No. 10

网架——平板组合结构的简化计算法

董石麟　　杨永革

网架－平板组合结构的简化计算法*

董石麟　　杨永革

（中国建筑科学研究院结构所）

〔提要〕　本文研究并提出了网架－平板组合结构的简化分析方法。这种分析方法是将组合结构的平板部分，根据各种不同形式的网架折算为四组或三组平面交叉杆系，从而使这种比较复杂的组合结构转化为一个等代空间铰接杆系结构，由一般空间桁架位移法直接进行计算。文中详细地讨论了两向正交类网架、两向斜交类网架、三向类网架及蜂窝形三角锥网架等各种形式的网架的－平板组合结构的具体计算方法，并给出了相应的等代杆系刚度和板中内力的计算公式，并且附有算例。

一、概　述

网架－平板组合结构是以钢筋混凝土面板（通常为带肋的平板）作为结构的上表层，以钢杆件作为下弦和腹杆的板系与杆系共同工作的空间结构。这种结构的一个明显特点是承重结构和围护结构合二为一，可充分发挥两种不同材料的强度，具有结构刚度大、材料用量省的优点。网架－平板组合结构可用作为屋盖，也可用作为楼盖，是平板型网架结构发展的一个方面，近几年来引起了国内外的关注。在我国徐州、上海、天津等地，已建成或正在兴建一些试点工程，收到了良好的效果。

－－－－－

*本文刊登于建筑结构学报１９８５年第４，５期。

我们认为，分析计算网架－平板组合结构可采取三条途径：

㈠ 采用板元、梁元、杆元等组合结构的有限法来分析。把这种组合结构的带肋平板，离散成能承受轴力、面力和弯矩的梁元和板元，把腹杆和下弦仍作为只能承受轴力的杆元，然后采用矩阵位移法编制通用程序上机电算。此时，对包括上弦节点在内的带肋平板的部分节点，要考虑三个线变位和三个角变位，对下弦节点仍可考虑三个线变位。未知变位总数比一般平板型网架的要多得多，刚度矩阵也比较复杂。计算这种组合结构必须采用大型计算机。目前还未见到适合于网架－平板组合结构特点的专门程序可直接应用。

㈡ 采用拟夹层板法来分析。把腹杆和下弦杆折算成夹层板的夹心层和下表层〔1〕，把带肋板作为上表层，使这种组合结构等代为一整块连续化的夹层板。进而采用解析法或其它方法求解夹层板的微分方程，计算组合结构的内力和变位。但考虑到网架形式和带肋板形式的多样性，使夹层板的微分方程变得比较复杂，对求解和编制计算图表带来不少困难，故目前可应用的现有成果还很少。

㈢ 采用空间桁架位移法来分析。这和第二种连续化的计算途径正好相反，是选用一种比较简化的离散化的计算模型来分析。把带肋平板等代为平面铰接杆系，这样这种组合结构仍可作为一个空间桁架看待，可用空间桁架的通用程序来进行电算。对于正方形带肋预制板的正放四角锥网架－平板组合结构，在文献〔 2 〕中进行了模型试验，并作过简化计算。

本文根据网架上弦不同的布置形式，研究了将网架－平板组合结构的带肋平板，等代为多组平面杆系的一般性方法，从而来具体计算两向正交类网架、两向斜交类网架、三向类网架及蜂窝形三角锥网架等各种形式的网架－平板组合结构。同时，详细地讨论了如

何根据等代平面杆系的内力，转化为组合结构中平板的内力，分析了平板材料泊桑系数对内力计算的影响及其修正方法。

二、两向正交类网架－平板组合结构的简化计算

两向正交正放网架、正放四角锥网架、正放抽空四角锥网架及棋盘形四角锥网架等四种网架结构属于两向正交类网架。两向正交类网架－平板组合结构的面板，可由预制的矩形平面带肋板装配而成。预制板除边肋外，也可设置交叉斜肋，如图１ａ所示。分析时，可把带肋板的平板部分折算成四组平面交叉杆系，如图１ｂ所示。其中第一组杆系与ｘ轴平行，第二组杆系与ｙ轴平行，第三、四组杆系分别与ｘ轴相交成θ、－θ角。图１ｂ中各组杆系的交点Ｏ以

