13, 132 / 178

函授自学丛书

几何证明与几何学概述

辽宁教育学院函授部

目　　录

第一章　几何学的研究对象及古代几何学

“几何”这个词以及一些简单的几何事实，例如：过已知直线外一点只能作一条直线和已知直线平行；三角形内角和等于180°，等等，是许多人所熟悉的。但是，几何学作为一门基础数学学科，它的研究对象是什么？它所采用的研究方法有哪些特点？几何学的起源和发展，以及同生产实践和其他科学的关系，……对于这样一些问题，有些读者不很了解。在这本小册子中，我们主要通过第一章和第四章介绍有关知识。

1．关于数学的研究对象问题，恩格斯精辟地指出：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。”这里所说“空间形式”，简单来说就是几何学的研究对象。

谁都知道，物质的存在离不开空间，任何物体，小到沙粒，大至星球，都有一定的形状。人们在生产实践和日常生活中所接触到的各种物体，它们的形状更是千姿百态。当然，物体除了具有一定的外部形状之外，还有颜色、质量、硬度等各种物理和化学性质，对这些性质的研究属于不同的科学的范畴。而当我们考察物体的形状即空间形式时，就把物体的其他属性通通撇开，仅仅把它的形状拿来比较，概括出共同的性质，从而得到反映物体空间形式的几何图形。

例如：一段圆形的木料和园形的水泥管、铁管与汽油桶

（图 1），尽管它们的质量等不同，但它们的外部形状是相同的，反映这种共同的空间形式的几何图形都看作园柱形；

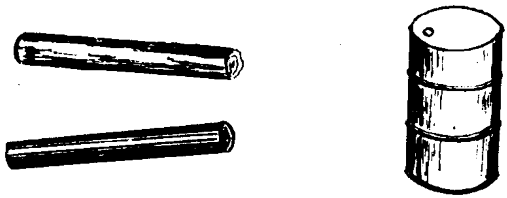

图 1

同样，一只皮球和一只玻璃球、铅球，它们的几何图形都看作球形。

又如：桌面、地板和黑板，给予我们的印象都是平面；直铺的铁轨、电线和从一个小孔透进来的太阳光线，都看作是几何图形上的直线；一颗颗的细沙和子弹在靶上所留下的一点点的痕迹，都看作是几何图形上的点。

由此可知，几何图形是从客观实际中抽象出来的。从客观存在的物体的表面形状中抽象出物体的共同的性质，这就是几何图形的内容。通俗地打个比方，几何图形就好象是物体的一个“框架”。由于任何一个这样的“框架”无非是由点、线、面所组成，因此，几何图形就是点、线、面的集合。点、线、面叫做**几何图形的基本元素**。

显然，点、线、面是不可能在空间中孤立地存在着；它们总是作为“界限”依附于所谓“几何体”* 而存在的；面

（*）凡是占有空间有限部分的几何图形叫做几何体。

是体的界限，线是面的界限，点是线的界限。对这种“界限”的进一步抽象就得到了点、线、面、体的高度抽象的概念：点、只有一定的位置而没有长、宽、高；线，有一定的位置和长度而没有宽、厚；面，有一定的位置和长、宽而没有厚度；体，有一定的位置和长、宽、厚。

以上是关于几何图形的简单叙述。正如恩格斯所指出的：“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。……但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点、没有厚度和宽度的线……”（《反杜林论》）

现在可以给几何学下一个定义了：

几何学是研究几何图形性质的学科，即研究几何图形的形状、大小和相互位置关系的学科。

为了深入地研究各种几何图形的性质和变化规律，将几何图形自成一个理论系统，在纯粹的形式中，以一些简单的事实（所谓原始定义和公理）为出发点，采用逻辑推理的方法，研究点、线、面、体的关系，这就是研究几何学的方法。论理的抽象与逻辑的严谨、完美，是这种研究方法的主要特点。

中学几何分为平面几何与立体几何两大部分。立体几何研究由点、线、面三个元素集合而成的空间几何图形的性质；平面几何研究由点和线集合而成的平面几何图形的性质。平面几何与立体几何一般叫做初等几何。几何学的分类

