

AN ELEMENTARY TREATISE
ON THE
DIFFERENTIAL CALCULUS.

BY
GEORGE A. OSBORNE, S. B.

奧斯賓氏
微分學全

桂林李德晉
香山鄭家斌
合譯

科學會編譯部刊行

總發行所

上海

捕房東首
四馬路巡

科學會編譯部總發行所

發行者

科學會編譯部

印刷所

會社
株式 秀英舍第一工場
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

印刷者

藤本兼吉
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

譯述者

桂林李德斌
香山鄭家晉



中華民國二年二月十五日三版發行

徵分學與付

定價壹圓五角

序

數學稱至微積。極已。故羣皆駭爲深蹟。其實凡一科學。理雖邃而說皆至顯。法雖奧而迹甚易明。微積亦然。學者。苟於普通數學卒業。由是致力於解析幾何學。推而進乎微積。專事其學。僅數月力耳。夫何深蹟之有。且夫微積。有二部焉。一。微分學。一。積分學。由微分法。依一定之函數。求其名爲微分之他函數。是名微分學。而積分學。即微分學之逆。有某函數之微分而求其本函數也。自法人狄斯愷特。(Descartes)發明解析幾何學。後三十有餘年。英人奈端。(Newton)始創微積。德人萊本智。(Leibnits)繼之。或曰。萊氏實與奈氏同時發明。未知孰是。微積雖不原於解析幾何學。然必學解析幾何學然後能學微積。此數學不易之次序也。我國素無解析幾何學。故學者罕通微積。而舊譯微積書。亦僅有二種。代微積拾級。微積溯源。是也。(近人某氏所譯微積學。實就代微積拾級之增訂本重譯。故不贅及。)又皆五十年前之著述。條理不精。紀法不嚴。故其說闇而不明。蘊而不達。閱者苦之。余既

譯各種數書。而爲時過促。故解析幾何學及微分積分學。暫從闕如。歲丁未。養痾海上。得識香山鄭君。適君遙譯解析幾何學。余心儀其事。亦既請於君。爲之校閱而刊行之已。明年。鄭君謂余曰。有同學李君德晉。嘗譯微積一書。然僅得其微分之半。今李君以官帑遊學西大陸。將中輟矣。更出其原書相示。蓋鄭君亦嘗習是書也。余視其條理精。解說善。實教科書中最善本。因煩鄭君足成之。越三月。微分學書成。復以示余。因繙閱一過。余既深佩兩君造誼之深。譯事之善。故誌之曰。是書乃美國 Massachusetta 工藝學院數學教授奧斯賓氏 (Osborne) 所著。說理最顯。立法最簡。舉例最宜。設題最爲得要。且譯本紀法。悉從原書。與舊譯諸書迥然不同。尤合於我國教科之用。學者。於習解析幾何學後習之。必能深通其學。因亟爲之刊行。以廣其傳焉。是爲序。

戊申十月

連江 陳 文
撰於海上

例 言

- 一本書爲美國奧斯賓氏所著。爲章一十有九。
爲節一百五十有五。旨奧詞達。乃微分學最
善本。美國各大學。均用以教授。故特譯之。
- 一微分法既明。則第五章微分紀法。所以爲求
微係數之簡式。俾學積分者更明其術也。
- 一本書第九章。用 $\frac{\partial}{\partial x}$ 爲分項微分法之紀號。是
乃近時通術。
- 一極大數與極小數諸章。學者於研究曲線後
讀之。庶曲線縱坐標表函數之理。多所領會。
若讀於第十三章後。其獲益一也。

譯 者 識

微 分 學 目 次

第 一 章

函 數

節		頁
1—4.	函數之定義及分類.....	1
5.	函數之紀法. 習題.....	3

第 二 章

微 係 數..... 6

6, 7.	限. 增長.....	6
8—10.	微係數. 習題.....	7

第 三 章

微 分 法..... 12

11—13.	代函數之微分法. 習題.....	12
14—16.	對函數與指函數之微分法. 習題.....	2
17, 18.	三角函數之微分法. 習題.....	43

節		頁
19, 20.	三角反函數之微分法. 習題	37
21, 22.	反函數與函數之函數之微分法. 習題 ...	43

第 四 章

	<u>疊 微 分 法</u>	47
23, 24.	定義及紀號	47
25.	n 次微係數. 習題	48
26.	萊氏之定理. 習題	51

第 五 章

	<u>微 分</u>	54
27.	關於微係數之微分	54
28.	用微分之微分法	55
29.	疊微分. 習題	56

第 六 章

	<u>陰 函 數</u>	59
30, 31	陰函數微分法. 習題	59

第 七 章

	<u>函 數 開 展 式</u>	62
--	------------------------	----

節	頁
32—36. 馬氏定理. 習題	62
37—41. 戴氏定理. 習題	67
42—45. 戴氏定理之確證	72
46—49. 戴氏定理與馬氏定理內之餘數.....	74