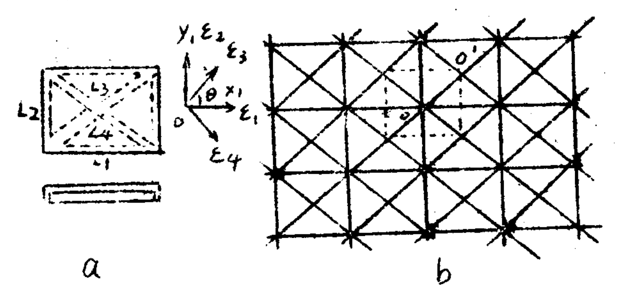

图 1

节点看待，此处正好有腹杆相连接；仅是由三、四组杆系的交点Ｏ'不以节点看待。作用在板面的荷载可以按等效的节点集中荷载来代替。同时，考虑到肋高、板厚远较网架－平板组合结构的高度要小，因而从总体来说可忽略肋轴线对平板中面偏心矩的微小影响，将等代杆系与肋组合成等代上弦杆，与腹杆和下弦构成一铰接空间杆系，按空间桁架位移法计算。

先确定等代平面杆系的刚度。在图1 b中取出一虚线所示的单元体，设平板在O点的应变为$\varepsilon=\{\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_{xy}\}^T$，过O点在四根等代杆件方向的应变$\varepsilon_i$（i=1、2、3、4）可用下式表示

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\\cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\\cos^2\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (1)$$

设等代杆系的线刚度为K_i

$$K_i=\frac{EA_i}{l_i} \quad (i=1、2、3、4) \qquad (2)$$

式中A_i、l_i为等代杆系的截面积和长度，E为平板材料的弹性模量。为计算方便起见，一般可取$K_4=K_3$，$A_4=A_3$，再考虑到$l_2=l_1\tan\theta$、$l_4=l_3=l_1/\cos\theta$以及式(1)，则单元体内四根等代杆件的应变能可表达为

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i^2K_il_i^2$$

$$=\frac{1}{2}\{(K_1+2K_3\cos^2\theta)\varepsilon_x^2+(K_2+2K_3\sin^2\theta)\tan^2\theta\varepsilon_y^2$$

$$+4K_3\sin^2\theta\varepsilon_x\varepsilon_y+2K_3\sin^2\theta\varepsilon_{xy}^2\}l_1^2 \qquad (3)$$

面积为$l_1^2\tan\theta$、厚度为δ的矩形平面实体平板的应变能可用下式表示[3]。

$$U=\frac{1}{2}\{\frac{E\delta}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\frac{2\nu E\delta}{1-\nu^2}\varepsilon_x\varepsilon_y$$

$$+\frac{E\delta}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy}\}l_1^2\tan\theta \qquad (4)$$

式中ν为平板材料的泊桑系数。

令两者的应变能相等$\bar{U}=U$，则应满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned}
4K_3\sin^2\theta &= \frac{2\nu E\delta}{1-\nu^2}\tan\theta \\
2K_3\sin^2\theta &= \frac{E\delta}{2(1+\nu)}\tan\theta \\
K_1+2K_3\cos^2\theta &= \frac{E\delta}{1-\nu^2}\tan\theta \\
K_2+2K_3\sin^2\theta &= \frac{E\delta}{1-\nu^2}\cot\theta
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

