AN ELEMENTARY TREATISE
ON THE
DIFFERENTIAL CALCULUS.

BY
GEORGE A. OSBORNE, S. B.

桂林李德晋
香山鄭家斌合譯

奧斯
賓氏
微分學 全

科學會編譯部刊行

總發行所　上海四馬路巡捕房東首科學會編譯部總發行所

發行者　科學會編譯部

印刷所　株式會社秀英舍第一工場
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

印刷者　藤本兼吉
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

譯述者　桂林李德斌　香山鄭家晋　合譯

中華民國二年二月十五日三版發行

定價壹圓五角

微分學奥付

序

數學稱至微積。極已。故羣皆駭爲深賾。其實凡一科學。理雖邃而說皆至顯。法雖奧而迹甚易明。微積亦然。學者.苟於普通數學卒業。由是致力於解析幾何學。推而進乎微積。專事其學。僅數月力耳。夫何深賾之有。且夫微積。有二部焉。一.微分學。一.積分學。由微分法.依一定之函數.求其名爲微分之他函數。是名微分學。而積分學.即微分學之逆.有某函數之微分而求其本函數也。自法人狄斯愷特.(Descartes)發明解析幾何學。後三十有餘年。英人奈端.(Newton)始剏微積。德人萊本智(Leibnits)繼之。或曰.萊氏實與奈氏同時發明。未知孰是。微積雖不原於解析幾何學。然必學解析幾何學然後能學微積。此數學不易之次序也。我國素無解析幾何學。故學者罕通微積。而舊譯微積書。亦僅有二種。代微積拾級.微積溯源.是也。(近人某氏所譯微積學.實就代微積拾級之增訂本重譯.故不贅及.)又皆五十年前之著述。條理不精。紀法不嚴。故其說闇而不明。欝而不達。閱者苦之。余既

譯各種數書。而爲時過促。故解析幾何學及微分積分學。暫從闕如。歲丁未。養疴海上。得識香山鄭君。適君逐譯解析幾何學。余心儀其事。亦旣請於君。爲之校閱而刊行之已。明年。鄭君謂余曰。有同學李君德晉。嘗譯微積一書。然僅得其微分之半。今李君以官帑遊學西大陸。將中輟矣。更出其原書相示。蓋鄭君亦嘗習是書也。余視其條理精。解說善。實教科書中最善本。因煩鄭君足成之。越三月。微分學書成。復以示余。因紬閱一過。余旣深佩兩君造詣之深。譯事之善。故誌之曰。是書乃美國 Massachusette 工藝學院數學教授奧斯賓氏(Osborne)所著。說理最顯。立法最簡。舉例最宜。設題最爲得要。且譯本紀法。悉從原書。與舊譯諸書迥然不同。尤合於我國教科之用。學者。於習解析幾何學後習之。必能深通其學。因亟爲之刊行。以廣其傳焉。是爲序。

戊申十月　　連江陳文

撰於海上

例　　言

一本書爲美國奧斯賓氏所著。爲章一十有九。爲節一百五十有五。旨奧詞達。乃微分學最善本。美國各大學。均用以教授。故特譯之。

一微分法旣明。則第五章微分紀法。所以爲求微係數之简式。俾學積分者更明其術也。

一本書第九章。用$\frac{\partial}{\partial x}$爲分項微分法之紀號。是乃近時通術。

一極大數與極小數諸章。學者於研究曲線後讀之。庶曲線縱坐標表函數之理。多所領會。若讀於第十三章後。其獲益一也。

譯　者　識

微分學目次

第一章

函數

第二章

第三章

第四章

疊微分法

第五章

微分

第六章

陰函數

第七章

函數開展式

第十章

第十一章

第十二章

第十三章

第十四章

頁

曲率. 曲率半徑. 漸伸線與漸屈線 142

節

第十五章

相切之次數. 接觸平圓 153

第十六章

曲　　線　　套 163

第十七章

第十八章

第十九章

附　　錄

微分學

第一章

函數

(FUNCTIONS.)

1. 函數之定義 設一變數量之值。與次變數量之值相附。若後量變。前量亦因之有相當之變。則前量名爲後量之函數。

例如正方形之面積。爲其邊之函數。球形之體積。爲其半徑之函數。正弦,餘弦,正切等爲角之函數。x^2, $\log(x^2+1)$, $\sqrt{x(x+1)}$ 等題式爲 x 之函數。

量亦可爲二變數或多變數之函數。例如直方形之面積。爲其二鄰邊之函數。正三角形之任一邊。爲其他二邊之函數。矩形平行立方體之體積。爲其長廣厚三邊之函數。

x^2+xy+y^2, $\log(x^2+y^2)$, a^{x+y} 等題式爲 x 與 y 之函數。

$xy+yz+zx$, $\sqrt{\dfrac{x+y}{z}}$, $\log(x^2+y-z)$ 等題式爲 x, y z 之函數。

2. 因變數與自變數　自 $y=x^2$, $y=\tan 4x$, $y=e^x$ 等方程式中。若 y 爲 x 之函數。則 x 爲自變數。而 y 爲因變數。

y 既爲 x 之函數。則 x 亦可爲 y 之函數。因而變數與自變數之名。遂亦因之相反。故自前所列方程式。反之即得

$$x=\sqrt{y},\quad x=\frac{1}{4}\tan^{-1}y,\quad x=\log_e y.$$

自含有多過二變數之方程式。如

$$z+x-y=0,\quad w+wz+zx+y=0,$$

中。同時只有一因變數。而其餘則爲自變數也。

3. 陽函數與陰函數　凡量本他量以顯明之。則前量名爲後量之陽函數。(Explicit Function).

