q_{y_1} = -H_{B_1}\,\mathrm{Cas}\,\varnothing = -\mathrm{Cos}\,\varnothing / h\\
&N_1 = \pm H_{B_1}\,\mathrm{Sin}\,\varnothing = \pm \mathrm{Sin}\,\varnothing / h\\
&M_{y_1} = \pm H_{B_1}\, r\,\mathrm{sin}\,\varnothing = \pm \gamma / h \cdot \mathrm{sin}\,\varnothing\\
&M_{T_1} = 0
\end{aligned}\right\} \text{------(5)}$$

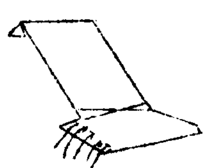
楼梯段内：

$$\left.\begin{aligned}
&Q_{x1} = -H_{B_1}\,\mathrm{Sin}\,\alpha = -\mathrm{Sin}\,\alpha / h\\
&Q_{y1} = 0\\
&N_1 = \pm H_{B_1}\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \pm \mathrm{Cos}\,\alpha / h\\
&M_{x1} = H_{B_1}\,\mathrm{Sin}\,\alpha \cdot x / \mathrm{cos}\,\alpha = (x/h)\,\mathrm{tg}\,\alpha\\
&M_{y1} = \pm H_{B_1}\,\mathrm{Cos}\,\alpha \cdot \gamma = \pm(\gamma/h)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\\
&M_{T1} = \pm H_{B_1}\,\mathrm{Sin}\,\alpha \cdot \gamma = \pm(\gamma/h)\,\mathrm{Sin}\,\alpha
\end{aligned}\right\} \text{---(4)}$$

$M_{A0}^{H} = 0$ $\qquad$ $V_{A_2} = 0$

$M''_{A_2} = 1$ $\qquad$ $H_{A_1} = H_{B_2} = 0$





$X_2 = 1$

当 $X_2 = 1$ 时

平台内：

$$\left.\begin{aligned} Q_{x_2} &= 0 \\ Q_{y_2} &= 0 \\ N_2 &= 0 \\ M_{x_2} &= 0 \\ M_{y_2} &= \cos\varnothing \\ M_{T_2} &= \pm\sin\varnothing \end{aligned}\right\} \text{------} (5)$$

楼梯段内：

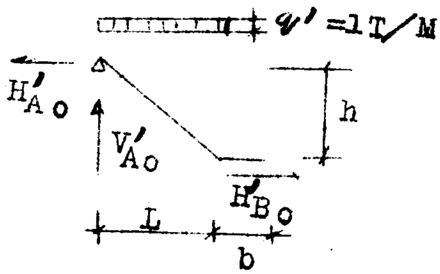
$$\left.\begin{aligned} Qx_2 &= 0 \\ Qy_2 &= 0 \\ N2 &= 0 \\ MX_2 &= 0 \\ M_{y_2} &= \pm\sin\alpha \\ M_{T_2} &= \pm\cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{------} (6)$$

当 q 静 $= 1\ T/M$ （$q_0 = 1\ T/M$）

$$V^1_{A_0} = qL$$

$$H^1_{B_0} = H^1_{A_0} = \frac{q^1 L^2}{2h}$$

$$M^1_{A_0} = \frac{q^1_r L^2}{2h}$$



平台内：

$$
\left.\begin{aligned}
Q'_{x_0} &= 0 \\
Q'_{y_0} &= -H'_{B0}\cos\varnothing = -q' L^2/2h\cos\varnothing \\
N'_0 &= \pm H'_{B0}\sin\varnothing = \pm q' L^2/2h\sin\varnothing \\
M'_{x_0} &= 0 \\
M'_{y_0} &= \pm H'_{B0}\cdot\gamma\sin\varnothing = \pm q' L^2/2h\,\gamma\cdot\sin\varnothing \\
M'_{T_0} &= 0
\end{aligned}\right\} \text{——(7)}
$$