第 八 章

陰 分 狀 78

50, 51	分數之有限數值	78
52, 53.	求 $\frac{0}{0}$ 之真數值. 習題	79
54—57.	求 $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ 之真數值. 習題	82
58.	求指數狀之真數值. 習題	86

第 九 章

分 項 微 分 法 89

59, 60.	一次分項微係數. 習題	89
61—63.	高等分項微係數. 習題	90
64, 65.	數個變數函數之總微分. 習題	93
66.	切合微分之形勢. 習題	97
67.	陰函數之微分法	98
68, 69.	戴氏定理用於數個變數者	99

第 十 章

節	<u>微係數內變數之變易</u>	頁
70.	自 x 變為 y	102
71, 72.	自 y 變為 z	103
73.	自 x 變為 z 習題	104

第 十 一 章

	<u>總論各種曲線</u>	107
74—85.	矩形坐標	107
85—93.	極距坐標	114

第 十 二 章

	<u>曲線方向. 切線法線與漸近線</u>	121
94—97.	曲線方向. 次切線與次法線. 習題	121
98, 98½.	弧之微係數	127
99.	切線與法線之方程式. 習題	129
100—106.	漸近線. 習題	132

第 十 三 章

	<u>曲率之方向. 彎點</u>	138
107—109.	曲率方向	138
110.	彎點. 習題	139

第十四章

	頁
<u>曲率. 曲率半徑. 漸伸線與漸屈線</u>	142
節	
111—113. 曲率定義. 均曲率與變曲率	142
114, 115. 曲率半徑. 習題	143
116. 曲率中心	147
117—121. 漸伸線及漸屈線. 習題	148

第十五章

<u>相切之次數. 接觸平圓</u>	153
122, 123. 連接公點	153
124, 125. 接觸曲線	154
126—128. 解析相切之形勢	156
129—130. 接觸平圓. 習題	158

第十六章

<u>曲 線 套</u>	163
131—133. 級數曲線. 曲線之定義	163
134—136. 曲線套之方程式	165
137. 漸伸線爲法線之曲線套. 習題	167

第十七章

節		頁
	<u>曲線之獨點</u>	172
138—141.	倍點	172
142, 143.	接觸點. 岐點	176
144.	特點. 習題.....	178

第十八章

一自變數之函數之極大數與極小數 ... 181

145—149.	定義. 自曲線推求極大數與極小數之形勢	181
150, 151.	準戴氏定理之極大數與極小數形勢. 習題. 極大數與極小數之問題.....	186

第十九章

數個自變數之函數之極大數與極小數... 195

152—155.	定義.....	195
	準戴氏定理之極大數與極小數形勢.	
	習題	198

附 錄

曲面之切平面與三坐標面所成之角
在 § 64 內 $\sec r$ 之題式。

微 分 學

第 一 章

函 數

(FUNCTIONS.)

1. 函數之定義 設一變數量之值。與次變數量之值相附。若後量變。前量亦因之有相當之變。則前量名爲後量之函數。

例如正方形之面積。爲其邊之函數。球形之體積。爲其半徑之函數。正弦、餘弦、正切等爲角之函數。 x^2 , $\log(x^2+1)$, $\sqrt{x(x+1)}$ 等題式爲 x 之函數。

量亦可爲二變數或多變數之函數。例如直方形之面積。爲其二鄰邊之函數。正三角形之任一邊。爲其他二邊之函數。矩形平行立方體之體積。爲其長廣厚三邊之函數。

x^2+xy+y^2 , $\log(x^2+y^2)$, a^{x+y} 等題式爲 x 與 y 之函數。

$xy+yz+zx, \sqrt{\frac{x+y}{z}}, \log(x^2+y-z)$ 等題式爲 x, y, z 之函數。

2. 因變數與自變數 自 $y = x^2, y = \tan 4x, y = e^x$ 等方程式中。若 y 爲 x 之函數。則 x 爲自變數。而 y 爲因變數。

