

12.7元

振动理论与测试

罗晋华 编

华中理工大学力学系

目 录

第一章 单自由度线性系统的振动	1
§ 1-1 振动微分方程的建立	1
§ 1-2 无阻尼系统的自由振动	4
§ 1-3 能量法	9
§ 1-4 等效质量	11
§ 1-5 阻尼对自由振动的影响	13
§ 1-6 周期激励下系统的响应	16
§ 1-7 任意激励下系统的响应	26
§ 1-8 各种阻尼的表示方法	31
第二章 多自由度线性系统的振动	37
§ 2-1 多自由度系统振动方程的建立	37
§ 2-2 无阻尼自由振动、特征值问题	44
§ 2-3 固有振型的正交性, 展开定理	53
§ 2-4 坐标的变换与解耦, 主坐标	56
§ 2-5 系统对初始激励的响应	60
§ 2-6 无阻尼受迫振动	62
§ 2-7 阻尼受迫振动	67
§ 2-8 动力消振原理及应用	68
第三章 实用振动分析方法	75
§ 3-1 瑞利原理, 能量法	75
§ 3-2 李茨法	78
§ 3-3 邓克莱公式	82
§ 3-4 矩阵迭代法	84
§ 3-5 雅可比方法	89
§ 3-6 用数字计算机求解	94

第四章 连续系统的振动	109
§ 4-1 连续系统与离散系统的关系	109
§ 4-2 弦的横向振动, 杆的纵向振动, 圆轴的扭转振动	111
§ 4-3 梁的弯曲振动	115
§ 4-4 固有振型的正交性, 展开定理	121
§ 4-5 振型迭加法	123
§ 4-6 薄膜的振动	127
§ 4-7 连续系统振动的近似方法	131
第五章 振动测量常用仪器介绍	138
§ 5-1 振动测量的一般概念	138
§ 5-2 惯性式传感器的力学原理	140
§ 5-3 测振传感器的类型和特性	143
§ 5-4 振动测量放大器	146
§ 5-5 记录及分析设备	150
§ 5-6 仪器设备的合理选择和使用	154
第六章 振动特性参数的常用测量方法	158
§ 6-1 简谐振动频率的测量	158
§ 6-2 两同频谐振动相位差的测量	160
§ 6-3 系统固有频率, 振型及阻尼的测量	162
§ 6-4 相关分析与频谱分析	167
§ 6-5 模态参数识别简介	174

第一章 单自由度线性系统的振动

通常, 振动系统可按两种不同的数学模型分为离散系统和连续系统。离散系统具有有限个自由度, 而连续系统具有无限多个自由度。一个系统的自由度定义为完全描述其运动所需独立坐标的个数。在分析实际的振动系统时, 往往可根据问题的需要, 将其简化为某种理想模型。例如简化为若干个“无质量”的弹簧和“无弹性”的质量所组成的“质量-弹簧”系统。仅有一个“质量-弹簧”的系统是最简单的振动模型, 如图 1-1 所示。若质量块在竖直方向上作上下运动, 系统的位置可用一个独立坐标 y 来确定, 则称该系统为单自由度系统。单自由度线性系统的振动是最简单的振动问题, 然而, 其中的一些重要概念, 特性和研究方法又是研究复杂系统振动问题的基础。

§ 1-1 振动微分方程的建立

建立振动微分方程的方法很多, 这里介绍常用的三种方法。

1. 应用牛顿定律推导振动微分方程

图 1-1 所示的振动模型, 质量为 m , 弹簧刚度为 k , 原始长度为 l_0 , 静止伸长为 δ_{st} 。设弹簧力和变形满足虎克定律, 则有

$$mg = k\delta_{st} \quad (1-1)$$

在质量块上作用有干扰力 (激励) $F(t)$ 、阻尼力 $C\dot{y}$ 和弹簧力 ky 。这里只考虑与速度成正比的阻尼力, 又称粘性阻力, C 称为粘性阻尼系数。

将坐标轴原点置于静平衡位置上, 如图中所示, 则 y 值表示质量块相对于平衡位置的偏离。质量块在任意瞬时的受力情况如图 1-1(b) 所示。根据牛顿第二定理得

$$m\ddot{y} = mg - k(y + \delta_{st}) - C\dot{y} + F(t)$$

考虑到 (1-1) 式, 上式可简化为

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = F(t) \quad (1-2)$$

这就是单自由度线性系统振动微分方程的一般形式。由 (1-2) 式可见, 质量块的重力没有出现, 这是因为不论什么时间, 重力都和弹簧力中的 $k\delta_{st}$ 平衡。因此, 在建立振动微分方程时, 取静平衡位置作为坐标原点较为方便。读者可以用弹簧原长位置作为坐标原点, 建立振动方程并和 (1-2) 式比较。

