

F 75005

直交管叉中的应力状态

(译 文)

工程力学教研室



同济大学科学技术情报组编印

一九七五年一月

X33/1

045/9

在一垂直管叉连接区域中的应力状态

W·雷得尔巴哈著

原文刊载于工程师文集 1961年第五册

1. 引言

在受内压载荷的直园柱管壁内，在离其端部一定距离，接近于一均匀分布的平面应力状态，其主应力平行和垂直于管壁围线。对于厚壁管，其计算也不引起困难。同样，大家知道，在靠近这样的管端：例如因摺边或因受到顶盖作用（容器和锅炉），有边缘干扰，因而出现主要附加的、相当迅速衰减的弯曲应力。

在一管叉（图1）附近的干扰，理论上至今尚未研究过。贯通管壁中断了，从而平面基本应力状态，因存在与叉管相连接的孔洞而受到干扰。孔洞作用犹如受嵌制的平板中的钻孔一样。我们首先应计算显著升高的薄膜应力状态的主应力。此外，因叉管的轴向内力载荷，在孔口边上还作用着法向于孔管壁的一些力和弯矩，这些弯矩引起附加的弯曲应力。

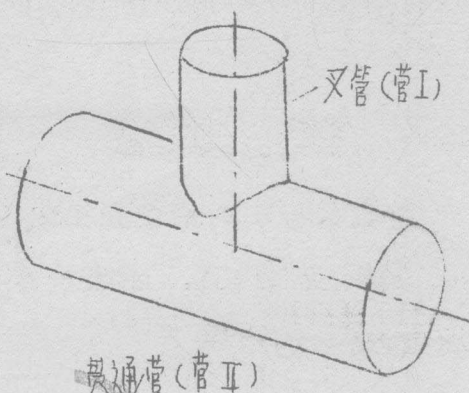


图 1.

大家知道，在没有折断的管壁中，环向应力大约（在薄壁管中是精确地）二倍于轴向应力。由此可知，与一环向园平行的孔口直径比与轴线平行的直径伸长得强一些，因而孔口将“变为椭圆”。一方面这种变形受到叉管阻止，另一方面叉管也受到牵制，以至在这管的连接端上出现作为边缘干扰的径向力和切向力以及（由于孔边管壁的相互嵌制）弯矩。

因此，问题的理论研究将引用园柱壳的弯曲理论，且引用简单

的公式，即由 A. E. 格林和 W. 采拿^{1, 2}所推导的、且已在类似的问题上有成效地应用过的公式^{3, 4}。由此展开的上述问题的解，只表示为一级近似。为了保持尽可能小的数字计算工作量，较大的精确性是有意放弃了。可是藉助于较适合的、较新的计算机，不用说，可以得到较精确的结果。

除少数特例以外，以下对叉管所列的全部量或对贯通管所列的全部量分别用小的或大的字母来标记。由两管所构成的物体是双重对称的。两管均含有的对称平面称为纵平面，与其垂直的、通过叉管轴线的对称平面叫横平面。

2. 坐标、几何关系

假设叉管 I 的中面直径 $2a$ 小于或最大也只等于贯通管的直径 $2A$ ，管轴互相垂直，且相交于 O 点。设这点 O 分别为平行于管轴度量的坐

1. W. Zerna, Ing-Arch. 20(1952). S.357.

2. A.E.Green und W.Zerna, Theoretical Elasticity, S.385. Oxford 1954.

3. A.I.Lurje, Prikladnaja Matematika i Mekhanika, Neue Serie 10.3

Moskau 1946, S.397. Auszug in deutscher Sprache in G.

N.Sawin, Spannungs-erhöhung am Raude Von: Löhren, S.130. Ber. in 1956.

4. D.Withum, Ing-Arch. 26(1958). S.435.

标 φ 和 X 或 $\xi = x/a$ 和 $\Xi = X/A$ 的原点 (图 2)。纵平面和 I, II 壳中面分别相交于母线 l 或 L , 从该二母线出发, 分别计算环向坐标 y

