长沙铁道学院自然科学论文选

1960—1980

二十周年校庆纪念

目　　录

Q 过程的唯一性准则

侯 振 挺

(应用数学研究室)

提　　要

马尔可夫过程在科学和技术领域中有着广泛的应用。但在现实中所遇到的马尔可夫过程，容易求出的是密度矩阵 Q而不是 $P_{ij}(t)$本身。在文化大革命中，我们走出校门，到铁路现场，在实际工作中也确有此感。因此，Q 是否能唯一决定过程的问题，就有其重要的理论与实际的意义。这正是本文中要证明的定理 1.1 所回答的问题。

在文的后半部分，把定理 1.1 应用到几个殊特的Q 矩阵上，以示我们所提出的判别准则是行之有效的。

设 $X=\{x(t,\omega),\ t<\sigma(\omega)\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega,\ \underline{\underline{F}},\ P)$ 上的齐次可列马尔可夫过程，其相空间 $E=(1,2,\cdots)$，其转移概率为$p_{ij}(t)$，i，$j\in E$，$t\geqslant 0$，它们是一组满足下列条件的实值函数，

$$p_{ij}(t)\geqslant 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1, \tag{2}$$

$$\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)=p_{ij}(t+s), \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=p_{ij}(0)=\delta_{ij}, \tag{4}$$

其中 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0\ (i\neq j)$。熟知，这时存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij}, \tag{5}$$

而且 $0\leqslant q_{ij}<+\infty(i\neq j)$，$0\leqslant q_i\equiv -q_{ii}\leqslant +\infty$，$\sum\limits_{j\in E}q_{ij}\leqslant 0$。当$q_i<+\infty(i\in E)$时，称过程是可微的，简称 $Q=(q_{ij})$ 为过程的密度矩阵，而过程 $X=\{x(t,\omega),\ t<\sigma(\omega)\}$ 则简称为Q过程，以表示它与Q有（5）式的关系。如果两个Q过程有相同的$p_{ij}(t)$，我们就把它们看作同一Q过程，故在下面也称满足（1）－（5）式的 $(p_{ij}(t))$，或其拉氏变换为一Q过程。

定义1 称定义在 $E\times E$ 上的矩阵 $Q=(q_{ij})$为Q矩阵，如果Q满足

$$0\leqslant q_{ij}<+\infty(i\neq j),\ 0\leqslant q_i\equiv -q_{ii}<+\infty,\ \sum_{j\in E}q_{ij}\leqslant 0\ \ (i\in E), \tag{6}$$

本文原刊载于《中国科学》1974年第2期

如果还有

$$\sum_{j\in E} q_{ij}=0 \quad (i\in E), \tag{7}$$

则称Q为保守的Q矩阵。

显然，每个可微的过程的密度矩阵是Q矩阵，现在问：任给一个Q矩阵，是否存在一个Q过程呢？如果存在，那么恰好存在一个Q过程的充要条件是什么？

1945年，$Doob$[1]就证明，对任给一个Q矩阵，Q过程总存在，而且只有两种可能，或者只存在一个Q过程，或者有无穷多个。对于Q为保守的情况，Q过程的唯一性问题，早在1940年已为$Feller$[2]所解决。

本文的结果是：对任一已给的Q矩阵（未必保守），找出Q过程唯一的充要条件。

一、结果的陈述

本文的主要目的是证明

定理1.1 设任给一个Q矩阵，则存在唯一的Q过程的充要条件是下列二条件同时成立：

（1）

$$\inf_{i\in E} \lambda \sum_{j\in E} p_{ij}^{min}(\lambda)=\eta_\lambda>0, \quad 0<\lambda<+\infty, \tag{1.1}$$

其中 $P_\lambda^{min}=(p_{ij}^{min}(\lambda),\ i,\ j\in E)$是最小$Q$过程，即

$$p_{ij}^{min}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_{ij}(t)dt \quad (i,\ i\in E,\ 0<\lambda<+\infty), \tag{1.2}$$

而

$$f_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}(t) \quad (i,\ j\in E), \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &f_{ij}^{(0)}(t)=\delta_{ij}e^{-q_i t} \quad (i,\ j\in E),\\ &f_{ij}^{(n+1)}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}f_{kj}^{(n)}(s)ds \quad (n\geqslant 0,\ i,\ j\in E)。\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

（2）方程

$$\begin{cases}\lambda \mathbf{n}-\mathbf{n}Q=\mathbf{0}_-, \quad \lambda>0,\\ \mathbf{0}_-\leqslant \mathbf{n}, \quad \sum\limits_{i\in E} n(i)<+\infty\end{cases} \tag{1.5}$$

只有零解。其中 $\mathbf{n}=(n(1),\ n(2),\ \cdots)$，$\mathbf{0}_-=(0,\ 0,\ \cdots)$。

下面我们首先给出定理 1.1 的证明，而后把它应用到几个特殊情况上，最后证明定理 1.1 的条件(1)和(2)是独立的。

二、几个引理

引理2.1 若定理 1.1 中的条件(1)成立，则方程

$$\begin{cases}\lambda \mathbf{U}-Q\mathbf{U}=\mathbf{0}_1, \quad \lambda>0,\\ \mathbf{0}_1\leqslant \mathbf{U}\leqslant \mathbf{1}\end{cases} \tag{2.1}$$

只有零解，其中

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}U(1)\\U(2)\\\vdots\end{pmatrix},\quad \mathbf{0}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\end{pmatrix},\quad \mathbf{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\end{pmatrix}.$$

证．由(1.2)—(1.4)式及文献[3]，$\{p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i\in E\}$是第一型闽壹方程[1]

$$U(i)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}U(k)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(i\in E)\tag{2.2}$$