例 1-1 图 1-2 所示为一复摆。摆重 W , 对悬挂点 O 的转动惯量为 J_0 , 重心 C

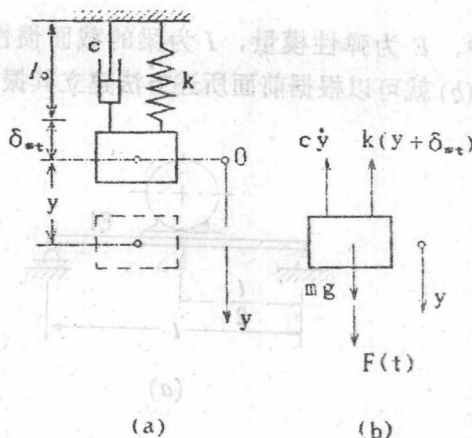


图 1-1

至O点距离为 s ，试列出振动微分方程。

解 以 θ 表示在任意瞬时摆偏离平衡位置的角位移。此时，重力的一个分量 $W\sin\theta$ 将产生恢复力矩 $s \cdot W \sin\theta$ 。根据定轴转动微分方程可得

$$J_0 \ddot{\theta} = -Ws \cdot \sin\theta$$

$$\text{或} \quad J_0 \ddot{\theta} + Ws \cdot \sin\theta = 0 \quad (1)$$

它是非线性方程，在微摆动的条件下，即 θ 很小时，有 $\sin\theta \approx \theta$ ，(1)式可简化为如下线性微分方程：

$$J_0 \ddot{\theta} + Ws\theta = 0 \quad (2)$$

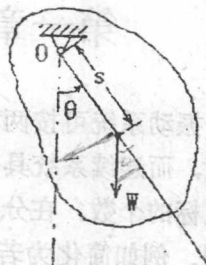


图 1-2

2. 用影响系数法建立振动微分方程

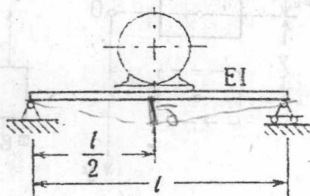
质量为 m 的重物安放在简支梁的中点处，如图 1-3 所示。如果梁的重量可以略去不计，则可简化成质量—弹簧系统。从材料力学中简支梁的挠度公式可求得刚度系数 k 。由于梁中点的挠度值 δ 为

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

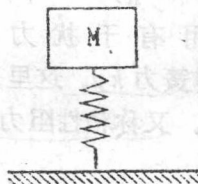
于是梁中点刚度系数

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{48EI}{l^3}$$

其中， E 为弹性模量， I 为梁的截面惯性矩。确定了刚度系数 K 后，对简化模型图 1-3(b) 就可以根据前面所述方法建立其振动方程。



(a)



(b)

图 1-3

对这类梁的振动问题，在工程中常用影响系数法来建立微分方程。在图 1-4(a) 上 1 点作用单位载荷，在 2 点产生的位移 α_{21} 称为柔度影响系数。根据位移互等原理，有 $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ 。据此定义， α_{11} 就表示在 1 点作用单位力时，在 1 点产生的位移。当讨论单自由度系统时，只需系数 α_{11} ，见图 1-4(b)。当在梁上施加力 P ，则在 1 点发生的静变形（挠度） δ_{11} 为

$$\delta_{11} = P\alpha_{11} \quad (1-3)$$

取静平衡位置为坐标原点，当梁振动时，在激励力 $F(t)$ ，惯性力 $(-m\ddot{y})$ 的联合作用下，1 点的挠度为

$$(y + \delta_{11}) = [P + F(t) + (-m\ddot{y})]\alpha_{11}$$

式中 y 是偏离平衡位置的位移。利用 (1-3) 式, 最后化简得到

$$m\alpha_{11}\ddot{y} + y = \alpha_{11}F(t) \quad (1-4)$$

这就是用柔度影响系数法建立的振动微分方程式。对于弹性结构系统, 柔度影响系数比较容易计算, 而且已经列成表格手册化了。例如图 1-4(b) 的 $\alpha_{11} = l^3 / 48EI$ 。