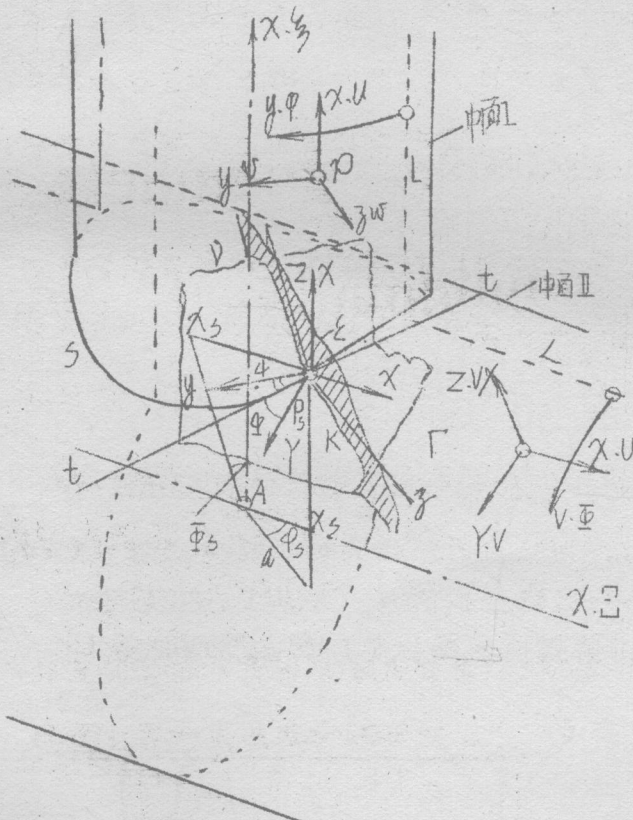


图 2

和 Y 或中心角 $\varphi = y/a$ 和 $\Phi = Y/A$ 。在中面上的任一点 p 或 P 处形成适合的坐标方向 x 和 y 或 X 和 Y 。与其垂直的, 因而对中面法向的参考轴 z 和 Z 常作为第三轴而组成笛卡儿坐标系, 其中 z 和 Z 向外视为正的。

如果记 $v = a/A$ 为中面半径的比值, 而 ξ_s, φ_s 及 Ξ_s, Φ_s 分别为两中面交曲线 S 的一点 P_s 的坐标, 则有

$$\begin{aligned} \sin \Phi_s &= v \cdot \sin \varphi_s, \\ \Xi_s &= v \cos \varphi_s, \\ \xi_s &= 1/v \cos \Phi_s. \end{aligned} \quad (2.1)$$

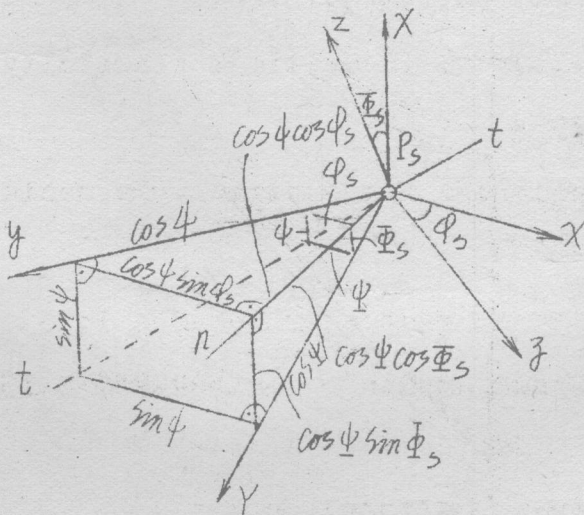


图 3

在交曲线上的 P_s 点置切线 t 分别和经过 P_s 的参考轴 y 或 Y 构成角 ψ 或 Ψ 。从图 3 可见, 若我们沿 t 量得的一单位长度分别向 y -轴或 Y -轴投影, 然后再分别向 x -轴或 X -轴的公共法线 n 上投影,

则有：

$$\cos \psi \cos \varphi_s = \cos \Psi \cdot \cos \Phi_s,$$

$$\sin \psi = \cos \Psi \cdot \sin \Phi_s,$$

$$\sin \Psi = \cos \psi \cdot \sin \varphi_s,$$

且若令 $\cos \psi / \cos \Phi_s = \cos \Psi / \cos \varphi_s = c$ ，则得：

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= c \cdot \cos \varphi_s \cdot \sin \Phi_s, \\ \cos \psi &= c \cdot \cos \Phi_s, \end{aligned} \right\} (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \Psi &= c \cdot \cos \Phi_s \cdot \sin \varphi_s, \\ \cos \Psi &= c \cdot \cos \varphi_s. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

切线 τ 是中面 I 和中面 II 接触于 P_s 的切平面 γ 和 Γ 的相交直线。在垂直于 τ 经过 P_s 的一平面内，切平面的迹线 k 和 K 相交成角 χ (图4)，该角也就是过 P_s 的参考轴 z 和 Z 所组成的角。若从 P_s 出发沿着 Z 取一单位长度并向 k 上投影，则得到投影长度为 $\cos \Phi_s / \cos \psi$ 及其投