求解上式可得

$$\nu=\frac{1}{3} \tag{6}$$

$$K_i=E\delta\beta_i \quad (i=1、2、3、4) \tag{7}$$

其中系数β_i为

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{3}{8}(3\tan\theta-\cot\theta) \\
\beta_2 &= \frac{3}{8}(3\cot\theta-\tan\theta) \\
\beta_3=\beta_4 &= \frac{3}{8\sin 2\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

这就表明，只要平板材料的泊桑系数为1／3时，可以采用四组平面交叉杆系来等代一个等厚度的平板。而各组杆系的截面积由式(2)、(7)求得

$$A_i=\beta_i\delta l_i \quad (i=1、2、3、4) \tag{9}$$

一般情况下，θ角的变化范围为$\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$，则系数$\beta_i$的变化

规律如图 2 所示。

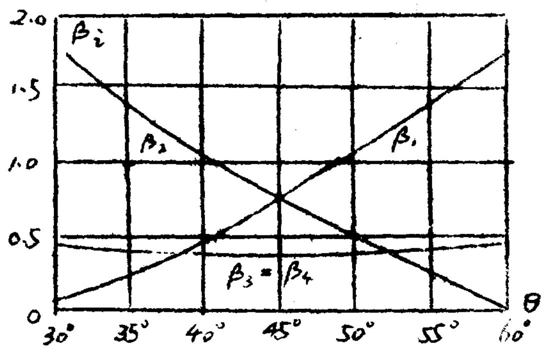

图 2

得到了平板的等代平面杆系的刚度或截面积后，便可按空间桁架位移法来分析这种组合结构。求得等代上弦杆的内力；然后再按刚度或截面积之比来分配确定肋中和平板等代杆系中的内力。

下面再来讨论由等代平面杆系的内力如何返回计算平板的内力。设等代平面杆系的内力为 N_1、N_2、N_3、N_4，平板内力为 $N=(N_xN_yN_{xy})^T$，则以应变表示内力的物理方程分别为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = E\begin{Bmatrix} A_1\varepsilon_1 \\ A_2\varepsilon_2 \\ A_3\varepsilon_3 \\ A_4\varepsilon_4 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$\bar{N}=\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = E\delta\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = E\delta\widetilde{B}\varepsilon$$

式中$\widetilde{B}$为平板的无量纲刚度矩阵，当$\nu=\frac{1}{3}$时，则取值为

$$\widetilde{B}=\frac{3}{8}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{12}$$

式(10)中有四个应变ε_i（$i=1、2、3、4$），其中只可能三个应变是独立的，因而以ε_i来表示$\varepsilon=\{\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_{xy}\}^T$时，便有四种表达式，如：

$$\begin{aligned}\varepsilon&=A^{-1}_{(123)}\varepsilon_{(123)}=A^{-1}_{(124)}\varepsilon_{(124)}=A^{-1}_{(134)}\varepsilon_{(134)}\\ &=A^{-1}_{(234)}\varepsilon_{(234)}\end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{(123)}=\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\}^T \qquad \varepsilon_{(124)}=\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4\}^T\\ &\varepsilon_{(134)}=\{\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4\}^T \qquad \varepsilon_{(234)}=\{\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\}^T\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

逆矩阵A^{-1}由式(1)求得：

$$\left.\begin{aligned}&A^{-1}_{(123)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\cot\theta & -\tan\theta & \dfrac{2}{\sin 2\theta}\end{bmatrix};\\ &A^{-1}_{(124)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \cot\theta & \tan\theta & -\dfrac{2}{\sin 2\theta}\end{bmatrix};\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
A^{-1}_{(134)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\cot^2\theta & \dfrac{1}{2\sin^2\theta} & \dfrac{1}{2\sin^2\theta} \\ 0 & \dfrac{\sin 2\theta}{4} & -\dfrac{\sin 2\theta}{4} \end{bmatrix}; \\
A^{-1}_{(234)} &= \begin{bmatrix} -\tan^2\theta & \dfrac{1}{2\cos^2\theta} & \dfrac{1}{2\cos^2\theta} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sin 2\theta}{2} & -\dfrac{\sin 2\theta}{4} \end{bmatrix};
\end{aligned}
\right\} \quad (15)
$$