的最小非负解．于是，由文献[3]知，$\left\{\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i\in E\right\}$是拟规格方程

$$U(i)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}U(k)+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\quad(i\in E)\tag{2.3}$$

的最小非负解．所以，由$\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\leqslant 1$，定理1.1中的条件(1)以及文献[3]得知，方程

$$\left.\begin{aligned}&U(i)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}U(k),\quad \lambda>0,\quad i\in E\\&0\leqslant U(i)\leqslant 1,\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

只有零解．然而方程(2.4)是方程(2.1)的等价方程，所以方程(2.1)只有零解．

注2.1 引理2.1的逆不真．在有限非保守的情况下，引理2.1的逆真，即方程(2.1)只有零解与定理1.1中的条件(1)等价，这就是我们的引理5.2．

引理2.2 令

$$U_\lambda(i)=1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\quad(i\in E),\tag{2.5}$$

则当λ增大时$U_\lambda(i)$不增，即当λ增大时$\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)$不减．

证．由于$\left\{\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i\in E\right\}$是方程(2.3)的最小非负解，及$0\leqslant\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\leqslant 1$，所以$\{U_\lambda(i),\ i\in E\}$是非负线性方程

$$\left.\begin{aligned}&U(i)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}U(k)+\frac{-\sum_{j\in E}q_{ij}}{\lambda+q_i},\quad i\in E\\&0\leqslant U(i)\leqslant 1\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

的最大解，并且此最大解可由下列方式得到．令

$$\left.\begin{aligned}&U^{(0)}(i)\equiv 1\quad(i\in E),\\&U^{(n+1)}(i)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}U^{(n)}(k)+\frac{-\sum_{j\in E}q_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(i\in E,\ n\geqslant 1),\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

则

$$U^{(n)}(i)\downarrow U(i)\quad(n\uparrow+\infty).\tag{2.8}$$

由(2.7)和(2.8)式知，当λ增大时，$U_\lambda(i)$不增．

1）关于非负线性方程组，第一型闽壹方程，拟规格方程以及最小非负解的定义均见文献[3]．

引理2.3 定理1.1中的条件(1)与下列条件等价：

存在某个常数 $0<\lambda_0<+\infty$，使

$$\inf_{i\in E}\lambda_0\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda_0)=\eta_{\lambda_0}>0. \tag{2.9}$$

证。显然，只需证明由上述条件可推出定理 1.1 的条件(1)。下面分两种情况证明。

1) $0<\lambda<\lambda_0$，

$$\eta_\lambda\geqslant\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda_0)=\frac{\lambda}{\lambda_0}\mu_{\lambda_0}>0; \tag{2.10}$$

2) $\lambda_0\leqslant\lambda<+\infty$。

由引理 2.2 知，$\eta_\lambda\geqslant\eta_{\lambda_0}>0$，引理 2.3 获证。

注2.2 熟知，定理 1.1 中的条件(1)等价于方程(1.5) 对某个常数 $0<\lambda=\lambda_0<+\infty$ 只有零解。于是，由引理 2.3 知，定理 1.1 中的两个条件都可用形式上较弱，实质上等价的条件代替。

引理2.4 存在与 λ 无关的行矢量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha(1),\ \alpha(2),\ \cdots)>\mathbf{0}_-$，使 $\boldsymbol{\alpha}P_\lambda^{min}$ 可和[1]，而 $\boldsymbol{\alpha}$不可和，即

$$\lambda\sum_{j\in E}\sum_{i\in E}\alpha(i)p_{ij}^{min}(\lambda)=\sum_{i\in E}\alpha(i)\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)<+\infty\ \ (0<\lambda<+\infty), \tag{2.11}$$

$$\sum_{i\in E}\alpha(i)=+\infty \tag{2.12}$$

的充要条件是

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)=\eta_\lambda=0\ \ (0<\lambda<+\infty) \tag{2.13}$$

或等价地，存在某一个常数 $0<\lambda_0<+\infty$，使

$$\inf_{i\in E}\lambda_0\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda_0)=\eta_{\lambda_0}=0. \tag{2.14}$$

证。先证充分性。

由于 $0<\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)\leqslant1$，故使(2.11)式成立的行矢量 $\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}_-$是存在的，如选 $\alpha(i)=2^{-i}(i\in E)$。若更有 (2.12) 式成立，则条件的充分性获证。所以，下面我们假定所选的 $\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}_-$，使(2.11)式成立，而(2.12) 式不成立。任意选定一个数 $0<\bar{\lambda}_0<+\infty$，由于(2.13)式，可选$E$的无穷子集$\hat{E}$使

$$\sum_{i\in \hat{E}}\bar{\lambda}_0\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\bar{\lambda}_0)<+\infty. \tag{2.15}$$

令

$$\hat{E}_1=(i:i\in\hat{E},\ \alpha(i)>1), \tag{2.16}$$

$$\hat{E}_2=(i:i\in\hat{E},\ \alpha(i)\leqslant1), \tag{2.17}$$

$$\hat{\alpha}(i)=\begin{cases}\alpha(i), & i\in(E\setminus\hat{E}_2),\\ 1, & i\in\hat{E}_2,\end{cases} \tag{2.18}$$

则

$$\hat{\alpha}(i)\geqslant\alpha(i)>0\ \ (i\in E). \tag{2.19}$$

---

1) 一般地，一个行矢量 $\boldsymbol{\rho}=(\rho(1),\ \rho(2),\ \cdots)$ 可和是指$\sum_i\rho(i)<\infty$。

$$\sum_{i\in E}\hat{\alpha}(i)\bar{\lambda}_0\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\bar{\lambda}_0)=\sum_{i\in E\setminus\hat{E}}\hat{\alpha}(i)\bar{\lambda}_0\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\bar{\lambda}_0)+\sum_{j\in\hat{E}}\bar{\lambda}_0\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda_0)$$

$$\leqslant\sum_{i\in E}\alpha(i)\bar{\lambda}_0\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\bar{\lambda}_0)+\sum_{i\in\hat{E}}\bar{\lambda}_0\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\bar{\lambda}_0)<+\infty, \tag{2.20}$$