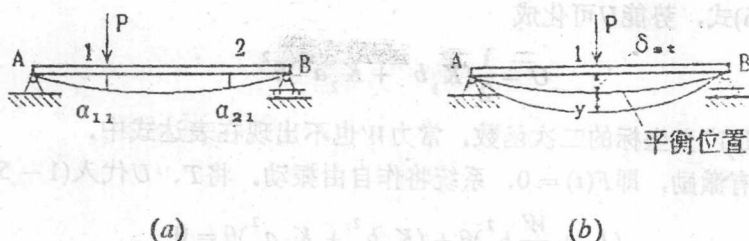


图 1-4

3. 应用拉格朗日方程的方法

对于较复杂的系统, 特别是多个元件组成的单自由度系统或多自由度系统, 采用拉格朗日第二类方程来建立振动微分方程较为方便。对于单自由度系统, 如果广义坐标记为 q , 原点置于平衡位置上, 则有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q_R(t) + Q(t) \quad (1-5)$$

式中 T 为系统的动能, U 为势能, $Q(t)$ 为广义激励力, $Q_R(t)$ 为广义阻尼力。

现以图 1-5 所示地震记录仪为例说明此方法。记录仪中有一重 W 的物体在刚度系数为 K_1 的弹簧上, 其上端与指针 BOA 铰接; 另一弹簧常数 K_2 的水平弹簧联结在指针和框架之间, 指针绕 O 轴的转动惯量为 J_0 , 设质心与转轴 O 重合。已知 $OD = a$, $OB = b$, 不计弹簧质量。取弹簧重物和指针组成的系统为研究对象, 其位置用指针的转角 θ 确定, 由于仅有一个广义坐标, 所以是单自由度振动系统。设平衡时 $\theta = 0$, 两弹簧的静伸长分别为 δ_1 , δ_2 , 在振动的任一瞬时, 系统的动能为

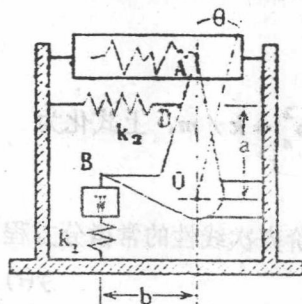


图 1-5

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{W}{g} (b\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \left(J_0 + \frac{W}{g} b^2 \right) \dot{\theta}^2$$

若零势面选在平衡位置, 则势能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} K_1 [(\delta_1 - b\theta)^2 - \delta_1^2] + \frac{1}{2} K_2 [(\delta_2 - a\theta)^2 - \delta_2^2] + Wb\theta \\ &= \frac{1}{2} K_1 (b^2\theta^2 - 2b\delta_1\theta) + \frac{1}{2} K_2 (a^2\theta^2 - 2a\delta_2\theta) + Wb\theta \end{aligned}$$

由理论力学中的虚位移原理知, 系统在平衡位置时, 广义力等于零, 即

$$\left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0$$

对本例

$$\left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta=0} = Wb - K_1 b \delta_1 - K_2 a \delta_2 = 0 \quad (1-6)$$

实际上这就是平衡条件。

考虑到(1-6)式, 势能 U 可化成

$$U = \frac{1}{2}(K_1 b^2 + K_2 a^2)\theta^2$$

由此可见, 势能是广义坐标的二次函数。常力 W 也不出现在表达式中。

如果系统没有激励, 即 $F(t) = 0$, 系统将作自由振动。将 T 、 U 代入(1-5)式, 得

$$(J_0 + \frac{W}{g}b^2)\theta + (K_1 b^2 + K_2 a^2)\theta = 0$$

用拉格朗日方程(1-5)式建立系统微振动的运动微分方程, 其一般形式为

$$m\ddot{q} + C\dot{q} + kq = Q(t) \quad (1-7)$$

以上得到的微分方程(1-2), (1-4), (1-7)各式, 虽在形式上有所不同, 但实际上属同一类型。知道其中一个方程的解, 也就不难得到其它方程的解。所以下面只讨论(1-2)式的解就可以了。

§ 1-2 无阻尼系统的自由振动

当系统不存在激励力 $F(t)$, 也不考虑阻尼影响时, 便得到单自由度系统自由振动微分方程式

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

令 $\omega_n^2 = k/m$, 上式化为

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0 \quad (1-8)$$

这是二阶齐次线性的常微分方程。它的通解为

$$y(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (1-9)$$

其中积分常数 C_1 和 C_2 由初始条件确定。设初始条件为

$$t=0 \text{ 时, } y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

可定出 $C_1 = y_0$, $C_2 = \dot{y}_0 / \omega_n$, 代入(1-9)式后, 得

$$y(t) = y_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (1-10)$$

在研究振动问题时, 我们常常将(1-8)式的解写成相角形式

$$y(t) = A \sin(\omega_n t + \beta) \quad (1-11)$$

其中 A , β 为任意常数, 分别称为振幅和初相位。我们把式(1-11)所表示的运动称为简谐振动。对于上述的初始条件, 不难定出

$$A = \sqrt{y_0^2 + \dot{y}_0^2 / \omega_n^2} \quad (1-12)$$

$$\beta = \arctg \frac{\omega_n y_0}{\dot{y}_0} \quad (1-13)$$

由(1-9)式可见, 单自由度线性系统的无阻尼自由振动是以平衡位置为中心的谐振动, 它包括两部分: 一部分与 $\cos \omega_n t$ 成正比, 其值与系统的初位移 y_0 有关; 另一部分与 $\sin \omega_n t$ 成正比, 其值与系统的初速度 $\dot{y}_0$ 有关, 这两部分都是简谐运动。其运动的时间历程分别如图 1-6(a)、(b)所示。将它们合成就得到(1-11)式所表示的时间历程, 见图 1-6(c)。