将在第四章加以介绍。

2．人类的物质生产活动是最基本的实践活动，是决定其他一切活动的东西。象任何自然科学一样，几何学的发展归根到底是由人类的生产实践活动决定的。丈量土地、测量容积、制造器皿与绘图等实践活动，是几何学最初的物质根源。还在上古时代，人们生活与生存的许多问题就要求他们建立最简单的几何概念和事实。大量出土文物表明，距今约8000年至14000年的新石器时代的人，在容器的编造、陶器的烧炼，以及后期的金属冶炼和衣料的纺织上，就利用了菱形、正方形和园形等各种几何图案和花纹，这些图案和花纹还显示了几何图形的合同性、对称性和相似性（图2）

图2

下面，简要地叙述古代几何学的某些史料，着重介绍我们祖国在几何上的光辉成就。

根据我国一部古老的算书《周髀算经》（战国时代以前，约公元前400年的作品）的记载，我们的祖先至少在三千多年前就已经知道了勾股定理。书中记述了周公（公元前1120年左右的人）同商高的一段对话，商高说：“……故折矩，此为勾广三，股修四，径隅五。”勾广是勾长，股修是股

长，径隅是弦长。这段话的意思是，如果将一根直的尺折成一个直角，若较短的一段（勾）长为3，较长的一段（股）长为4，则在这时原来尺的两端间的距离（弦）的长一定为5；简述为"勾三，股四，弦五"。周公就运用此"勾股术"测量了日景和高深广远。该书还载有周公以后不久的陈子，用勾股定理和相似图形的比例关系，推算出地球与太阳间的距离和太阳的直径。

到了汉代，赵爽（字君卿）再注《周髀算经》一书，补了一个"勾股方园图注"，运用了面积分割的性质来证明勾股定理。他在"弦图"（如图3所示，非原图）的注解中说："勾股各自乘，并之为弦实，开方除之，即弦也。"就是说：勾方加股方等于弦方；把它开方就得弦长。如果设勾＝a，股＝b，弦＝c用数学式子表示就是$a^2+b^2=c^2$；$c=\sqrt{a^2+b^2}$。

在赵爽注的《周髀算经》中的"勾股方园图注"里的"弦图"是很著名的，他进一步证明了勾股定理。他说："案弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以股之差自乘为中黄实，加差实，亦成弦实"。也就是说，勾股相乘为△ABC面积的二倍，再二倍为△ABC面积的四倍；勾股差的平方是中间小正方形的面积；二者加在一起就得正方形$ABEF$的面积。用

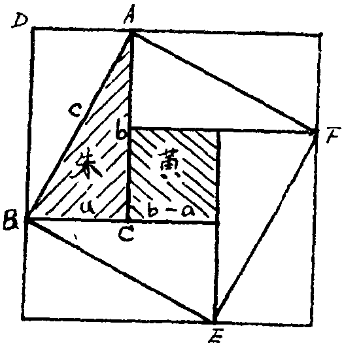

图3

数学式子表示就是$2ab+(b-a)^2=c^2$，即$a^2+b^2=c^2$。

勾股定理在欧洲被认为是希腊人毕达哥拉斯发现的。其实毕氏是公元前500年时代的人，比商高要晚500多年！而且毕氏的证明早已失传，现在几何中关于这个定理的普遍证明是欧几里得给出的，比陈子和商高就更晚了。

在另一部著名的古算书《九章算术》（约成书于公元50年到100年之间）中，记载了大量的面积、体积计算问题。如该书第一章“方田”开头就问：“今有田广十五步，从十六步。问为田几何？”“答曰：一亩。”这就是研究田地丈量问题。“方田”章中还研究过方田（正方形）、直田（矩形）、圭田（等腰三角形）、斜田（梯形）、园田、弧田、环田等。“商功”章中结合实际研究过直六面体、园柱、棱锥、棱台、园锥、园台、球等的体积。

《王曹算经》（魏晋时代即公元三、四世纪时的作品）计算各种形状的田地面积，比《九章算术》更加广泛。例如讨论了“鼓田和“四不等田”（图4），指出它们的面积近似值分别为$(a+b+c)\frac{h}{3}$和$\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$。