而

$$\sum_{i\in E}\hat{\alpha}(i)\geqslant\sum_{i\in\hat{E}}\hat{\alpha}(i)\geqslant\sum_{i\in\hat{E}}1=+\infty. \tag{2.21}$$

参考引理 2.2 的证明，易知，对任一 $0<\lambda<+\infty$，有

$$\sum_{i\in E}\hat{\alpha}(i)\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)<+\infty. \tag{2.22}$$

于是，引理 2.4 的充分性得证。

再证必要性。

若(2.14)式不成立，则由引理 2.3 知，这时有

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)=\eta_\lambda>0\quad(0<\lambda<+\infty). \tag{2.23}$$

若有$\alpha>\mathbf{0}_-$，使

$$\sum_{i\in E}\alpha(i)\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)<+\infty\quad(0<\lambda<+\infty), \tag{2.24}$$

则由(2.23)式得

$$\sum_{i\in E}\alpha(i)\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)\geqslant\eta_\lambda\sum_{i\in E}\alpha(i)\quad(0<\lambda<+\infty). \tag{2.25}$$

由(2.24)和(2.25)式得

$$\eta_\lambda\sum_{i\in E}\alpha(i)<+\infty. \tag{2.26}$$

由 $\eta_\lambda>0$ 及(2.26)式得

$$\sum_{i\in E}\alpha(i)<+\infty. \tag{2.27}$$

于是，引理 2.4 的必要性获证。

引理2.5 设 $\Phi(t)=(\phi_{ij}(t),\ i,\ j\in E,\ t\geqslant0)$ 是满足柯氏向后微分方程组

$$\Phi'(t)=Q\Phi(t) \tag{2.28}$$

的一个Q过程。若令

$$p_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\phi_{ij}(t)dt\quad(i,\ j\in E,\ 0<\lambda<+\infty), \tag{2.29}$$

$$\mathbf{P}_\lambda^{(j)}=\begin{pmatrix}p_{1j}(\lambda)\\ p_{2j}(\lambda)\\ \vdots\end{pmatrix}\quad(j\in E), \tag{2.30}$$

则列向量组 $\mathbf{P}_\lambda^{(j)}(j\in E)$线性独立。即若实数组 $\alpha_j(j\in E)$ 使对某一 $\lambda>0$，有

$$\sum_{j\in E}\alpha_j\mathbf{P}_\lambda^{(j)}=\mathbf{0}_1, \tag{2.31}$$

则

$$\alpha_j=0\quad(j\in E). \tag{2.32}$$

特别，列向量组

$$\mathbf{P}_{j}^{min(j)}=\begin{pmatrix} p_{1j}^{min}(\lambda) \\ p_{2j}^{min}(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (j\in E) \tag{2.33}$$

线性独立。

证。设(2.31)式成立。令

$$E_0=(j:\ \alpha_j\geqslant 0), \tag{2.34}$$

$$E_1=(j:\ \alpha_j<0), \tag{2.35}$$

由(2.31)式的左边的级数收敛于0与(对下角j)求和次序无关，即得

$$\sum_{j\in E}\alpha_j p_{ij}(\lambda)=\sum_{j\in E}(-\alpha_j)p_{ij}(\lambda)<+\infty \quad (i\in E). \tag{2.36}$$

由$\Phi(t)$满足方程组(2.28)的Q过程及(2.29)式，得

$$p_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}p_{kj}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \quad (i,\ j\in E). \tag{2.37}$$

从而

$$\sum_{j\in E_s}(-1)^s\alpha_j p_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\sum_{j\in E_\zeta}(-1)^s\alpha_j p_{kj}(\lambda)$$

$$+\frac{\sum_{j\in E_s}(-1)^s\alpha_j\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \quad (i\in E,\ s=0,\ 1). \tag{2.38}$$

由(2.36)，(2.38)式以及

$$\sum_{j\in E_\zeta}(-1)^s\alpha_j\delta_{ij}\leqslant|\alpha_i|<+\infty \quad (i\in E,\ s=0,\ 1) \tag{2.39}$$

知，

$$0\leqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\sum_{j\in E_s}(-1)^s\alpha_j p_{kj}(\lambda)<+\infty \quad (i\in E,\ s=0,\ 1)。 \tag{2.40}$$

由(2.36)和(2.40)式得

$$\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\sum_{j\in E_0}\alpha_j p_{kj}(\lambda)-\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\sum_{j\in E}(-\alpha_j)p_{kj}(\lambda)$$

$$=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\Big(\sum_{j\in E_0}\alpha_j p_{kj}(\lambda)-\sum_{j\in E}(-\alpha_j)p_{kj}(\lambda)\Big)=0 \tag{2.41}$$

由(2.38)式得

$$\sum_{j\in E_0}\alpha_j p_{ij}(\lambda)-\sum_{j\in E}(-\alpha_j)p_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\Big(\sum_{j\in E}\alpha_j p_{kj}(\lambda)\Big)$$

$$-\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\Big(\sum_{j\in E_1}(-\alpha_j)p_{kj}(\lambda)\Big)+\frac{\alpha_i}{\lambda+q_i} \quad (i\in E). \tag{2.52}$$

由(2.41)和(2.42)式得

$$0=0+\frac{\alpha_i}{\lambda+q_i} \quad (i\in E). \tag{2.43}$$

从而(2.32)式成立。由最小Q过程$(f_{ij}(t),\ i,\ j\in E,\ t\geqslant 0)$满足(2.28)式即得到引理2.5的最后部分。