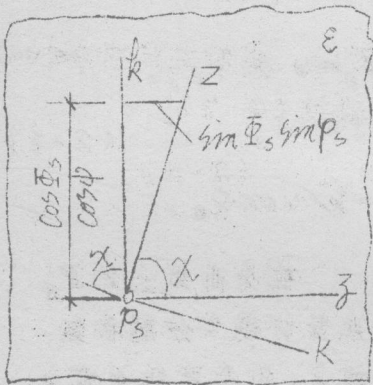


图 4

影的垂线长度为 $\sin \varphi_s \cdot \sin \Phi_s$ 。由此，

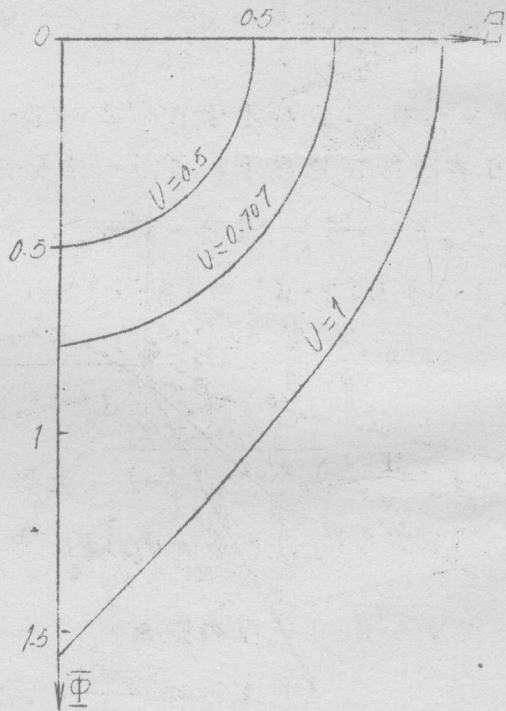


图 5

$$\sin \chi = \frac{\cos \Phi_s}{\cos \psi} = 1/C, \quad (2.4)$$

$$\cos \chi = \sin \varphi_s \sin \Phi_s = \nu \sin^2 \varphi_s.$$

$$C = \frac{1}{\sin \chi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^4 \varphi_s}}. \quad (2.5)$$

在坐标系 (ε, φ) 内, 在中面 I 上交曲线有方程:

$$\varepsilon_s = \sqrt[3]{1 - \sin^2 \Phi_s} = \sqrt[3]{1 - \nu^2 \sin^2 \varphi_s}, \quad (2.6)$$

在坐标系 (Ξ, Φ) 中, 在中面 II 上有方程:

$$\Xi = \nu \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_s} = \sqrt{\nu^2 - \sin^2 \Phi_s}. \quad (2.7)$$

如果我们想像把中面 II 在沿母线 L 相接触的切平面上展开, 则交曲线得到表示于图 5 中的形状。对于 $\nu = 1$ ($\alpha = A$) 有余弦线, 对于 $\nu < 1$ 有椭圆曲线, ν 越小该曲线与圆的差别越小。一条这样的曲线同 Y 一轴的交点 Φ_s^* 从 $\Xi_s = 0$, 即从 $\nu = \sin \Phi_s^*$ 求得。令

$$\Phi_s^* = \arcsin \nu = \nu \left(1 + \frac{1}{6} \nu^2 + \frac{3}{40} \nu^4 + \frac{15}{336} \nu^6 + \dots \right).$$

具有参数 ν 的交曲线的最大径向偏移和具有半径为 ν 的圆相比较, 就 ν 而言,

$$\Delta \nu = \Phi_s^* - \nu = \frac{1}{6} \nu^2 + \frac{3}{40} \nu^4 + \dots \quad \oplus$$

对于 $\nu \leq 0.5$ 保持小于 5% ($\Delta \nu < 0.05$)。因此, 我们在范围 $0 \leq \nu \leq 0.5$ 内的给定情况下, 可用一个圆来代替交曲线 (2.7)。

$$\Xi_s^2 = \nu^2 - \Phi_s^2 \quad \text{或} \quad \Xi = \nu \cos \varphi_s, \quad \Phi_s = \nu \sin \varphi_s. \quad (2.8)$$

用 (2.3) 和 (2.5) 由 (2.2) 得到

$$\cos^2 \psi = \frac{\sin^2 \Psi}{\sin^2 \varphi_s} = \frac{\cos^2 \Phi_s}{\sin^2 \chi} = \frac{1 - \nu^2 \sin^2 \varphi_s}{1 - \nu^2 \sin^4 \varphi_s} \leq 1$$

用 $\sin^2 \varphi_s = \frac{1}{\nu^2} - \sqrt{1/\nu^4 - 1/\nu^2}$, 上述商达到最小值

$$(\cos^2 \psi)_{\min} = \frac{\sin^2 \Psi}{\sin^2 \varphi_s} \Big|_{\min} = \frac{\nu^2}{2(1 - \sqrt{1 - \nu^2})}. \quad (2.9)$$

在 $0 \leq \nu \leq 0.5$ 范围内则有

$$1 \geq \cos \psi = \frac{\sin \Psi}{\sin \varphi_s} \geq 0.97,$$

⊕ 原文误写为 $\frac{\Phi_s^* - \nu}{\nu} = \frac{1}{16} \nu^2 + \dots$

因此, $\psi \approx \varphi_s$, $\cos \psi \approx 1$. (2.10)

用 (2.1) 由 (2.2) 得到:

$$\sin \psi = C \cdot \cos \varphi_s \sqrt{\sin \varphi_s} = C \sqrt{2} \sin \varphi_s,$$

从而在 $0 \leq v \leq 0.5$ 范围内还可以作下列近似处理:

$$\sin 2\psi = 2 \sin \psi \cos \psi \approx 2 \sin \psi = C \sqrt{2} \sin 2\varphi_s, \quad \cos 2\psi \approx 1. \quad (2.11)$$

最后, 还要考察以后出现的参数:

$$\sqrt{1 \pm \cos \chi} = \sqrt{1 \pm v \sin^2 \varphi_s} \approx 1 \pm \frac{v}{2} \sin^2 \varphi_s = 1 \pm \frac{v}{4} (1 - \cos 2\varphi_s). \quad (2.12)$$