例如 $y=x^2+2x$, $y=\sqrt{x^2+1}$ 等方程式中。而 y 爲 x 之陽函數。

設 x 與 y 同在於一方程式內。而 y 非準 x 化出。則 y 爲 x 之陰函數(Implicit Function)。例如在

$$2xy+y^2=x^2+1,\quad y+\log y=x.$$

等方程式內是也。

是類方程式。有時亦可化之。而使陰函數成陽函數。如上列第一方程式。化之即得

$$y=-x\pm\sqrt{2x^2+1}.$$

4. 代函數與越函數 代函數(Algebraic Functin)者。能以加減乘除。並有常指數之乘方開方等法。以顯函數與其變數相關之理也。其餘之函數則統名曰越函數 (Transcendental Function)。屬此類者。有對函數 (Logarithmic Function)。指函數 (Exponental Function)。三角函數(Trigonometric Function)。與三角反函數(Inverse Trigonometric Function)等。

5. 函數之紀法 是書中。凡 $F(x)$, $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 等記號。皆用以表 x 之函數。如"y 爲 x 之函數"。則書爲 $y=f(x)$ 或 $y=\phi(x)$.

同一問題或討論中。一函數之記號。常可用至數回。雖用於不同量之上。然亦所以表其爲同一函數。或同一演算也。設若

$$f(x)=x^2+5, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

則 $$f(y)=y^2+5,\quad f(a)=a^2+5,$$
$$f(a+1)=(a+1)^2+5=a^2+2a+6,$$
$$f(2)=2^2+5=9,\quad f(1)=6.$$

凡以上諸題式中。$f(\ )$皆用以表明同一之演算。如(1)式然。是即求一量之乘方。而加5於其得數之演算也。

下列習題。能令函數之紀法。愈明其用。

習 題

1. 設 $f(x)=2x^3-x^2-7x+6$. 顯明

$$f(3)=30,\ f(2)=4,\ f(0)=6,\ f(1)=0,\ f(-2)=0,$$
$$f(\tfrac{3}{2})=0,\ f(x-2)=2x^3-13x^2+21x,$$
$$f(x+h)=2x^3+(6h-1)x^2+(6h^2-2h-7)x+2h^3-h^2-7h+6.$$

2. 設 $f_1(y)=2y^4-y^3+1$, $f_2(y)=7y^2-6y+1$, 顯明

$$f_1(1)=f_2(1),\ f_1(\tfrac{3}{2})=f_2(\tfrac{3}{2}),\ f_1(-2)=f_2(-2),\ f_1(0)=f_2(0).$$

3. 設 $f(a)=\dfrac{a-1}{a+1}$. 顯明

$$\frac{f(a)-f(b)}{1+f(a)f(b)}=\frac{a-b}{1+ab}.$$

4. 設 $\phi(m)=(m+1)m(m-1)(m-2)$. 顯明

$$\phi(2)=\phi(1)=\phi(0)=\phi(-1)=0,\ \phi(3)=\phi(-2),$$
$$\frac{\phi(m+1)}{m+2}=\frac{\phi(m)}{m-2}.$$

5. 設 $\phi(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$. 顯明

$$\phi(a)=\phi(b)=\phi(c)=0,$$

$$\frac{\phi(a+b)\cdot\phi(b+c)\cdot\phi(c+a)}{[\phi(0)]^2}=8\phi\left(\frac{a+b+c}{2}\right),$$

$$\frac{\phi(-a)\cdot\phi(-b)\cdot\phi(-c)}{\phi(0)}=8[\phi(a+b+c)]^2.$$

6. 設 $\phi(u)=e^u+e^{-u}$, 顯明

$$\phi(3u)=[\phi(u)]^3-3\phi(u),$$

$$\phi(u+v)\phi(u-v)=\phi(2u)+\phi(2v).$$

7. 設 $F(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$. 顯明

$$F(x)+F(z)=F\left(\frac{x+z}{1+xz}\right).$$

8. 設 $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$. 顯明

$$2f(x)=f(2x^2-1),$$

$$3f(x)=f(4x^3-3x).$$

9. 設 $\psi(x)=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$. 顯明

$$\psi(2a)=[\psi(a)]^2,\quad \psi(a+b)=\psi(a)\psi(b).$$

10. 設 $f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$. 顯明

$$f(x, y, z)f(p, q, r)=f(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

式內之

$$\mathrm{L}=px+qy+rz,$$

$$\mathrm{M}=py+qz+rx,$$

$$\mathrm{N}=pz+px+ry.$$