三、主要定理的证明

定理 1.1 的证明。先证必要性部分。

若定理 1.1 的条件(2)不成立，由文献[4]知，满足柯氏向前微分方程组的Q过程不止一个，于是Q过程非唯一。

若定理1.1的条件(1)不成立，于是由引理2.4知，存在与λ无关的行矢量$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha(1),\alpha(2),\cdots)>\mathbf{0}_-$，使$\boldsymbol{\alpha}P_\lambda^{min}$ $(0<\lambda<+\infty)$可和，但$\boldsymbol{\alpha}$不可和。由$\boldsymbol{\alpha}$不可和，有

$$\frac{\left(-\sum_{k\in E}q_{ik}\right)\alpha_j}{\sum_{k\in E}\alpha_k}=0\quad(i,\ j\in E). \tag{3.1}$$

于是，由文献[5]知

$$P_\lambda=P_\lambda^{min}+\frac{(\mathbf{1}-\lambda P_\lambda^{min}\mathbf{1})}{\lambda\boldsymbol{\alpha}P_\lambda^{min}\mathbf{1}}\cdot\boldsymbol{\alpha}P_\lambda^{min} \tag{3.2}$$

是一个Q过程，而且是不断的。于是

$$\lambda P_\lambda\mathbf{1}=\mathbf{1}. \tag{3.3}$$

由条件(1)不成立，可知

$$\lambda P_\lambda^{min}\mathbf{1}\neq\mathbf{1}. \tag{3.4}$$

所以

$$P_\lambda\neq P_\lambda^{min}. \tag{3.5}$$

故Q过程非唯一.至此，定理 1.1 必要性部分得证.

再证充分性部分.

设定理 1.1 中的条件(1)和(2)成立，证Q过程唯一。

以$P_\lambda=\{p_{ij}(\lambda),\ i,\ j\in E\}$表示任一$Q$过程.熟知，对每个$j\in E$，$\{p_{ij}(\lambda),\ i\in E\}$满足方程

$$x_i\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(i\in E). \tag{3.6}$$

而$\{p_{ij}^{min}(\lambda),\ i\in E\}$是方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(i\in E) \tag{3.7}$$

的最小(非负)解. 于是，容易论证

$$p_{ij}(\lambda)-p_{ij}^{min}(\lambda)\geqslant0\quad(i,\ j\in E) \tag{3.8}$$

及$\{p_{ij}(\lambda)-p_{ij}^{min}(\lambda),\ i\in E\}$满足方程

$$x_i\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k\quad(i\in E). \tag{3.9}$$

令

$$r_{ij}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{q_{ij}}{\lambda+q_i}, & i\neq j,\\ 0, & i=j,\end{cases} \tag{3.10}$$

$$R_\lambda=(r_{ij}(\lambda),\ i,\ j\in E), \tag{3.11}$$

于是，$\{p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{min}(\lambda), i\in E\}$是以$R_\lambda$为转移概率矩阵的马氏链的过分函数。显然，这个链是非常返的。由引理2.1，文献[6]以及$\sum_{i\in E}2^{-(i+1)}(p_{ij}(\lambda)-p_{ij}^{min}(\lambda))\leqslant\sum_{i\in E}2^{-(i+1)}<+\infty$知，

$$p_{ij}(\lambda)-p_{ij}^{min}(\lambda)=\sum_{a\in E}k_\lambda(i,\ a)\hat{f}_\lambda^{(a)}(j),\ \hat{f}_\lambda^{(a)}(j)\geqslant 0\ (i,\ j,\ a\in E), \tag{3.12}$$

其中

$$k_\lambda(i,\ a)=\frac{p_{ia}^{min}(\lambda)}{\sum_{k\in E}2^{-(k+1)}p_{ka}^{min}(\lambda)}\ (i,\ a\in E). \tag{3.13}$$

令

$$f_\lambda^{(a)}(j)=\frac{\hat{f}_\lambda^{(a)}(j)}{\sum_{k\in E}2^{-(k+1)}p_{ka}^{min}(\lambda)}\ (a,\ j\in E), \tag{3.14}$$

把(3.13)和(3.14)式代入(3.12)式得

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{min}(\lambda)+\sum_{a\in E}p_{ia}^{min}(\lambda)f_\lambda^{(a)}(j),\ f_\lambda^{(a)}(j)\geqslant 0\ (\lambda>0, i, j, a\in E). \tag{3.15}$$

由文献[7]知，$P_\lambda=\{p_{ij}(\lambda),\ i,\ j\in E\}$必须满足

$$P_\lambda\geqslant 0\ (\lambda>0), \tag{3.16}$$

$$\lambda P_\lambda \mathbf{1}\leqslant \mathbf{1}\ (\lambda>0), \tag{3.17}$$

$$P_\lambda-P_\mu+(\lambda-\mu)P_\lambda P_\mu=0\ (\lambda,\ \mu>0), \tag{3.18}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda P_\lambda-I)=Q, \tag{3.19}$$

其中，0 和 I 分别表示零矩阵和单位矩阵。由(3.15)和(3.17)式得

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)}=(f_\lambda^{(a)}(1),\ f_\lambda^{(a)}(2),\ \cdots)\geqslant\mathbf{0}\ (\lambda>0,\ a\in E), \tag{3.20}$$

及

$$\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)+\lambda\sum_{a\in E}P_{ia}^{min}(\lambda)\cdot[\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}]\leqslant 1\ (i\in E). \tag{3.21}$$

由(4)式有

$$\lambda P_{aa}^{min}(\lambda)>0\ (\lambda>0,\ a\in E). \tag{3.22}$$

由(3.21)和(3.22)式得

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}]<+\infty\ (\lambda>0,\ a\in E). \tag{3.23}$$