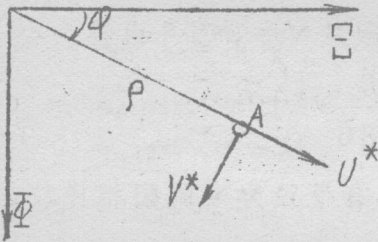


图 6

鉴于在第六节中构成的边界条件

(这些边界条件沿交曲线, 在充分小的 v 时因而沿着一个圆必须

得到满足的), 在中面 II 上取定

一极坐标系 (r, φ) 或 $(\rho = r/a, \varphi)$

是适宜的, 其原点应置于轴线 I 通

过中面 II 的交点上 (图 6)。有下列

关系式:

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos \varphi, & Y &= r \sin \varphi, \\ \xi &= v \rho \cos \varphi, & \Phi &= v \sin \varphi. \end{aligned} \right\} (2.13)$$

对于 $\rho = 1$ (一接近于圆形的交曲线的各点的常数坐标),

(2.13) 和 (2.8) 一致。

3. 位移, 内力、内矩

≈≈ ≈≈ ≈≈

壳中面上的任意一点 p 或 P 的位移, 一般由三个分量 u, v, w 或 U, V, W 合成。在图 2 中给定正的位移分量 (以下简称为位移) 的方向。设位移对 φ 或 Φ 的偏导数用点来标记, 对 ξ 或 Ξ 的偏导数用撇来标记:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \equiv u', \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \equiv u'', \quad \frac{\partial U}{\partial \Phi} \equiv U', \quad \frac{\partial U}{\partial \Xi} \equiv U'' \text{ 等等.}$$

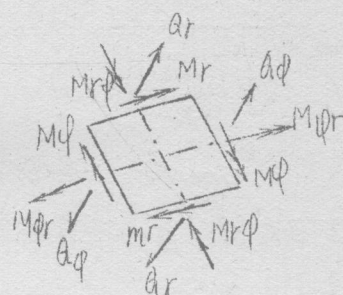
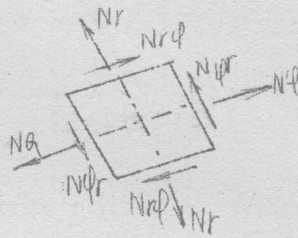
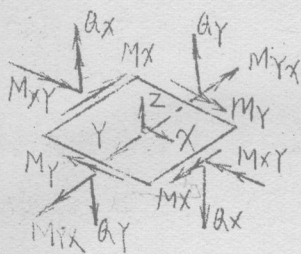
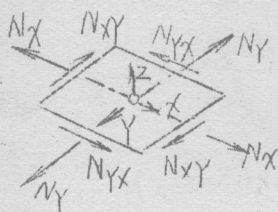
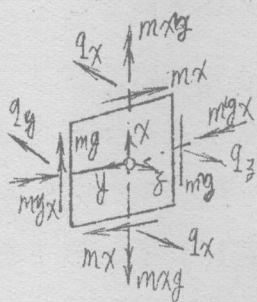
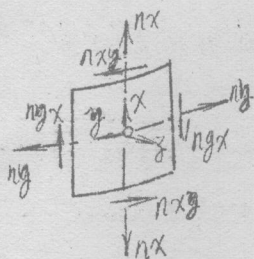


图 7.

图 8

图 9

正的内力、内矩示于图 7 和图 8 中。内矩向量按右螺旋确定。正力矩向量的方向这样选择：在两个坐标系 $(x \cdot y \cdot z)$ 或 $(X \cdot Y \cdot Z)$ 中，在形式上适合于同样的方程。我们从第 5 节中所表示的管 I 的基本方程，只要把小写的字母用对应的大写的字母代替，则可得到管 II 的对应方程。

有关用 (2.18) 定义的极坐标 $(\rho \cdot \varphi)$ ，代替 U, V, W 有位移

$$\left. \begin{aligned} U^* &= U \cos \varphi + V \sin \varphi, \\ V^* &= -U \sin \varphi + V \cos \varphi, \\ W^* &= W. \end{aligned} \right\} (3.1)$$

再代替图 8 上的内力、内矩有图 9 上的内力、内矩。

4 基本应力状态

在从交曲线离开足够大的距离处，内压力 p 产生的旋转对称应力和变形状态以后用 \sim 来表记量 (E 为弹性模数， μ 为横向系数， h 和 H 为管壁厚度， ε_0 为一常数)：

管 I	管 II
$\tilde{u} = \frac{pa^2}{2Eh} (1-2\mu)(\varepsilon - \varepsilon_0),$	$\tilde{U} = \frac{pA^2}{2EH} (1-2\mu)\varepsilon,$
$\tilde{v} = 0,$	$\tilde{V} = 0,$
$\tilde{w} = \frac{pa^2}{Eh} (1-\mu/2),$	$\tilde{W} = \frac{pA^2}{EH} (1-\mu/2),$
轴向应力: $\tilde{n}_x = pa/2,$	$\tilde{N} = pA/2,$
环向应力: $\tilde{n}_y = pa,$	$\tilde{N}_\varphi = pA,$