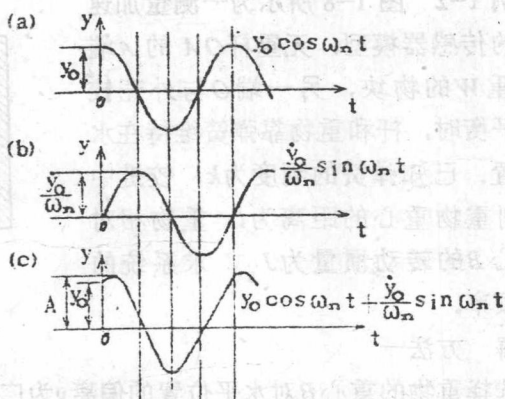


图 1-6

系统每振动一次所需的时间称为周期, 以 T 表示, 在简谐运动的情况下, 每经过一个周期, 位相增加 2π , 所以

$$T = 2\pi / \omega_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{秒}) \quad (1-14)$$

每秒振动的次数称为振动频率, 记作 f , 频率和周期互为倒数, 即

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{赫兹}) \quad (1-15)$$

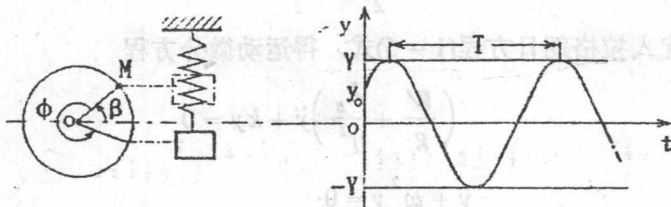


图 1-7

简谐振动(1-11)可用一个作等速圆周运动的点在直线上的投影来表示, 如图 1-7 所示。设质点 M 被限制在一个半径为 A 的杆端, 杆绕固定点 O 转动, 其等角速度为 ω_n , 如果杆初始位置与水平的夹角为 β , 则点 M 在 y 轴上的投影点的运动规律恰好

由(1-11)式给出。这里，我们把 ω_n 称为圆频率。显然

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1-16)$$

从式(1-16)知，圆频率只决定于系统的质量和弹簧刚度，因此常常又把它称为固有频率。它反映了一个振动系统的内在特性，是振动系统的一个重要参数。

例 1-2 图 1-8 所示为一测量加速度用的传感器模型，无重杆 OA 的 A 端固结重物 W 的物块，另一端 O 与外壳铰接。平衡时，杆和重物靠弹簧维持在水平位置。已知弹簧的刚度为 k ，铰链中心 O 到重物重心的距离为 l ，重物相对于重心 B 的转动惯量为 J_B ，求系统的固有频率。

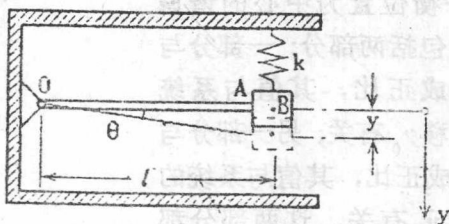


图 1-8

解 方法一

选择重物的重心 B 对水平位置的偏离 y 为广义坐标，则系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{W}{g} + \frac{J_B}{l^2} \right) \dot{y}^2 \quad (1)$$

系统的势能由弹性势能和重力势能两部分组成。即

$$U = -Wy + \frac{1}{2} k (\delta_{st} + y)^2 - \frac{1}{2} k \delta_{st}^2 = -Wy + \frac{1}{2} ky^2 + k\delta_{st}y \quad (2)$$

其中 δ_{st} 是在平衡位置上弹簧的静伸长。

应用平衡条件

$$\left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0} = 0$$

得

$$-W + k\delta_{st} = 0$$

于是

$$U = \frac{1}{2} ky^2 \quad (3)$$

将 T 、 U 代入拉格朗日方程(1-5)式，得运动微分方程

$$\left(\frac{W}{g} + \frac{J_B}{l^2} \right) \ddot{y} + ky = 0 \quad (4)$$

或

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

其固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g} + \frac{J_B}{l^2}}} \quad (5)$$