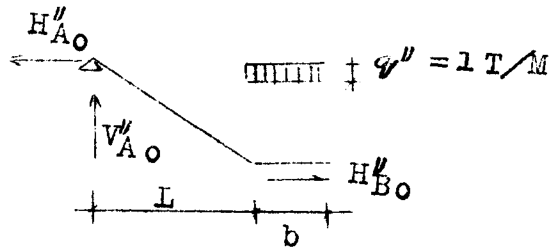
楼梯段内：

$$
\left.\begin{aligned}
Q'_{x_0} &= -H'_{B0}\sin\alpha + q'\cdot\cos\alpha\cdot x \\
&= -q' L^2/2h\sin\alpha + q'\cdot x\cdot\cos\alpha \\
Q'_{y_0} &= 0 \\
N'_0 &= \pm H'_{B0}\cos\alpha \pm q'\cdot x\cdot\sin\alpha \\
&= \pm q' L^2/2h\cos\alpha \pm q'\cdot x\cdot\sin\alpha \\
M'_{x_0} &= + H'_{B0}\cdot x\cdot tg\alpha - \tfrac{1}{2}q'\cdot x^2 \\
&= q' L^2/2h\cdot x\cdot tg\alpha - \tfrac{1}{2}q' x^2 \\
M'_{y_0} &= \pm H'_{B0}\cdot\gamma\cdot\cos\alpha \\
&= \pm q' L^2/2h\cdot\gamma\cdot\cos\alpha \\
M'_{T_0} &= \pm H'_{B0}\cdot\gamma\cdot\sin\alpha \\
&= \pm q' L^2/2h\cdot\gamma\cdot\sin\alpha
\end{aligned}\right\} \text{——(8)}
$$

当$q_{活}=1\ T/M$。 ($q_0''=1T/M$) 时

$$M_A''=\frac{q''\ br}{2h}(2L+b) \qquad H_{B0}''=\frac{q''\ b}{2h}(2L+b)$$

$$V_{A0}''=q''\ b$$



平台内:

$$\left.\begin{aligned}
Q_{x_0}'' &= 0 \\
Q_{y_0}'' &= -H_{B0}''\cos\varnothing \\
&= -q''b/2h\ (2L+b)\cos\varnothing \\
N_0'' &= \pm H_{B0}''\sin\varnothing \\
&= \pm q''b/2h\ (2L+b)\sin\varnothing \\
M_{x_0}'' &= 0 \\
M_{y_0}'' &= \pm H_{B0}''\cdot r\sin\varnothing \\
&= \pm q''b/2h\ (2L+b)\,r\cdot\sin\varnothing
\end{aligned}\right\}\text{———(9)}$$

$$M_{T_0}''=0$$

楼梯段内：

$$Q''_{x_0} = -H''_{B_0}\sin\alpha + q''b\cdot\cos\alpha$$
$$= -\frac{q''b}{2h}(2L+b)\sin\alpha + q''\cdot b\cdot\cos\alpha$$

$$Q''_{y_0} = 0 \quad M''_{T_0} = \pm H''_{B_0}\cdot r\cdot\sin\alpha$$
$$= \pm\frac{q''b}{2h}\cdot(2L+b)\cdot r\cdot\sin\alpha$$

$$N''_0 = \pm H''_{B_0}\cos\alpha \pm q''b\cdot\sin\alpha \qquad --(10)$$
$$= \pm\frac{q''b}{2h}(2L+b)\cos\alpha - q''b\cdot\sin\alpha$$

$$M''_{x_0} = H''_{B_0}\cdot x\cdot tg\alpha - q''b\left(x+\frac{b}{2}\right)$$
$$= \pm\frac{q''b}{2h}(2L+b)\cdot x\cdot tg\alpha - q''b\cdot\left(x+\frac{b}{2}\right)$$

$$M''_{y_0} = \pm H''_{B_0}\cdot r\cos\alpha$$
$$= \pm\frac{q''b}{2h}(2L+b)\cdot r\cdot\cos\alpha$$

㈢ 将上述各项结果代入变形通式:

$X_1=1$时

$X_2=1$时 $$\delta_{11} = \int_0^{l} M_{x_1}^2 dx/\cos\alpha + \int_0^{l} M_{T_1}^2 dx/\cos\alpha$$
$$+\int_0^{t/2} M_{x_1}^2 r\,d\phi + \int_0^{\pi/2} M_{T_1}^2\cdot r\cdot d\phi$$
$$= \int_0^{l}\left(x/h\ tg\alpha\right)^2 dx/\cos\alpha$$
$$+\int_0^{l}\left(r/h\sin\alpha\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{I_x}{I_y}+1\right)dx/\cos\alpha$$
$$= l/3\cos\alpha + r^2\sin\alpha/2h\left(I_x/I_y+1\right) \qquad ---(11)$$

$$\delta_{12}=\int_0^{l} r/h\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha\tfrac{1}{2}({}^{Ix}/{}_{Iy}+1)\,dx/\cos\alpha$$

$$=r\cos\alpha/2\,({}^{Ix}/{}_{Iy}+1)\ \text{----------}\ (12)$$

$$\delta_{22}=\int_0^{\pi/2}\cos^2\varnothing\cdot\gamma\cdot d\varnothing+\int_0^{\pi/2}\sin^2\varnothing\cdot\tfrac{1}{2}(\frac{Ix}{Iy}+1)\,\gamma\cdot d\varnothing$$

$$+\int_0^{l}\cos^2\alpha\cdot\tfrac{1}{2}(\frac{Ix}{Iy}+1)\,dx/\cos\alpha$$

$$=\gamma\pi/2\cdot(3+\frac{Ix}{Iy})+\frac{l\cos\alpha}{2}(\frac{Ix}{Iy}+1)\quad\text{-----}\ (13)$$