这里及以后用

$$[\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{C}]=\boldsymbol{\rho}\mathbf{C}=\sum_{i\in E}\rho(i)C(i) \tag{3.24}$$

表示行矢量$\boldsymbol{\rho}=(\rho(1),\ \rho(2),\ \cdots)$和列矢量$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}C(1)\\ C(2)\\ \vdots\end{pmatrix}$的内积。

由P_λ^{min}满足(3.18)式得

$$\mathbf{P}_\lambda^{min(a)}-\mathbf{P}_\mu^{min(a)}+(\lambda-\mu)P_\lambda^{min}\mathbf{P}_\mu^{min(a)}=\mathbf{0}\ (\lambda,\ \mu>0,\ a\in E). \tag{3.25}$$

令

$$A(\mu,\ \lambda)=I+(\mu-\lambda)P_\lambda^{min}\ \ (\lambda,\ \mu>0), \tag{3.26}$$

由P_λ^{min}满足(3.18)式，得

$$A(\mu,\ \nu)A(\nu,\ \lambda)=A(\mu,\ \lambda), \tag{3.27}$$

$$A(\mu,\ \lambda)P_\mu^{min}=P_\lambda^{min} \tag{3.28}$$

(3.28)式即

$$A(\mu,\lambda)\mathbf{P}_{\mu}^{min(a)}=\mathbf{P}_{\lambda}^{min(a)}\quad(a\in E)\tag{3.29}$$

把(3.15)式代入(3.18)式，并注意P_{λ}^{min}也满足(3.18)式及引理 2.5，得

$$\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)=\mathbf{F}_{\mu}^{(a)}+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},\mathbf{P}_{\mu}^{min(t)}]\mathbf{F}_{\mu}^{(t)}.\tag{3.30}$$

由(3.20)和(3.26)式知，当$\lambda\geqslant\mu>0$时，$\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)\geqslant\mathbf{0}_-$；由(3.30)式知，当$\mu\geqslant\lambda>0$时，$\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)\geqslant\mathbf{0}_-$。所以，对于任意的$\lambda,\mu>0$，恒有$\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)\geqslant\mathbf{0}_-$。由(3.30)式得

$$[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu),\mathbf{1}]=[\mathbf{F}_{\mu}^{(a)},\mathbf{1}]+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},\mathbf{P}_{\mu}^{min(t)}][\mathbf{F}_{\mu}^{(t)},\mathbf{1}].\tag{3.31}$$

由(3.15)得

$$P_{\mu}\mathbf{1}=P_{\mu}^{min}\mathbf{1}+\sum_{t\in E}\mathbf{P}_{\mu}^{min(t)}[\mathbf{F}_{\mu}^{(t)},\mathbf{1}].\tag{3.32}$$

故

$$[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},P_{\mu}\mathbf{1}]=[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},P_{\mu}^{min}\mathbf{1}]+\sum_{t\in E}[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},\mathbf{P}_{\mu}^{min(t)}][\mathbf{F}_{\mu}^{(t)},\mathbf{1}].\tag{3.33}$$

但由(3.17)和(3.23)式知

$$[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},P_{\mu}\mathbf{1}]=\frac{1}{\mu}[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},\mu P_{\mu}\mathbf{1}]\leqslant\frac{1}{\mu}[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},\mathbf{1}]<+\infty\quad(\mu>0)。\tag{3.34}$$

由(3.23)和(3.34)式知

$$\sum_{t\in E}[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},\mathbf{P}_{\mu}^{min(t)}][\mathbf{F}_{\mu}^{(t)},\mathbf{1}]<+\infty.\tag{3.35}$$

由(3.23)，(3.31)及(3.35)式得

$$[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu),\mathbf{1}]<+\infty,\tag{3.36}$$

即$\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)$可和。今暂固定$a$及$\lambda>0$，而令

$$\boldsymbol{\rho}_{\mu}=\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)\quad(\mu>0),\tag{3.37}$$

于是$\boldsymbol{\rho}_{\mu}\geqslant\mathbf{0}_-$且可和，并且由(3.27)式得

$$\boldsymbol{\rho}_{\mu}A(\mu,\nu)=\boldsymbol{\rho}_{\nu}\,(\mu,\nu>0).\tag{3.38}$$

根据文献[7，引理2.2]及定理 1.1 的条件(2)知，存在与μ无关（但与a和λ有关）的行矢量$\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)}\geqslant\mathbf{0}_-$，使$\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)}P_{\mu}^{min}$可和，且

$$\mu\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)-\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)Q=\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)}\quad(\mu>0),\tag{3.39}$$

$$\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}A(\lambda,\mu)=\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)}P_{\mu}^{min}\quad(\mu>0).\tag{3.40}$$

由(3.39)和(3.40)式，特别取$\mu=\lambda$得

$$\lambda\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}-\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}Q=\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)}\quad(\lambda>0),\tag{3.41}$$

$$\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)}=\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)}P_{\lambda}^{min}\quad(\lambda>0).\tag{3.42}$$

在(3.30)式的两端右乘以$(\mu I-Q)$后，得

$$\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)}=\boldsymbol{\beta}_{\mu}^{(a)}+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},\mathbf{P}_{\mu}^{min(t)}]\boldsymbol{\beta}_{\mu}^{(t)}.\tag{3.43}$$

从而有

$$[\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)},\mathbf{1}]=[\boldsymbol{\beta}_{\mu}^{(a)},\mathbf{1}]+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)},\mathbf{P}_{\mu}^{min(t)}][\boldsymbol{\beta}_{\mu}^{(t)},\mathbf{1}].\tag{3.44}$$