方法二 取角位移 θ 为广义坐标，则系统动能分别为

$$T = \frac{1}{2} (J_B + \frac{W}{g} l^2) \dot{\theta}^2 \quad (6)$$

$$U = \frac{1}{2} k l^2 \theta^2 \quad (7)$$

运动微分方程为

$$(J_B + \frac{W}{g} l^2) \ddot{\theta} + k l^2 \theta = 0 \quad (8)$$

同样得到固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k l^2}{J_B + \frac{W l^2}{g}}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g} + \frac{J_B}{l^2}}} \quad (9)$$

由此可见, 同一个系统当选用不同的广义坐标时, 列出的运动微分方程的形式虽有所不同, 但最终求得的固有频率与坐标选择无关。

例 1-3 图 1-9 所示为一根弯曲刚度为 EI 的外伸梁。自由端有重为 W 的物块, 若不计梁的质量, 试计算系统的固有频率。

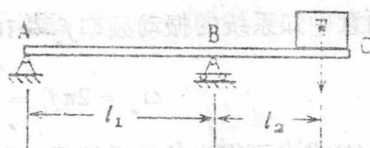


图 1-9

解 从材料力学公式可以算出由物块自重引起自由端 C 的静变形

$$\delta_{st} = \frac{W l_2^2 l_1}{3EI} (1 + \frac{l_2}{l_1})$$

影响系数

$$\alpha_u = \frac{l_2^2 l_1}{3EI} (1 + \frac{l_2}{l_1}) \quad (1)$$

重物的运动微分方程为

$$m \alpha_u \ddot{y} + y = 0 \quad (2)$$

从而有

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{m \alpha_u}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{g}{W} \cdot \frac{3EI}{l_2^2} (1 + \frac{l_2}{l_1})} \quad (3)$$

若 $EI = 343 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $l_1 = 9.8 \text{ m}$, $l_2 = 0.9 \text{ m}$, $W = 2646 \text{ N}$,

则

$$\delta_{st} = 0.562 \text{ cm}$$

系统的振动频率

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{980}{0.562}} = 6.65 \text{ Hz}$$

从 (3) 式可见, 静变形 δ_{st} 的大小决定了固有频率。只要知道 (计算或测出) δ_{st} , 便容易求得固有频率 ω_n 。

例 1-4 飞轮悬挂在钢杆下端, 如图 1-10 所示。钢杆直径 $d = 0.5 \text{ cm}$, 长 $l = 2 \text{ m}$ 。如飞轮得一初位移 θ_0 后释放, 测得振动 10 次所经历的时间为 30.2 秒, 求此飞轮的转动惯量 J_0 。

解 以飞轮和轴作为研究对象, 选择坐标轴 x , 则飞轮在水平面上的位置以 θ 角表示, 应用刚体转动方程, 得

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (1)$$

式中 k_t 为扭转刚度, $k_t = GI_P / l$, 其中 G 为钢杆的剪切弹性模量, $G = 8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; I_P 为钢杆截面极惯性矩

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = 0.006136 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

所以

$$k_t = GI_P / l = 2.455 (\text{N} \cdot \text{m} / \text{rad})$$

从题意中知系统的振动频率 $f_n = 10 / 30.2 \text{ Hz}$. 因此, 系统的固有频率为

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \times \frac{10}{30.2} = 2.081 \text{ rad/s}$$

另外, 从(1)式中可得飞轮转动惯量 J_0 与固有频率的关系

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad (2)$$

将已知数据 ω_n 及 k_t 代入(2), 得

$$J_0 = 0.57 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

工程中的飞轮用得很多, 如发动机、冲压机、剪床等设备都必须有飞轮, 而且对飞轮的转动惯量有一定的要求, 若要校核理论设计计算是否正确及误差多少, 便可用这种实验方法检验。

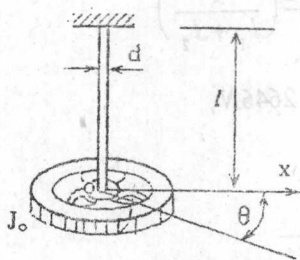


图1-10

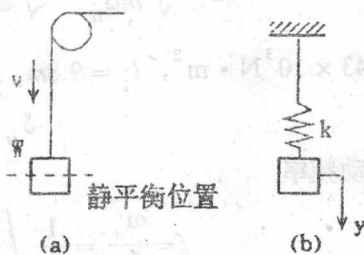


图1-11

例 1-5 一卷扬机通过钢丝绳, 绕过固定滑轮吊起重物 $W = 15 \text{ kN}$, 如图 1-11 所示。钢丝绳的弹簧刚度为 $k = 5.9 \text{ kN/cm}$, 以 $v = 0.25 \text{ m/s}$ 的速度下降。如果卷扬机突然刹车, 钢丝绳上端突然停止。求钢丝绳中所受的最大张力。