或者对管 II 关联于坐标系 (ρ, φ):

$\tilde{U}^* = \frac{pA^2}{EH} \frac{1-2\mu}{4} \nu \rho (1 + \cos 2\varphi),$	$\tilde{N}_r = \frac{pA}{4} (3 - \cos 2\varphi),$
$\tilde{V}^* = -\frac{pA^2}{EH} \frac{1-2\mu}{4} \nu \rho \sin 2\varphi,$	$\tilde{N}_\varphi = \frac{pA}{4} (3 + \cos 2\varphi),$
$\tilde{W}^* = \frac{pA^2}{EH} (1-\mu/2),$	$\tilde{N}_{r\varphi} = \frac{pA}{4} \sin 2\varphi.$

实际上的应力状态和变形是在基本状态上叠加边缘干扰所得的结果，该边缘干扰系因交曲线各点上作用的内力和内矩的平衡系列而引起。叠加的干扰状态以下用格林和采拿所推导的抗弯圆柱壳体近似理论所确定。

5 圆柱壳弯曲理论

首先，从位移及其导数我们计算壳中面的形变

$$\varepsilon_x = u'/a, \quad \varepsilon_y = v'/a + w/a, \quad \gamma_{xy} = w/a + v'/a \quad (5.1)$$

再由此计算作用于中面上的内力

$$\left. \begin{aligned} n_x &= E^* h (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \\ n_y &= E^* h (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\ n_{xy} &= n_{yx} = E^* h \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}, \end{aligned} \right\} E^* = \frac{E}{1-\mu^2} \quad (5.2)$$

由位移 w 的导数内矩服从于下列关系

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{E^* h^3}{12 a^2} (w'' + \mu w'''), \\ m_y &= \frac{E^* h^3}{12 a^2} (w'' + \mu w'''), \\ m_{xy} &= m_{yx} = \frac{E^* h^3}{12 a^2} (1-\mu) w'''. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

因为推导纯边缘干扰时壳体内外面不受载荷，故作用于壳体单元四边上的内力、内矩服从于下列静力平衡条件：

$$n_x' + n_{xy}' = 0, \quad (5.4)$$

$$n_y' + n_{xy}' - q_y = 0, \quad (5.5)$$

$$q_y' + q_x' + n_y' = 0, \quad (5.6)$$

$$m_x' + m_{xy}' - q_y a = 0, \quad (5.7)$$

$$m_x' + m_{xy}' - q_x a = 0, \quad (5.8)$$

而形变必须满足下列协调条件

$$\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' - \gamma_{xy}' - w''/a = 0. \quad (5.9)$$

在近似理论中，我们可以把平衡条件 (5.5) 中的横力 q_y 抛去，故可以是：

$$n_y' + n_{xy}' = 0. \quad (5.10)$$

若在中面内作用的内力按

$$n_x = f'', \quad n_y = f'', \quad n_{xy} = -f'' \quad (5.11)$$

从一个应力函数 $f(\xi, \varphi)$ 导得, 则平衡条件 (5.4) 和 (5.10) 自动得到满足。利用 (5.7) 和 (5.8) 横力可直接用力矩来表示, 再用 (5.3) 最后由位移 w 来表示 ($\Delta w = w'' + w \cdot$):

$$q_x = \frac{E^* h^3}{12 a^3} (\Delta w)', \quad (5.12)$$

$$q_y = \frac{E^* h^3}{12 a^3} (\Delta w)'. \quad (5.13)$$

由此再用 $n_y = f''$, (5.6) 有形式

$$\Delta \Delta w + \frac{12 a^3}{E^* h^3} f'' = 0. \quad (5.14)$$

从 (5.2) 形变服从于:

$$\varepsilon_x = \frac{n_x - \mu n_y}{Eh}, \quad \varepsilon_y = \frac{n_y - \mu n_x}{Eh}, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} n_{xy},$$

作为内力 n_x, n_y, n_{xy} 的函数再用应力函数 f , 故 (5.9) 最后成为

$$\Delta \Delta f - \frac{Eh}{a} w'' = 0. \quad (5.15)$$

通过引用复变函数 $g = w + i k f$

两个相似的微分方程 (5.14) 和 (5.15) 合为一个复变微分方程:

$$\Delta \Delta g - 2 i \vartheta^2 g'' = 0. \quad (5.16)$$

$$\text{系数 } k = \frac{a^2}{h^2} \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)}{E}}, \quad \vartheta^2 = \frac{a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)} \quad (5.17)$$

有壳体特征数的意义。对于管 II 相似地有:

$$G = W + i K \Phi, \quad \Delta \Delta G - 2 i \Theta^2 G'' = 0, \quad (5.18)$$

$$K = \frac{A^2}{H^2} \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)}{E}}, \quad \Theta^2 = \frac{A}{H} \sqrt{3(1-\mu^2)}.$$

微分方程 (5.16) 藉指数函数

$$g = c \cdot e^{\rho \xi} \cdot \xi + \rho \varphi \cdot \varphi \quad (5.19)$$

得到满足，只要其本征值满足特征方程

$$p_{\xi}^4 + 2p_{\xi}^2 p_{\varphi}^2 + p_{\varphi}^4 - 2i\vartheta^2 p_{\xi}^2 = 0$$