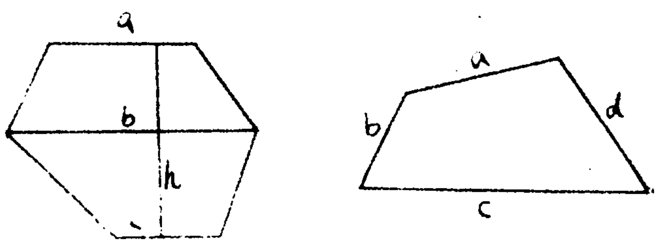

图 4

关于园周率，我国古代数学家有过特殊的研究和突出的贡献，一千多年中在世界上处于遥遥领先的地位。

《九章算术》中所采用的园周率是“周三径一”即$\pi \approx 3$，称为古率。西汉末年（纪元前50—23年）刘歆大大改进了古率，他在为王莽造铜斛时采用了$\pi \approx 3.1547$。

特别值得提到的是刘徽和祖冲之的工作。

三国时大数学家刘徽（魏晋人，生卒年代已不可考）在他的杰作《九章算术注》中创造了“割园术”，开创了计算园周率的新方法。他从半径为1尺的园内接正六边形算起，一直算到正96边形的长，从而算出正192边形的面积为$3.14 \times \frac{64}{625}$平方尺，这相当于求得$\pi \approx 3.14124$。他实际上采用的园周率则是$\pi \approx 3.14$或$\pi \approx \frac{157}{50}$。刘徽并不以此为满足，计算时作了“此率尚微少”的声明，表示运用“割园术”可以一直“割”下去，“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与园周合体而无所失矣。”这就是说，边数愈多，则内接正多边形的面积愈和园的面积接近；当边数无限增加时，则正多边形的面积以园的面积为极限。刘徽还把“割园术”中的极限思想应用到关于“弧田”（弓形面积）的计算中。

南北朝时代的伟大数学家祖冲之（429——500年）首先证明了园周率在3.1415926与3.1415927之间，这是数学史上的一个极其光辉的成就。他的证明方法是从单位园的内接正六边形和外切正六边形出发，求出二者的总边长，然后依次作内接和外切的正12边形、正24边形、……正$6 \cdot 2^{n-1}$边形，

等等。因为园周长夹在内接和外切正多边形的总边长之间，所以算出内接和外切正多边形的总边长，就可以逐步精确地算出园周长。祖冲之是这样叙述他所得到的结果的："以园径一亿为一丈，园周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率园径一百十三，园周三百五十五；约率园径七，园周二十二。"这段话的意思就是

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

$$\text{密率：}\ \pi = \frac{355}{113},\ \text{约率：}\ \pi = \frac{7}{22}.$$

在欧洲直到十六世纪德国人奥托才得到园周率 $\pi \approx \frac{355}{113}$，比祖冲之迟了一千一百多年。

立体几何中著名的体积相等原理* 是祖冲之的儿子祖暅首先发明的，称为祖暅定理。意大利数学家卡瓦列利比祖暅迟了一千一百多年才提出相仿的原理。

埃及是几何学的另一个重要发源地。相传古代尼罗河两岸土地肥沃，但河水每年定期泛滥，水涨时田地被淹没，水退后田地界限消失，土地测量成为生产中不可缺少的工作，促使了几何学的发生。此外，古代埃及劳动人民建筑祭坛和金字塔的需要也促进了几何学的进步。大约在公元前1700年左

（*）即：夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行于这两个平面的任何平面截得的两个截面的面积相等，那末这两个几何体的体积相等。

右，拉·阿·乌斯王朝的一个秘书官阿默斯用纸草*手抄了一本书，这本被称为阿默斯手册的书中有许多关于面积的测量法和关于金字塔的数学问题（共载有课题85个），它与另一本古埃及数学文献《莫斯科杂录》一起记录了古代埃及人的数学知识。例如，关于三角形、梯形等简单直线形和园的面积的计算；关于相似图形的概念；关于一些立体体积的计算，其中特别是正方角锥体的截体（即上下底均为正方形的棱台）的体积公式：

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)。$$

（其中 a、b 是两个正方形的边长，h 是截面的高）显示了古埃及的数学成就。迄今我们仍按这个公式来计算台体（包括棱台和园台）的体积，因为a^2和b^2实际上就是台体的两个底面积，而ab则是它们的比例中项。我们难以想象，古埃及人是怎样发现这样一个复杂而又正确的公式的。