解 在重物等速下降时, 根据静平衡条件, 钢丝绳内张力为

$$T_1 = W = 15 \text{ kN}$$

钢丝绳上端突然停止时,重物由于惯性而继续往下运动,开始对静平衡位置作上下自由振动。其振动微分方程可由(1-11)式表出。其振幅由(1-12)式为

$$A = \sqrt{y_0^2 + \dot{y}_0^2 / \omega_n^2} \quad (1)$$

其中 ω_n 为系统的固有频率,这里

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k g}{W}} = \sqrt{5.9 \times 980 / 15} = 19.6 \text{ (1/s)}$$

振动开始时,

$$t = 0, y_0 = 0, \dot{y}_0 = v = 0.25 \text{ m/s}$$

将 ω_n 、 y_0 和 $\dot{y}_0$ 代入(1)式,得

$$A = 1.27 \text{ cm}$$

由于振动而引起钢丝绳的张力为

$$T_2 = kA = 5.9 \times 1.27 = 7.49 \text{ kN}$$

钢丝绳中总的最大张力为

$$T = T_1 + T_2 = 15 + 7.49 = 22.49 \text{ kN}$$

可见钢丝绳中由于振动而增加的动张力几乎是静张力的 50%, 是一个不小的数值, 在运行中应避免这种情况。

§ 1-3 能量法

确定一个系统的固有频率, 是研究振动问题的重要任务。由上节的论述可见, 只要列出系统的振动微分方程, 就可求得固有频率。但对于某些复杂的系统, 建立系统的振动微分方程是不容易的。当系统作无阻尼自由振动时, 系统的机械能守恒, 这时, 我们可以利用能量方程求出系统的固有频率, 这就是计算系统固有频率的能量法。

设系统的动能和势能分别为 T 和 U , 由于

$$T + U = \text{常数} \quad (1-17)$$

当系统作简谐振动, 质量块通过平衡位置时, $U = 0$, $T = T_{\max}$; 而当质量块到达偏离平衡位置最大处 A 时, 速度 $\dot{y} = 0$, 即 $T = 0$, 而 $U = U_{\max}$ 。由机械能守恒定律得

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (1-18)$$

上式用位移和速度表示, 有

$$\frac{1}{2} m \dot{y}_{\max}^2 = \frac{1}{2} k y_{\max}^2 \quad (1-19)$$

由于

$$y = A \sin(\omega_n t + \beta)$$

$$\dot{y} = A \omega_n \cos(\omega_n t + \beta)$$

由此得

$$\dot{y}_{\max} = \omega_n y_{\max} \quad (1-20)$$

将(1-20)代入(1-19)式, 有

$$\frac{1}{2} m A^2 \omega_n^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

从而得固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

这里不难看出, 能量法的基本思想是: 首先假设系统的振动形式, 然后计算系统的最大动能和最大势能, 使它们相等便得到固有频率。

对于那些不易简化为弹簧—质量系统的振动系统来说, 利用能量法求系统的固有频率是比较方便的, 这可以从下面的例子中看到。

例 1-6 开口 U 形管内装着长为 l , 重度为 γ 的水银, 求液面在其平衡位置附近振动的频率 (图 1-12)。

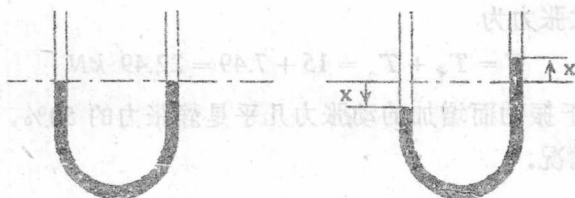


图 1-12

解 忽略水银与管壁间的摩擦, 系统是保守的, 用液面偏离其平衡位置的位移 x 描述该系统的运动, 设 U 形管的截面积为 A , 则当 $x=0$ 时, $\dot{x} = \dot{x}_{\max}$, 此时动能最大:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \gamma A l \dot{x}_{\max}^2$$