梯段在单位荷载作用时：

$$\delta_{10}=\int_0^{l}(H'_{B0}\cdot x\cdot tg\alpha-\tfrac{1}{2}q\,x^2)(x/h\ tg\alpha)\,dx/\cos\alpha$$

$$+\int_0^{l}(H'_{B0}\cdot\gamma\cdot\sin\alpha)(x/h\ \sin\alpha)\cdot\tfrac{1}{2}({}^{Ix}/{}_{Iy}+1)\,dx/\cos\alpha$$

$$=q^1L^3/24\cos\alpha+q^1\,l\,r^2\cos\alpha/4\cdot({}^{Ix}/{}_{Iy}+1)$$

$$\text{-----}\ (14)$$

$$\delta'_{20}=\int_0^{l}\cos\alpha(H'_{B0}\cdot\gamma\cdot\sin\alpha)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(\frac{Ix}{Iy}+1)\frac{dx}{\cos\alpha}$$

$$=q^1l^2\cdot\gamma\cos\alpha/4\,(\frac{Ix}{Iy}+1)\quad\text{------}\ (15)$$

梯台在单位荷载作用时：

$$\delta''_{10}=\int_0^L(H''_{Bo}\cdot x\cdot tg\alpha-q''br-q''b^2/2)(x/n\,tg\alpha)dx/\cos\alpha$$

$$+\int_0^{\ell}H''_{Bo}\cdot r\cdot\sin\alpha(r/n\cdot\sin\alpha)\tfrac{1}{2}\cdot(\frac{Ix}{Iy}+1)\frac{dx}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{-q''b^2\ell}{12\cos\alpha}+\frac{q''br^2\sin\alpha}{4h}(2L+b)(\frac{Ix}{Iy}+1)\quad ---(16)$$

$$\delta''_{20}=\int_0^{\ell}\cos\alpha(H''_{Bo}\cdot r\cdot\sin\alpha)\tfrac{1}{2}(\frac{Ix}{Iy}+1)\frac{dx}{\cos\alpha}$$

$$=q''br\cos\alpha/4\times(2L+b)(Ix/Iy+1)\quad ---(17)$$

当 Ix/Iy 比值甚小，忽略不计时，EI x 与变形的乘积简化如下：

$$\delta_{11}=\frac{L}{3\cos\alpha}+\frac{r^2\sin\alpha}{2h}\quad --------(18)$$

$$\delta_{12}=\frac{r\cos\alpha}{2}\quad --------(19)$$

$$\delta_{22}=\frac{3}{8}r\pi+\frac{L\cos\alpha}{2}\quad --------(20)$$

楼梯内承受单位荷载 $q'=1\,T/M$ 时

$$\delta'_{10}=\frac{q'L^2}{24\cos\alpha}+\frac{q'L\cdot r^2\cos\alpha}{4}\quad ------(21)$$

$$\delta'_{20}=\frac{q'L^2\cdot r\cdot\cos\alpha}{4}\quad ------(22)$$

平台内承受单位荷载 $q'' = 1$ T/M

$$\delta''_{10} = -\frac{q'' b^2 L}{12\cos\alpha} + \frac{q'' b r^2 \sin\alpha}{4h} \text{------------} (23)$$

$$\delta''_{20} = \frac{q'' \cdot b \cdot r \cos\alpha}{4}(2L+b) \text{------------} (24)$$

*实际上，楼梯井的尺寸是很小的，故半径 r 可定为：

$$r = 1/2(b+m) \approx b/2$$

公式（18）～（24）中楼梯的几何性质可以表示为长度 ℓ 及角度 α 的函数：

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= r/L \quad \therefore r = \gamma L \\ h &= \ell\, tg\alpha \\ b &= \alpha r \quad (m \approx 0) \end{aligned}\right\} \text{------------} (25)$$

四　将变形值代入弹性方程：

弹性方程：

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{\delta_{10}\delta_{22} - \delta_{20}\delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11}\delta_{22}} \\ X_2 &= \frac{\delta_{20}\cdot\delta_{11} - \delta_{10}\cdot\delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11}\delta_{22}} \end{aligned}\right\} \text{--------} (4)$$