由P_{λ}和P_{λ}^{min}都满足(3.19)式，得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda p_{ia}^{min}(\lambda)\lambda f_\lambda^{(a)}(j)=0\quad(i,\ j,\ a\in E).\tag{3.45}$$

特别有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P_{aa}^{min}(\lambda)\lambda f_\lambda^{(a)}(j)=0.\tag{3.46}$$

但

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P_{aa}^{min}(\lambda)=1,\tag{3.47}$$

故

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda f_\lambda^{(a)}(j)=0.\tag{3.48}$$

更有

$$\lim_{\lambda\to\infty}f_\lambda^{(a)}(j)=0,\tag{3.49}$$

由(3.41)式得

$$\lambda f_\lambda^{(a)}(j)+q_j f_\lambda^{(a)}(j)=\sum_{i\neq j}f_\lambda^{(a)}(i)q_{ij}+\beta_\lambda^{(a)}(j).\tag{3.50}$$

由(3.43)式知，当 μ 增加时，$\beta_\mu^{(a)}$不增。又由(3.48)，(3.49)及(3.50)式，得

$$\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}\downarrow \mathbf{0}_-\quad(\lambda\uparrow+\infty).\tag{3.51}$$

现分下列几步去完成定理的证明。

1） 试证

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}\mathbf{1}]\leqslant\frac{\lambda}{\eta_\lambda}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}]<+\infty\quad(\lambda>0,\ a\in E).\tag{3.52}$$

证。由(3.23)式和定理 1.1 的条件(1)，只需证明(3.52)式的前半部分．由(3.42)式知，

$$\lambda[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}\mathbf{1}]=\lambda[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}P_\lambda^{min},\ \mathbf{1}]=[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \lambda P_\lambda^{min}\mathbf{1}]\geqslant\eta_\lambda[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}],\tag{3.53}$$

于是

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}]\leqslant\frac{\lambda}{\eta_\lambda}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}],\tag{3.54}$$

(3.52)式得证。

2） 试证

$$(\mu-\lambda)[\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\mu^{min(t)}]=[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\lambda^{min(t)}]-[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\mu^{min(t)}]<+\infty$$
$$(\lambda,\mu>0,a,t\in E).\tag{3.55}$$

证。注意到

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\mu^{min(t)}]\leqslant\frac{1}{\mu}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}]<+\infty\quad(\lambda,\ \mu<0),\tag{3.56}$$

$$\sup_{i\in E}|P_{ii}^{min}(\lambda)-P_{ii}^{min}(\mu)|\leqslant\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}<+\infty\quad(\lambda,\ \mu>0),\tag{3.57}$$

及

$$\begin{aligned}(\mu-\lambda)[\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\mu^{min(t)}]&=(\mu-\lambda)[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}P_\lambda^{min},\mathbf{P}_\lambda^{min(t)}]\\&=(\mu-\lambda)[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ P_\lambda^{min}\mathbf{P}_\mu^{min(t)}]=[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ (\mu-\lambda)P_\lambda^{min}\mathbf{P}_\mu^{min(t)}]\\&=[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\lambda^{min(t)}-\mathbf{P}_\mu^{min(t)}]=[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\lambda^{min(t)}]-[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\mu^{min(t)}],\end{aligned}\tag{3.58}$$

即得所证。

3） 试证

$$\sum_{t\in E}[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\ \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{min(t)}\leqslant\left(\frac{1}{\eta_\mu}-1\right)\mathbf{1}\quad(\mu>0).\tag{3.59}$$

证。由(3.15)，(3.17)及(3.52)式得

$$1 \geqslant \mu P_\mu 1 = \mu P_\mu^{min} 1 + \sum_{t \in E} \mu [F_\mu^{(t)}, 1] P_\mu^{min}$$

$$\geqslant \eta_\mu 1 + \sum_{t \in E} \eta_\mu [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\mu^{min(t)} = \eta_\mu (1 + \sum_{t \in E} [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\mu^{min(t)}). \tag{3.60}$$

从而，(3.59)式成立.

4) 试证

$$\sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\lambda^{min(t)}] \leqslant \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1\right) [\beta_\lambda^{(a)}, 1] < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0, a \in E). \tag{3.61}$$

证. 由(3.52)及(3.60)式得

$$\sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\mu^{min(t)}] = [\beta_\lambda^{(a)}, \sum_{t \in E} [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\mu^{min(t)}]$$

$$\leqslant \left[\beta_\lambda^{(a)}, \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1\right) 1\right] = \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1\right) [\beta_\lambda^{(a)}, 1] < +\infty. \tag{3.62}$$

5) 试证

$$[\beta_\lambda^{(a)}, 1] = [\beta_\mu^{(a)}, 1] + \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\lambda^{min(t)}]$$

$$- \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\mu^{min(t)}] < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0, a \in E). \tag{3.63}$$

证. 由(3.52)式，显然只需证(3.62)式的前半部分. 由(3.44)，(3.55)及(3.61)式知，

$$[\beta_\lambda^{(a)}, 1] = [\beta_\mu^{(a)}, 1] + \sum_{t \in E} (\mu - \lambda) [F_\lambda^{(a)}, P_\mu^{min(t)}] [\beta_\mu^{(t)}, 1]$$

$$= [\beta_\mu^{(a)}, 1] + \sum_{t \in E} \{[\beta_\lambda^{(a)}, P_\lambda^{min(t)}] - [\beta_\lambda^{(a)}, P_\mu^{min(t)}]\} [\beta_\mu^{(t)}, 1]$$

$$= [\beta_\mu^{(a)}, 1] + \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, \beta_\mu^{(t)}, 1] P_\lambda^{min(t)}] - \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\mu^{min(t)}]. \tag{3.64}$$

(3.63))式得证.