关于几何学的起源与实际生产需要面积测量的关系，也可以从几何学这个名称的来源得到证明。在埃及称几何学为γη（地）μεγρεω（测量），后来几何学传入希腊，称为γεωμ ερiα，译成拉丁文称为*Geo-metria*，也都是“土地测量”的意思。英文*Geometry*直译为“测地学”。现在我们叫做“几何”，是明朝数学家徐光启（1562—1633

（*）纸草是尼罗河三角洲上出产的一种形为芦苇的水生植物，把它的茎逐层撕成薄片，一片片粘接起来，就成为可供写字的纸张。阿默斯手册长约544厘米，宽约33厘米，1858年为英国人兰德发现后收买，所以也称为兰德手册。

年）在翻译欧几里得几何英文本时，将Geometry的前三个字母Geo的拼音译成汉语而来的。

约在公元前七、八世纪时，几何学由埃及传入希腊。现在公认为希腊几何学鼻祖的泰勒斯在这种文化传播中起了重大的作用。后来，另一个希腊数学家毕达哥拉斯（公元前569—500年）创立了以他为首领的学派。这个有名的毕达哥拉斯学派在几何上有过不少贡献，如：给出了勾股定理的完美的证明；证明了三角形内角和等于两直角；研究了空间的五种多面体；指出了不可公度线段的存在性，等等。毕氏及其学派的成就是古希腊几何学的第一个高峰。

然而，在希腊以至世界数学史上影响更大、占有更突出地位的，是另一位古希腊伟大数学家欧几里得（约公元前330—275年）。欧氏曾在埃及的亚历山大大学教授过数学，并且是希腊的亚历山大学派的创始者。他在数十年的学术生涯中写过许多数学著作，可惜多已散失。留传至今的《几何原本》是他最重要的一部著作。全书共分十三卷，除第五、七、八、九、十卷讲述比例和算术的理论外，其余各卷讲的是纯粹的几何学。欧氏在写作这部书时，非常详尽地搜集了当时所知道的几何学方面的资料，然后把这些分散的知识用逻辑推理的链子编排成一个有系统的理论，在几个最初的假设即定义、公设、公理的基础上，利用逻辑推论导出后面的一切定理。欧几里得的《几何原本》曾经是传播几何知识的唯一书籍，在将近二千年的时间里被认为是几何学的标准教科书，世界各民族都用自己的语言发行了《原本》的翻译本（共有一千多种版本）。我国最古的译本是徐光启和利玛窦（意大利传教士）在1607年对《原本》前六卷的合译本。

3．“一切真知都是从直接经验发源的。”几何学起源于人类的生产实践的需要，并直接或间接地在生产实践的推动下发展；几何知识是为实践服务的并要被实践所检验。这种唯物主义的几何观是符合历史实际的，不坚持这一点就会要陷入数学唯心主义的泥坑。

几何学在生产实践中的应用是很广泛的。例如，面积测量，地形勘测，铁道转弯处、交叉处的设计，桥梁、隧道和其他建筑设计，工业生产中大量用到各种几何图形的计算，等等。自从牛顿把欧氏几何看成绝对的东西，建立起他的力学以来，几何学与物理学的发展有着密切的关联，二者互相利用，互相推动。此外，几何学还与数学其他一些学科互相联系着。我们学习几何学的基础知识，根本目的在于运用它为实践服务，解决生产实际和科学实验中出现的有关几何问题。

几何学象其他基础理论学科一样，在它的发展进程中，有其相对独立于现实世界之外的自己的规律。点、线、面、体的概念是从现实世界中千千万万具体的物体抽象而来的；“过不同的两点可以作一条直线”，“全体大于部分”等几何公理也都是来源于实际经验。然而，“从现实世界抽象出来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界脱离，并且作为某种独立的东西，作为世界必须适应的外来的规律而与现实世界相对立。”（《反杜林论》）从已知的条件出发，遵循形式逻辑的规律而推导出未知的正确的结论，这种科学的思维方面和推理方法，叫做逻辑推理。在几何学从实践发生又服务于实践的过程中，形式逻辑的推理论证方法发挥了重要作用。事实上，欧几里得创立几何理论，就主要依靠了亚