将式（13）、（10）、（12）、（9）依次代入式（11）可知道，以 N_i（$i=1$、2、3、4）来表示И也有四种表达式，即

$$
= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = T_{(123)} \begin{Bmatrix} \dfrac{N_1}{\beta_1 l_1} \\ \dfrac{N_2}{\beta_2 l_2} \\ \dfrac{N_3}{\beta_3 l_3} \end{Bmatrix} = T_{(124)} \begin{Bmatrix} \dfrac{N_1}{\beta_1 l_1} \\ \dfrac{N_2}{\beta_2 l_2} \\ \dfrac{N_4}{\beta_4 l_4} \end{Bmatrix}
$$

$$
= T_{(134)} \begin{Bmatrix} \dfrac{N_1}{\beta_1 l_1} \\ \dfrac{N_3}{\beta_3 l_3} \\ \dfrac{N_4}{\beta_4 l_4} \end{Bmatrix} = T_{(234)} \begin{Bmatrix} \dfrac{N_2}{\beta_2 l_2} \\ \dfrac{N_3}{\beta_3 l_3} \\ \dfrac{N_4}{\beta_3 l_3} \end{Bmatrix} \quad (16)
$$

其中 T 可称为内力变换矩阵，分别表示为：

$$
\left.
\begin{aligned}
T_{(123)} &= \widetilde{B}A^{-1}_{(123)} = \frac{3}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -\cot\theta & -\tan\theta & \dfrac{2}{\sin 2\theta} \end{bmatrix} \\[2ex]
T_{(124)} &= \widetilde{B}A^{-1}_{(124)} = \frac{3}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \cot\theta & \tan\theta & -\dfrac{2}{\sin 2\theta} \end{bmatrix} \\[2ex]
T_{(134)} &= \widetilde{B}A^{-1}_{(134)} = \frac{3}{8}\begin{bmatrix} 3-\cot^2\theta & \dfrac{1}{2\sin^2\theta} & \dfrac{1}{2\sin^2\theta} \\ 1-3\cot^2\theta & \dfrac{3}{2\sin^2\theta} & \dfrac{3}{2\sin^2\theta} \\ 0 & \dfrac{\sin 2\theta}{4} & -\dfrac{\sin 2\theta}{4} \end{bmatrix} \\[2ex]
T_{(234)} &= BA^{-1}_{(234)} = \frac{3}{8}\begin{bmatrix} 1-3\tan^2\theta & \dfrac{3}{2\cos^2\theta} & \dfrac{3}{2\cos^2\theta} \\ 3-\tan^2\theta & \dfrac{1}{2\cos^2\theta} & \dfrac{1}{2\cos^2\theta} \\ 0 & \dfrac{\sin 2\theta}{4} & -\dfrac{\sin 2\theta}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\} \quad (17)
$$

如图 3 所示，如要求得某列节点右侧与 y 轴平行的轴线 I_x+—I_x+ 处的平板内力，则应采用式（16）的第三种表达式来计算，式中 N_1、N_3、N_4 取轴线 I_x—I_x 右侧各杆的内力值。若要求得轴线 I_x-—I_x- 处的平板内力，也用式（16）的第三种表达式来计算，但式中 N_1、N_3、N_4 应取轴线 I_x—I_x 左侧各杆的内力

值。显然，此轴线两侧的平板内力计算结果是不会相等的，因为该列节点上作用有外荷载，有腹杆内力在板平面内的分力。同理，轴线 I_{y+} —— I_{y+}，I_{y-} —— I_{y-} 处的平板内力，应采用式（16）的第四种表达式来计算，式中 N_2、N_3、N_4 应分别取轴线 I_y—I_y 上、下侧各杆的内力值，计算结果也是不会相等的。