6) 试证

$$[\beta_\mu^{(a)}, 1] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty), \tag{3.65}$$

$$[\beta_\mu^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, 1] P_\mu^{min(t)}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty), \tag{3.66}$$

及

$$[\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu, 1] P_\lambda^{min(t)}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty). \tag{3.67}$$

证. 由(3.51)式，即得(3.65)和(3.67)式；由(3.51)式及

$$P_{ii}^{min}(\mu) \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty), \tag{3.68}$$

即得(3.66)式.

7) 试证

$$[\beta_\lambda^{(a)}, 1] \equiv \quad (\lambda > 0, a \in E). \tag{3.69}$$

证. 对(3.63)式前半部的两端在$\mu \uparrow +\infty$之下取极限，由(3.65)，(3.66)及(3.67)式，即得(3.69)式.

8) **试证Q过程唯一.**

由(3.69)式得

$$\beta_\lambda^{(a)} \equiv 0 \quad (\lambda > 0, a \in E). \tag{3.70}$$

由(3.12)和(3.70)式得

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)}\equiv\mathbf{0}\quad(\lambda>0,\ a\in E).\tag{3.71}$$

由(3.15)和(3.71)式得

$$P_\lambda\equiv P_\lambda^{min}\quad(\lambda>0),\tag{3.72}$$

即Q过程唯一。

至此，定理 1.1 的充分性得证。

四、对角线型的情况

定义4.1 若Q矩阵有如下的性质，则称它是对角线型的，

$$q_{ij}=0\ (i\neq j),\quad q_{ii}\neq\ (i\in E).\tag{4.1}$$

定理4.1 若Q矩阵是对角线型的，则Q过程唯一的充要条件是

$$\sup_{i\in E}q_i=C<+\infty\tag{4.2}$$

成立。

证．1) 充分性。

若(4.2)式成立，由于$\left\{\lambda\sum_{j\in E}P_{ij}^{min}(\lambda),\ i\in E\right\}$是方程

$$x_i=\frac{\lambda}{\lambda+q_i}(i\in E)\tag{4.3}$$

的最小(非负)解，故

$$\lambda\sum_{i\in E}P_{ij}^{min}(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\geqslant\frac{\lambda}{\lambda+C}>0\quad(i\in E).\tag{4.4}$$

于是，定理 1.1 中的条件(1)成立，这时方程(1.5)变成

$$\begin{cases}\lambda n_i=q_in_i,\quad\lambda>0,\\ 0\leqslant n_i,\quad\sum_i n_i<+\infty,\end{cases}\tag{4.5}$$

于是有 $n_i\equiv0\ (i\in E)$，从而定理 1.1 的条件(2)也可满足．故Q过程唯一。

2) 必要性。

若(4.2)式不成立，则

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(\lambda)=\inf_{i\in E}\frac{\lambda}{\lambda+q_i}=0.\tag{4.6}$$

所以定理 1.1 的条件 (1) 不满足，故Q过程不唯一。

五、有限非保守情况

定义5.1 若Q矩阵有如下的性质，则称它为有限非保守的：

$$\sum_{j\in E}q_{ij}=0\ \text{(只对有限个 } i \text{ 不成立)}.\tag{5.1}$$

定理5.1 若Q矩阵是有限非保守的，则Q过程唯一的充要条件是满足柯氏向后和向前微分方程组的Q过程均唯一，即下列两条同时成立：

A) 方程(2.1)只有零解；

B) 方程(1.5)只有零解.

先证明两个引理.

引理5.1 设 $x_i^*(i\in E)$ 是第一型圖壹方程

$$x_i=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k+b_i\quad(i\in E) \tag{5.2}$$

的最小非负解, 令 $D=(i:b_i>0)$, 则

$$x_i^*\leqslant\sup_{i\in D}x_i^*\quad(i\in E), \tag{5.3}$$

即

$$\sup_{i\in E}x_i^*=\sup_{j\in D}x_j^*. \tag{5.4}$$

证. 令

$$\left.\begin{aligned}&x_i^{(1)}=b_i\quad(i\in E),\\&x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k^{(n)}+b_i\quad(i\in E,\ n\geqslant1),\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

于是有

$$x_i^{(1)}=\begin{cases}b_i>0 & (i\in D),\\ 0 & (i\in E\setminus D),\end{cases} \tag{5.6}$$

所以

$$x_i^{(1)}\leqslant\sup_{j\in D}x_j^{(1)}\quad(i\in E). \tag{5.7}$$

假定有

$$x_i^{(n)}\leqslant\sup_{j\in D}x_j^{(n)}\quad(i\in E), \tag{5.8}$$

则当注意 n 增大时 $x_i^{(n)}(i\in E)$ 不减, 及(5.2)式是第一型圖壹方程时, 即得

$$\begin{aligned}x_i^{(n+1)}&=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k^{(n)}+b_i=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k^{(n)}\leqslant\sum_{k\in E}a_{ik}\cdot\sup_{j\in D}x_j^{(n)}\\&=\sup_{j\in D}x_j^{(n)}\cdot\sum_{k\in E}a_{ik}\leqslant\sup_{j\in D}x_j^{(n)}\leqslant\sup_{j\in D}x_j^{(n+1)}\quad(i\in E\setminus D),\end{aligned} \tag{5.9}$$

于是有

$$x_i^{(n+1)}\leqslant\sup_{j\in D}x_j^{(n+1)}\quad(i\in E). \tag{5.10}$$

故由归纳法知, 对一切自然数 n 有

$$x_i^{(n)}\leqslant\sup_{j\in D}x_j^{(n)}\quad(i\in E). \tag{5.11}$$

由 $x_i^{(n)}\uparrow(n\uparrow+\infty)$, $\sup\limits_{j\in D}x_j^{(n)}\uparrow(n\uparrow+\infty)$ 以及(5.11)式即得(5.3)式. 引理 5.1 获证.