或
$$p_{\xi}^2 + p_{\varphi}^2 \pm (1+i)\vartheta p_{\xi} = 0$$

即行。应用

$$\bar{p}_{\xi} = \frac{2}{\vartheta} p_{\xi}, \quad \bar{p}_{\varphi} = \frac{2}{\vartheta} p_{\varphi}$$

我们最后得到

$$\bar{p}_{\xi} = \pm(1+i) \pm \sqrt{2i - \bar{p}_{\varphi}^2}. \quad (5.20)$$

如果我们用撇来标记对 ρ 的导数，用点来表示对 φ 的导数，且位移暂且不写星号，则关联于坐标系 (ρ, φ) 下列方程适用：

$$\left. \begin{aligned} a\varepsilon_r &= U' + \nu W \sin^2 \varphi, \\ \rho a\varepsilon_{\varphi} &= V' + U + \rho \nu W \cdot \cos^2 \varphi, \\ \rho a\gamma_{r\varphi} &= U'' + \rho V' - V + \rho \nu W \sin 2\varphi, \end{aligned} \right\} (5.21)$$

$$\left. \begin{aligned} N_r &= E^* H (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_{\varphi}), \\ N_{\varphi} &= E^* H (\varepsilon_{\varphi} + \mu \varepsilon_r), \\ N_{r\varphi} &= E^* H \frac{1-\mu}{2} \gamma_{r\varphi}, \end{aligned} \right\} (5.22)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{E^* H^3}{12 a^2} (W'' + \frac{\mu}{\rho} W' + \frac{\mu}{\rho^2} W \cdot \cdot), \\ M_{\varphi} &= \frac{E^* H^3}{12 a^2} (\mu W'' + \frac{1}{\rho} W' + \frac{1}{\rho^2} W \cdot \cdot), \end{aligned} \right\} (5.23)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{r\varphi} &= M_{\varphi r} = \frac{E^* H^3}{12 a^2} (1-\mu) \left(\frac{1}{\rho} W' \cdot - \frac{1}{\rho^2} W \cdot \cdot \right), \\ Q_r &= \frac{E^* H^3}{12 a^3} (\Delta W)' , \\ Q_{\varphi} &= \frac{E^* H^3}{12 a^3} (\Delta W) \cdot , \end{aligned} \right\} \Delta W = W'' + \frac{1}{\rho} W' + \frac{1}{\rho^2} W \cdot \cdot. \quad (5.24)$$

从坐标之间的关系 (2.13) 我们得到下列的微商之间的一般关系:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial (\nu\rho)^2} \cos^2 \varphi + \left[\frac{1}{\nu\rho} \frac{\partial}{\partial (\nu\rho)} + \frac{1}{(\nu\rho)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \sin^2 \varphi +$$

$$\left[\frac{1}{(\nu\rho)^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{\nu\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial (\nu\rho)} \right] \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2}{\partial (\nu\rho)^2} \sin^2 \varphi + \left[\frac{1}{\nu\rho} \frac{\partial}{\partial (\nu\rho)} + \frac{1}{(\nu\rho)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \cos^2 \varphi +$$

$$\left[\frac{1}{\nu\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial (\nu\rho)} - \frac{1}{(\nu\rho)^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \sin 2\varphi,$$

利用此二式可以把微分方程 (5.18) 转换成:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial (\nu\rho)^2} + \frac{1}{\nu\rho} \frac{\partial}{\partial (\nu\rho)} + \frac{1}{(\nu\rho)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \left[\frac{\partial^2 G}{\partial (\nu\rho)^2} + \frac{1}{\nu\rho} \frac{\partial G}{\partial (\nu\rho)} + \right. \\ \left. \frac{1}{(\nu\rho)^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} \right] - 2i\Omega^2 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial (\nu\rho)^2} \cos^2 \varphi + \left[\frac{1}{\nu\rho} \frac{\partial G}{\partial (\nu\rho)} + \frac{1}{(\nu\rho)^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} \right] \right.$$

$$\left. \sin^2 \varphi + \left[\frac{1}{(\nu\rho)^2} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{1}{(\nu\rho)} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi \partial (\nu\rho)} \right] \sin 2\varphi \right] = 0.$$

如果我们再乘以 ν^4 并用 $-i$ 来替 i (考察共轭复变方程), 用 η^2 代替 $i\Omega^2 \nu^2$ 和用 $\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$ 代替 $\cos^2 \varphi$, 用 $\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$ 代替 $\sin^2 \varphi$, 则形成系统 (ρ, φ) 中的适合的微分方程:

$$\Delta \Delta G + \eta^2 \Delta G + \eta^2 \left(G'' - \frac{1}{\rho} G' - \frac{1}{\rho^2} G \right) \cos 2\varphi + 2\eta^2 \left(\frac{1}{\rho} G' - \frac{1}{\rho} G \right) \sin 2\varphi = 0.$$

$$\sin 2\varphi = 0. \quad (5.25)$$

其中 $G = W - iK\nu^2 F$, (5.26)