里士多德* 的逻辑学的帮助，才使他的几何学获得了巩固的基础。当人们把实际问题归结为一个几何问题后，也离不开逻辑推理方法去研究几何图形。正如恩格斯所指出的：“甚至形式逻辑也首先是探寻新结果的方法，由已知进到未知的方法。”（《反杜林论》）

（*）亚里士多德（公元前384—322年），希腊哲学家，逻辑学创始人。

第二章 几何概念和命题

一、几 何 概 念

概念与概念的定义

几何学和其他科学一样，必须对这门科学有关的所有概念加以确定的解释。概念是现实世界的事物和现象的本质属性在人们头脑中的反映。正如毛主席在实践论中指出的："原来人在实践过程中，开始只看到过程中各个事物的现象方面，看到各个事物之间的外部联系。""社会实践的继续，使人们在实践中引起的感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的头脑里生起了一个认识过程的突变（即飞跃）产生了概念"。

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学，因而数学概念是现实世界空间形式和数量关系这种本质属性在人们头脑中的反映。概念来源于实践，它既不是头脑中固有的，也不是臆造的，只能是客观事物在人们头脑中的反映。

例如，人们在现实生活中常常看到圆形的物体：皮带轮、车轮、太阳等等。这里我们既不考虑它们是什么材料制成的，也不研究它们的性能，只看其空间形式和数量关系，而得到了它们的本质属性，即是"在同一平面上，到定点等距的所有点构成的图形。"这样就得出了圆的概念。

定义概念

用定义的形式来揭示某一概念的本质属性，借以区别其

它概念，这样给出的概念叫做**定义概念**。

在数学（或其他学科）中，引进新概念多是通过定义的形式，即用已知的概念来说明新概念。例如，“一双对边平行且相等的四边形，叫做平行四边形”。这里“平行四边形”是新概念，它是用“对边平行且相等”、“四边形”等已知概念来定义的。下定义不能随心所欲，必须遵守以下规则。

下定义的规则

1、定义是可逆的，且与被定义对象相适应。

被定义的对象具有某种本质属性，反过来具有这些本质属性的就一定是被定义的对象。这个性质叫做**定义的可逆性**。例如：两端点在同一圆周上的线段叫弦，反过来，弦的两个端点必在同一圆周上。不具备这个性质的定义，是不正确的。例如“平行四边形是四边形”反过来“四边形是平行四边形”就不正确了，因而不能用“平行四边形是四边形”作为“四边形”的定义。定义的可逆性也是判定定义是否正确的一种方法。

定义与被定义对象应该相适应。定义既不能过宽，也不能过窄。例如“线上任意两点间的部分叫做线段”这个定义显然不正确，因为线可以是直线，也可以是曲线或折线，这样定义就过宽，因而定义不正确。又如：“直线上一定部分叫做线段”，这个定义同样也是不正确的，因为“一定部分”限制的又太严，仅这部分叫线段，而其它部分不能叫线段是不正确的。这显然是过窄了。因此，定义即不能宽，也不能窄。必须相适应。

2、定义不能循环，不应同语反复。一般不用否定形式

定义概念。

例1.

“两直线垂直时所构成的角叫直角；两直线相交成直角时叫做两直线垂直”。

如果直角，垂直的概念都是新的，先用“直角”定义“垂直”，再用“垂直”定义“直角”，这样给两个概念下定义不能揭示概念的本质属性只能造成恶性循环。

例2.

“两条射线所成的角，叫做角”。

这样用角来定义角，是说明不了角的概念的含意的。这就是犯了同语重复的毛病。因而同语重复在定义中是不允许的。

例3.

“不是直角的是锐角。”

“三角形不是四边形”。

象这样用否定语气来定义概念显然也是不正确的，因为非直角可能是锐角，也可能是钝角。而不是四边形的也不一定是三角形。因而一般不用否定语来定义概念。（在个别情况下也可采用否定形式，但否定后的事物必须是唯一存在的。）

3、定义必须简明确切，不能摸棱两可。

下定义的语言必须是精练的明确的。不能含糊，且不能有废话。

例4.

“平行四边形是两组对边平行且相等的平面四边形”中“相等”或平行”就是多余的。