当 $x = x_{\max}$ 时, 系统的势能最大, 取系统处于平衡状态时的位置为势能的比较位置, 则有

$$U_{\max} = \gamma A x_{\max}^2$$

$T_{\max} = U_{\max}$, 并注意到 $\dot{x}_{\max} = \omega_n x_{\max}$, 得

$$\frac{1}{2} \frac{\gamma A l \omega_n^2}{g} x_{\max}^2 = \gamma A x_{\max}^2$$

所以

$$\omega_n^2 = \frac{2g}{l}$$

振动频率为

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

例 1-7 求图 1-13 中重 P 的均质圆盘沿半径为 R 的圆柱内表面作无滑动滚动的固有频率。设圆盘的半径为 r ，圆盘在其平衡位置附近作微振动。

解 取两圆中心连线偏离铅直线的角 φ 为广义坐标，当 $\varphi=0$ 时， $\dot{\varphi}$ 最大，记为 $\dot{\varphi}_{\max}$ ，此时系统的动能最大：

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\varphi}_{\max}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_{\max}^2 \quad (1)$$

其中 I_c 为圆盘对质心 C 的转动惯量， $\omega_{\max}$ 为圆盘在该位置时的角速度，显然

$$\omega_{\max} = \frac{(R-r)}{r} \dot{\varphi}_{\max} \quad (2)$$

注意到

$$I_c = \frac{1}{2} m r^2; \quad \pi = \frac{P}{g} \quad (3)$$

将(2)、(3)式代入(1)，得到

$$T_{\max} = \frac{3P}{4g} (R-r)^2 \dot{\varphi}_{\max}^2 \quad (4)$$

当 $\varphi = \varphi_{\max}$ 时，系统的势能最大，

$$U_{\max} = mg(R-r)(1 - \cos \varphi_{\max}) \approx \frac{1}{2} P(R-r) \varphi_{\max}^2 \quad (5)$$

令 $T_{\max} = U_{\max}$ ，利用关系 $\dot{\varphi}_{\max} = \omega_n \varphi_{\max}$ ，求得系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

§ 1-4 等效质量

在此之前，我们考察质量-弹簧系统的振动时，总是假设弹簧质量可以忽略，但在一些问题中，弹簧的质量可能占系统质量的相当部分，这时，我们必须考虑弹簧质量对系统固有频率的影响。但是，当考虑弹簧质量时，我们面临的是一个分布质量系统的振动问题（这个问题将在第四章讨论），这里作为一种近似方法，我们可以事先对弹簧分布质量的运动形式作某种假定，把一个分布质量的系统简化为一个单自由度系统，从而计及弹簧质量所引起的系统动能的增加，表示为动能的标准形式：

$$T' = \frac{1}{2} m' \dot{x}^2$$

上式中的 m' 集中反映了弹簧质量对系统固有振动的影响，我们把 m' 称为弹簧的等效质量。

下面通过具体例子说明如何利用等效质量的概念作近似计算。

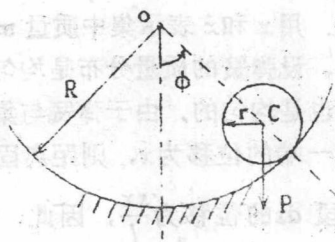


图 1-13

例 1-8 考虑质量-弹簧系统, 图 1-14 所示。设弹簧原长为 l , 单位长度的质量为 ρ , 试求弹簧质量对系统固有频率的影响。

解 用 x 和 $\dot{x}$ 表示集中质量 m 的位移和速度, 设弹簧的质量分布是均匀的, 它的变形也是均匀的。由于弹簧与集中质量连接的一端的位移为 x , 则距离固定端为 s 的微段 ds 的位移为 $\frac{sx}{l}$, 因此, 当集中质量 m 的速度为 $\dot{x}$ 时, 微段 ds 的速度为 $\frac{s\dot{x}}{l}$, 它的动能为

$$dT' = \frac{1}{2} \rho ds \left(\frac{s\dot{x}}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{s^2 \dot{x}^2}{l^2} ds \quad (1)$$

整个弹簧的动能为

$$T' = \int_0^l \frac{1}{2} \rho \frac{s^2 \dot{x}^2}{l^2} ds = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \rho l \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_s \right) \dot{x}^2 \quad (2)$$

其中 $\rho l = m_s$ 为弹簧的总质量。于是我们得到弹簧的等效质量为

$$m' = \frac{1}{3} m_s \quad (3)$$

把这个质量加到集中质量 m 上去, 就得到系统的固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3} m_s}} \quad (4)$$

例 1-9 均质等截面梁, 在梁的中央放置一集中质量 m_1 , 图 1-15 所示。如果把梁本身的质量 m_2 考虑在内, 求系统的固有频率和梁的等效质量。

解 已知梁中央处有静载荷 $m_1 g$ 作用时梁的挠度曲线为

$$y = \frac{m_1 g}{48EI} (3l^2 x - 4x^3), \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2}) \quad (1)$$