且在壳中面上的内力, 现在应根据公式

$$N_r = \frac{1}{\rho} F' + \frac{1}{\rho^2} F'', \quad N_\varphi = F'', \quad N_{r\varphi} = \frac{1}{\rho^2} F' - \frac{1}{\rho} F'' \quad (5.27)$$

由应力函数 F 来计算。解 (5.19) 在此对应于函数

$$G = C e^{\frac{r}{\rho}} \left[\rho^2 \cos\varphi + P \Phi \rho \cdot \sin\varphi \right] \quad (5.28)$$

6. 对称条件和边界条件

因两根管的变形既对称于纵平面又对称于横平面，故位移 u, v, w 关于 $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 必须是对称的，而位移 U, V, W 关于 $\Phi = 0, \pi$ 和 $\Xi = 0$ 必须是对称的。再者应注意，在对称平面上不受剪力和扭矩。由此得到对称条件：

$$v = 0, \quad u' = 0, \quad w' = 0, \quad (6.1)$$

$$\text{对于 } \varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2: \begin{cases} n_{xy} = 0, & q_y = 0, & m_{xy} = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

$$V = 0, \quad U' = 0, \quad W' = 0, \quad (6.3)$$

$$\text{对于 } \Phi = 0, \pi: \begin{cases} N_{xy} = 0, & Q_{xy} = 0, & M_{xy} = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

$$U = 0, \quad V' = 0, \quad W' = 0, \quad (6.5)$$

$$\text{对于 } \Xi = 0: \begin{cases} N_{xy} = 0, & Q_x = 0, & M_{xy} = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

边界条件表明以下几何的或力学的事实：

a) 边缘干扰是沿交曲线 S 产生的、与第4节中基本应力状态所给定的状态量 (*Zustandsgrößen*) 相异的变形和应力，它随着离交曲线的距离增大而相当迅速地衰减，且按圣维南原理在一定的距离外实际上完全消失。因此，函数 g 和 G 必须是衰减函数。

b) 交曲线上一点 P_s 的位移向量由分量 u_s, v_s, w_s 合成与由分量 U_s, V_s, W_s 合成必须相同。根据图 10 此条件要求：

$$\begin{aligned}
 w_s \sin \varphi_s + v_s \cos \varphi_s &= W_s \sin \Phi_s + V_s \cos \Phi_s, \\
 u_s &= W_s \cos \Phi_s - V_s \sin \Phi_s, \\
 U_s &= w_s \cos \varphi_s - v_s \sin \varphi_s.
 \end{aligned}
 \quad \} \quad (6.7)$$

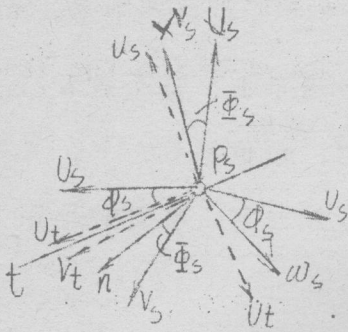


图10.

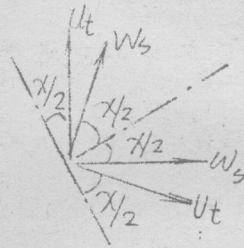


图11.

如果我们用垂直与平行于切线 t 的分量来代替 u_s, v_s 或 U_s, V_s ,

$$u_t = u_s \cos \psi + v_s \sin \psi, \quad \} \quad (6.8)$$

$$v_t = -u_s \sin \psi + v_s \cos \psi,$$

或

$$U_t = U_s \cos \psi + V_s \sin \psi, \quad \} \quad (6.9)$$

$$V_t = -U_s \sin \psi + V_s \cos \psi,$$

我们再考虑到 (图11) 在平面 ϵ 中的分量 u_t, w_s 或 U_t, W_s , 则可得到相应的方程:

$$v_t = V_t,$$

$$u_t \cos \chi/2 - w_s \sin \chi/2 = -U_t \cos \chi/2 + W_s \sin \chi/2,$$

$$u_t \sin \chi/2 + w_s \cos \chi/2 = U_t \sin \chi/2 + W_s \cos \chi/2,$$

$$\text{或因 } \sin \chi/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \chi}{2}}, \quad \cos \chi/2 = \sqrt{\frac{1 + \cos \chi}{2}}$$

$$0 = v_t - V_t, \quad (6 \cdot 10)$$

$$0 = (u_t + U_t) \sqrt{1 + \cos x} - (w_s + W_s) \sqrt{1 - \cos x}, \quad (6 \cdot 11)$$

$$0 = (u_t - U_t) \sqrt{1 - \cos x} + (w_s - W_s) \sqrt{1 + \cos x}. \quad (6 \cdot 12)$$