推论5.1 除保留引理 5.1 中的假定外, 还假定D是有限集, 且

$$\max_{i\in D}x_i^*<+\infty, \tag{5.12}$$

则 $x_i^*(i\in E)$ 有限的最大值, 且

$$\max_{i\in E}x_i^*=\max_{i\in D}x_i^*. \tag{5.13}$$

引理5.2 若Q是有限非保守的, 则定理5.1中的条件A)与定理 1.1 中的条件(1)等价.

证. 由引理 2.1, 只需证明由A)推出定理1.1的条件(1). 设A) 成立, 由引理2.1的证明过程和条件A)可知, $U_\lambda(i)=1-\lambda\sum\limits_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)$ $(i\in E)$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{-\sum\limits_{j\in E}q_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(i\in E)\tag{5.14}$$

的最小非负解．于是，由推论 5.1 知

$$\max_{i\in E}\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\Big)=\max_{i\in D}\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\Big),\tag{5.15}$$

其中 $D=\left(i:\sum q_{ij}\neq 0\right)$是有限集．但

$$0\leqslant 1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\leqslant 1\quad(i\in E),\tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)&=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\Big(1-\sum_{j\in E}p_{kj}^{\min}(\lambda)\Big)+\frac{-\sum\limits_{j\in E}q_{ij}}{\lambda+q_i}\\&\leqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}+\frac{-\sum\limits_{j\in E}q_{ij}}{\lambda+q_i}=\frac{q_i}{\lambda+q_i}\quad(i\in E),\end{aligned}\tag{5.17}$$

$$\max_{i\in E}\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\Big)=\max\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\Big)\leqslant\max_{i\in D}\frac{q_i}{\lambda+q_i}<1,\tag{5.18}$$

即

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)=\min_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\geqslant\min_{i\in D}\frac{\lambda}{\lambda+q_i}>0.\tag{5.19}$$

所以定理 1.1 条件(1)成立．于是，引理 5.2 获证．

由引理 5.2 和定理 1.1 即得定理 5.1．

六、有界的情况

定义6.1 若存在常数 $0\leqslant C<+\infty$，使

$$-q_{ii}\leqslant C\quad(i\in E)\tag{6.1}$$

成立，则称Q矩阵是有界的．

定理6.1 若Q矩阵有界，则Q过程唯一的充要条件是定理 1.1 中的条件(2)满足．

证．在引理 2.1 的证明中曾指出$\left\{\lambda\sum\limits_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i\in E\right\}$是方程(2.3)的最小非负解，故有

$$\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\geqslant\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\geqslant\frac{\lambda}{\lambda+C}>0\quad(i\in E).\tag{6.2}$$

从而定理 1.1 中的条件(1)满足．故由定理 1.1 知定理 6.1 成立．

七、E 为有限集的情况

定理7.1 若E为有限集，则Q过程唯一．

证．显见，定理 1.1 对E为有限集的情况也是适用的．这时Q 矩阵为有界的，于是按证明定理 6.1 时所采用的方法可知定理 1.1 中的条件(1)成立．由

$$\sum_{j\neq k}q_{kj}\leqslant q_k<q_k+\lambda\quad(k\in E),\tag{7.1}$$

易证，方程 $\lambda n-nQ=0$ 的系数行列式不等于零。于是定理 1.1 中的条件 (2) 也成立。故定理 7.1 正确。

八、定理1.1中两个条件的独立性

今有生灭过程，其密度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -(\delta_0+\beta_0) & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -(\delta_1+\beta_1) & \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -(\delta_2+\beta_2) & \beta_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

其中 $\delta_0>0$。令

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{\delta_0}, \\ x_1=x_0+\dfrac{1}{\beta_0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=x_0+\dfrac{1}{\beta_0}+\cdots+\dfrac{\delta_1\delta_2\cdots\delta_{n-1}}{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}} \quad (n=2,3,\cdots), \end{cases} \tag{8.2}$$

$$x_\infty=\lim_{n\to\infty} x_n, \tag{8.3}$$

$$\mu_0=1,\quad \mu_n=\frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} \quad (n=1,2,\cdots), \tag{8.4}$$

$$R=\sum_{i=0}^{\infty}(x_\infty-x_i)\mu_i,\quad s=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\mu_i, \tag{8.5}$$

1) 定理1.1的条件(1)与(2)同时成立的例子。选

$$\delta_n=\beta_n=1 \quad (n=0,\ 1,\ \cdots), \tag{8.6}$$

则

$$R=S=+\infty. \tag{8.7}$$

于是由Q为有限非保守，从引理 5.2，文献[8]以及[9，定理1]知，定理 1.1 的条件(1)和(2)均成立。

2) 定理 1.1 条件(1)成立，而条件(2)不成立的例子。选

$$\delta_n=\beta_n=(n+1)2^n \quad (n=0,\ 1,\ \cdots), \tag{8.8}$$

则

$$x_n=n+1 \quad (n=0,\ 1,\ \cdots), \tag{8.9}$$

$$\mu_n=\frac{1}{(n+1)2^n} \quad (n=0,\ 1,\ \cdots), \tag{8.10}$$

$$x_\infty=+\infty, \tag{8.11}$$

$$R=+\infty,\quad S=1<+\infty. \tag{8.12}$$

于是由文献[8]及[9，定理1，4]知，定理1.1条件(1)成立，而条件(2)不成立。

3) 定理1.1的条件(1)不成立，而条件(2)成立的例子。选

$$\delta_n=\frac{1}{2}\beta_n=2^n \quad (n=0,\ 1,\ \cdots), \tag{8.13}$$