梁中点的挠度为

$$y_m = \frac{m_1 g l^3}{48EI} \quad (2)$$

将(1)式的 y 用 y_m 表出, 有

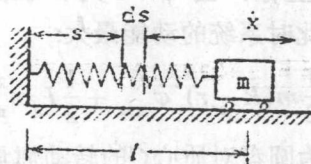


图 1-14

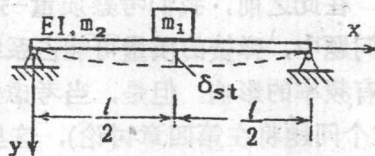


图 1-15

$$y = y_m \cdot \frac{(3l^2x - 4x^3)}{l^3} \quad (3)$$

假设梁运动时的挠度曲线与静挠度曲线形状相同，则只要把上式中的 y 和 y_m 都看成变量，上式就可以代表梁运动时的挠度曲线，因此有

$$\dot{y} = \dot{y}_m \cdot \frac{(3l^2x - 4x^3)}{l^3} \quad (4)$$

设梁单位长度的质量为 ρ ，则梁的动能可用 $\dot{y}_m$ 表示为标准形：

$$T' = 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \rho (\dot{y}_m \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3})^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} \rho l \right) \dot{y}_m^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} m_2 \right) \dot{y}_m^2 \quad (5)$$

其中 $m_2 = \rho l$ 为梁的质量，因此，梁的等效质量为

$$m' = \frac{17}{35} m_2 \quad (6)$$

系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1 + \frac{17}{35} m_2}} \quad (7)$$

其中 $k = \frac{48EI}{l^3}$ 。

上述求解系统自由振动的固有频率的方法称为瑞利法。实践证明，以静变形作为假定的振动形式，所得近似解与准确解比较，一般来说误差是很小的。

§ 1-5 阻尼对自由振动的影响

在无阻尼的自由振动中，由于机械能守恒，运动保持为等幅振动。但实际的振动系统都存在有阻尼，它不断地耗散能量，使振动逐渐减弱，直到完全消失。在线性系统中，认为阻力 R 与速度 v 成正比，即 $R = cv$ ，这样的阻尼称为粘性阻尼， c 为粘性阻尼系数。

具有粘性阻尼单自由度系统的自由振动微分方程为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (1-21)$$

为了理论研究的方便，令

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (1-22)$$

这里 ω_n 为固有频率， ξ 称为阻尼比，于是方程(1-21)可以写成

$$\ddot{y} + 2\omega_n \xi \dot{y} + \omega_n^2 y = 0 \quad (1-23)$$

设解具有如下形式

$$y = Ae^{\lambda t}$$

代入(1-23)式，得特征方程

$$\lambda^2 + 2\omega_n \xi \lambda + \omega_n^2 = 0$$

特征根为

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$$

于是方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1-24)$$

式中 C_1, C_2 由初始条件确定。其振动特性取决于特征根 λ 的性质。下面就三种情况进行讨论：

(1) 当 $\xi > 1$ 时(大阻尼情况)

此时特征方程有两个不同的负实根

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$$

对应的运动方程为

$$y = e^{-\xi\omega_n t} (C_1 e^{\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_n t} + C_2 e^{-\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_n t})$$

如果给出初始条件, $t=0$ 时, $y(0)=y_0, \dot{y}(0)=v_0$ 。设 $y_0 > 0$, 则运动图形大致如图 1-16 所示。可见 y 随时间按指数规律衰减, 没有平衡位置作往复运动的现象, 运动不具有周期性, 所以不是振动。

(2) 当 $\xi = 1$ 时(临界阻尼情况)

这时特征方程有重根

$$\lambda_{1,2} = -\omega_n$$

对应的运动方程为

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$$

不难看出, 其运动也不具有振动特性, 响应曲线和图 1-16 相似。

(3) 当 $0 < \xi < 1$ 时(小阻尼情况)

对应有特征根

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{1 - \xi^2})\omega_n$$

虚部不为零。通解(1-24)式可化为

$$y = e^{-\xi\omega_n t} (C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t) \quad (1-25)$$

其中, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, 称为有阻尼的固有频率。(1-25)式也可以写成另一种形式:

$$y = A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \quad (1-26)$$

以上两式中的 C_1, C_2 和 A, β 都为待定常数, 可由初始条件确定。如果给出初始条件为

$$t=0 \text{ 时, } y(0)=y_0, \dot{y}(0)=\dot{y}_0$$

则有

$$C_1 = y_0$$

$$C_2 = (\dot{y}_0 + y_0 \xi \omega_n) / \omega_d$$

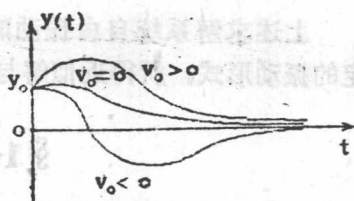


图1-16