和中面 I 及中面 II 在点 P_s 接触的两个切平面围绕着切线 t (即其相交直线) 转动相等角, 就是说, 由它们相交的角保持常数。若我们把切平面的转动以右螺旋转动向量 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 或 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ 写于参考轴 x, y, z 或 X, Y, Z 上 (图 12), 则有:

$$\omega_x = \frac{w'}{a}, \quad \Omega_X = -\frac{W'}{A},$$

$$\omega_y = -\frac{w''}{a}, \quad \Omega_Y = \frac{W'}{A},$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{a} - \frac{u''}{a} \right), \quad \Omega_Z = \frac{1}{2} \left(\frac{U'}{A} - \frac{V'}{A} \right).$$

若投影于 t 上的分量符合下列式子, 则交角保持不变

$$\omega_t = \omega_y \cos \phi - \omega_x \sin \phi,$$

$$\Omega_t = \Omega_Y \cos \psi - \Omega_X \sin \psi,$$

其合向量相等 ($0 = \omega_t - \Omega_t$):

$$0 = \frac{w'}{a} \cos \phi + \frac{w''}{a} \sin \phi + \frac{W'}{A} \cos \psi + \frac{W''}{A} \sin \psi. \quad (6 \cdot 13)$$

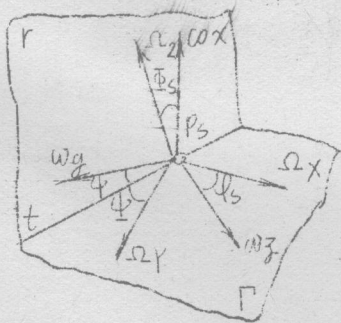


图 12

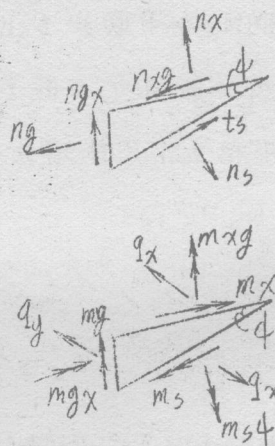


图 13

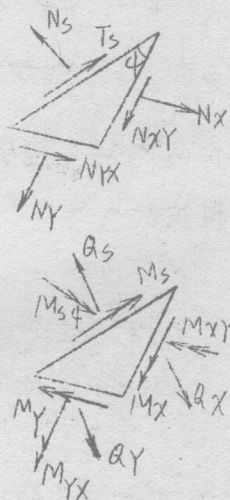


图 14

c) 在从管 I 到管 II 的过渡横断面上或沿着从中面 I 到中面 II (或反之) 所作用的内力和内矩, 按相互作用原理是彼此相等的。在交曲线的点 P_s 上作用于管 I (图 13) 的内力:

$$\left. \begin{aligned} n_s &= \frac{1}{2}(n_x + n_y) + \frac{1}{2}(n_x - n_y)\cos 2\psi + n_{xy}\sin 2\psi, \\ t_s &= -\frac{1}{2}(n_x - n_y)\sin 2\psi + n_{xy}\cos 2\psi, \\ q_s &= q_x \cos \psi + q_y \sin \psi, \end{aligned} \right\} (6.14)$$

和内矩

$$\left. \begin{aligned} m_s &= \frac{1}{2}(m_x + m_y) + \frac{1}{2}(m_x - m_y)\cos 2\psi + m_{xy}\sin 2\psi, \\ m_{s\psi} &= -\frac{1}{2}(m_x - m_y)\sin 2\psi + m_{xy}\cos 2\psi, \end{aligned} \right\} (6.15)$$

在管 II 中的内力 (图 14)

$$\left. \begin{aligned} N_s &= \frac{1}{2}(N_x + N_y) + \frac{1}{2}(N_x - N_y)\cos 2\psi + N_{xy}\sin 2\psi, \\ T_s &= -\frac{1}{2}(N_x - N_y)\sin 2\psi + N_{xy}\cos 2\psi, \\ Q_s &= Q_x \cos \psi + Q_y \sin \psi, \end{aligned} \right\} (6.16)$$

和内矩

$$\left. \begin{aligned} M_s &= \frac{1}{2}(M_x + M_y) + \frac{1}{2}(M_x - M_y)\cos 2\psi + M_{xy}\sin 2\psi, \\ M_{s\psi} &= -\frac{1}{2}(M_x - M_y)\sin 2\psi + M_{xy}\cos 2\psi. \end{aligned} \right\} (6.17)$$

力 t_s 和 T_s 同样力矩 m_s 和 M_s 处于切线 t 上, 力 n_s , q_s , N_s 和 Q_s 同样力矩 $m_{s\psi}$ 和 $M_{s\psi}$ 全部处于垂直于 t 的平面 ε 上 (图 15)。横力 q_s 和 Q_s 相交成 α 角, 按相互作用原理获得下列条件:

$$\left. \begin{aligned} T_s &= -t_s, & M_s &= m_s, \\ Q_s \cos \frac{\alpha}{2} - N_s \sin \frac{\alpha}{2} &= -q_s \cos \frac{\alpha}{2} + n_s \sin \frac{\alpha}{2}, \\ Q_s \sin \frac{\alpha}{2} + N_s \cos \frac{\alpha}{2} &= q_s \sin \frac{\alpha}{2} + n_s \cos \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \right\}$$

或者

$$0 = M_s - m_s, \quad (6.18)$$