y 既爲 x 之函數。則 x 亦可爲 y 之函數。因而變數與自變數之名。遂亦因之相反。故自前所列方程式。反之即得

$$x = \sqrt{y}, \quad x = \frac{1}{4} \tan^{-1} y, \quad x = \log_e y.$$

自含有多過二變數之方程式。如

$$z+x-y=0, \quad w+wz+zx+y=0,$$

中。同時只有一因變數。而其餘則爲自變數也。

3. 陽函數與陰函數 凡量本他量以顯明之。則前量名爲後量之陽函數 (Explicit Function)。

例如 $y = x^2 + 2x, y = \sqrt{x^2 + 1}$ 等方程式中。而 y 爲 x 之陽函數。

設 x 與 y 同在於一方程式內。而 y 非準 x 化出。則 y 爲 x 之陰函數 (Implicit Function)。例如在

$$2xy + y^2 = x^2 + 1, \quad y + \log y = x.$$

等方程式內是也。

是類方程式。有時亦可化之。而使陰函數成陽函數。如上列第一方程式。化之即得

$$y = -x \pm \sqrt{2x^2 + 1}.$$

4. 代函數與越函數 代函數 (Algebraic Functin) 者。能以加減乘除。並有常指數之乘方開方等法。以顯函數與其變數相關之理也。其餘之函數則統名曰 越函數 (Transcendental Function)。屬此類者。有 對函數 (Logarithmic Function)。 指函數 (Exponential Function)。 三角函數 (Trigonometric Function)。與 三角反函數 (Inverse Trigonometric Function) 等。

5. 函數之紀法 是書中。凡 $F(x)$, $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 等記號。皆用以表 x 之函數。如“ y 爲 x 之函數”。則書爲 $y = f(x)$ 或 $y = \phi(x)$ 。

同一問題或討論中。一函數之記號。常可用至數回。雖用於不同量之上。然亦所以表其爲同一函數。或同一演算也。設若

$$f(x) = x^2 + 5, \dots\dots\dots (1)$$

則

$$f(y)=y^2+5, \quad f(a)=a^2+5,$$

$$f(a+1)=(a+1)^2+5=a^2+2a+6,$$

$$f(2)=2^2+5=9, \quad f(1)=6.$$

凡以上諸題式中。 $f()$ 皆用以表明同一之演算。如(1)式然。是即求一量之乘方。而加5於其得數之演算也。

下列習題。能令函數之紀法。愈明其用。

習 題

1. 設 $f(x)=2x^3-x^2-7x+6$. 顯明

$$f(3)=30, f(2)=4, f(0)=6, f(1)=0, f(-2)=0,$$

$$f(\frac{3}{2})=0, f(x-2)=2x^3-13x^2+21x,$$

$$f(x+h)=2x^3+(6h-1)x^2+(6h^2-2h-7)x+2h^3-h^2-7h+6.$$

2. 設 $f_1(y)=2y^4-y^3+1$, $f_2(y)=7y^2-6y+1$, 顯明

$$f_1(1)=f_2(1), f_1(\frac{3}{2})=f_2(\frac{3}{2}), f_1(-2)=f_2(-2), f_1(0)=f_2(0).$$

3. 設 $f(a)=\frac{a-1}{a+1}$. 顯明

$$\frac{f(a)-f(b)}{1+f(a)f(b)}=\frac{a-b}{1+ab}.$$

4. 設 $\phi(m)=(m+1)m(m-1)(m-2)$. 顯明

$$\phi(2)=\phi(1)=\phi(0)=\phi(-1)=0, \quad \phi(3)=\phi(-2),$$

$$\frac{\phi(m+1)}{m+2}=\frac{\phi(m)}{m-2}.$$

5. 設 $\phi(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. 顯明

$$\phi(a) = \phi(b) = \phi(c) = 0,$$

$$\frac{\phi(a+b) \cdot \phi(b+c) \cdot \phi(c+a)}{[\phi(0)]^2} = 8\phi\left(\frac{a+b+c}{2}\right),$$

$$\frac{\phi(-a) \cdot \phi(-b) \cdot \phi(-c)}{\phi(0)} = 8[\phi(a+b+c)]^2.$$

6. 設 $\phi(u) = e^u + e^{-u}$, 顯明

$$\phi(3u) = [\phi(u)]^3 - 3\phi(u),$$

$$\phi(u+v)\phi(u-v) = \phi(2u) + \phi(2v).$$

7. 設 $F(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$. 顯明

$$F(x) + F(z) = F\left(\frac{x+z}{1+xz}\right).$$

8. 設 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$. 顯明

$$2f(x) = f(2x^2 - 1),$$

$$3f(x) = f(4x^3 - 3x).$$

9. 設 $\phi(x) = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$. 顯明

$$\phi(2a) = [\phi(a)]^2, \quad \phi(a+b) = \phi(a)\phi(b).$$

10. 設 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. 顯明

$$f(x, y, z)f(p, q, r) = f(L, M, N).$$

式內之

$$L = px + qy + rz,$$

$$M = py + qz + rx,$$

$$N = pz + px + ry.$$