有时需要计算在正交正放上弦杆中点附近的平板内力，这可采用如下办法。

由图3可知，三、四两组平面交叉杆系可把平板剖分为一系列菱形单元（靠近边界处为半个菱形单元，即三角形单元），其中标有小黑点的单元中有一根x轴方向的等代杆，空白单元中有一根y轴方向的等代杆，两类单元呈棋盘状布置。

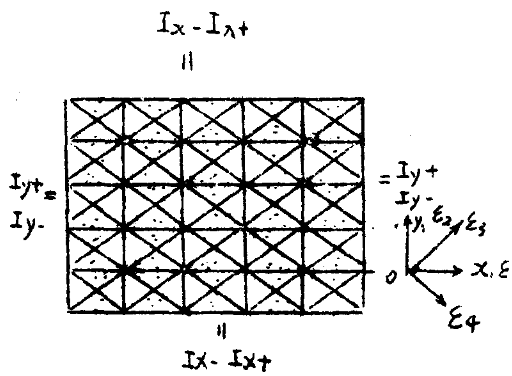

图 3

这样，小黑点单元与空白单元内的平板内力，可分别由式(16)的第三、四种表达式计算。对于内部的菱形单元，计算时 N_3、N_4 应取两对边杆件内力的平均值。对于靠近边界的三角形单元，N_1 或 N_2 应取相应杆件内力值的两倍。这是因为在等代杆系结构分析中，平板的等代边界杆件的截面积，比相应的内部杆件的截面积要减少一半所致。由此可见，任一单元内的平板内力是常内力状态，单元之间的内力是间断的，这与平板的平面有限元法的计算结果有类似性。然而，这里是用单一的铰接杆元法求得，这样简化了这种网架－平板组合结构的计算工作。

至于平板在任意截面处的内力$\{N_\alpha S_\alpha\}^T$，则在求得$\{N_x N_y N_{xy}\}^T$后，可按材料力学方法由下式计算

$$\begin{Bmatrix} N \\ S_\alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin 2\alpha \\ \dfrac{\sin 2\alpha}{2} & -\dfrac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

式中α为任意截面的法线与x轴的交角。

此外，实际上外荷载不是作用在节点上，而是作用在板面上的，所以在设计时还应根据板的连接构造情况，按多支点多跨连续板或四支点单跨板计算带肋板的局部弯曲内力。

下面讨论一个特例，若上弦是正方形网格，预制面板也可做成正方形的带肋板，则计算可进一步简化。此时$\theta=\pi/4$，可得：

$$\beta_1=\beta_2=\frac{3}{4}，\beta_3=\beta_4=\frac{3}{8}，\ l_2=l_1，l_3=l_4=\sqrt{2}\,l_1，$$

$$A_1=A_2=\frac{3}{4}\delta l_1，A_3=A_4=\frac{3}{4\sqrt{2}}\delta l_1， \tag{19}$$

式(19)表明，x、y轴方向等代杆系的截面积，并不等于相应杆系间距内的全部板截面积δl_1，而是等于$\frac{3}{4}\delta l_1$，打了一个折扣。另两组交叉等代杆系的截面积，也有相同的性质，平板内力与等代杆系内力转换关系的四种表达式(16)也可简化成

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2l_1}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \sqrt{2}\,N_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2l_1}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \sqrt{2}\,N_4 \end{Bmatrix}$$

$$
= \frac{1}{2l_1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N_1 \\ \sqrt{2}\,N_3 \\ \sqrt{2}\,N_4 \end{Bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{2l_1}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N_2 \\ \sqrt{2}\,N_3 \\ \sqrt{2}\,N_4 \end{Bmatrix} \qquad (20)
$$

设厚度为δ边长为l_1的一块方板，边界上分别作用有均布线荷载p_x、p_y（见图4 a），试按本文分析方法计算平板的内力和变位。

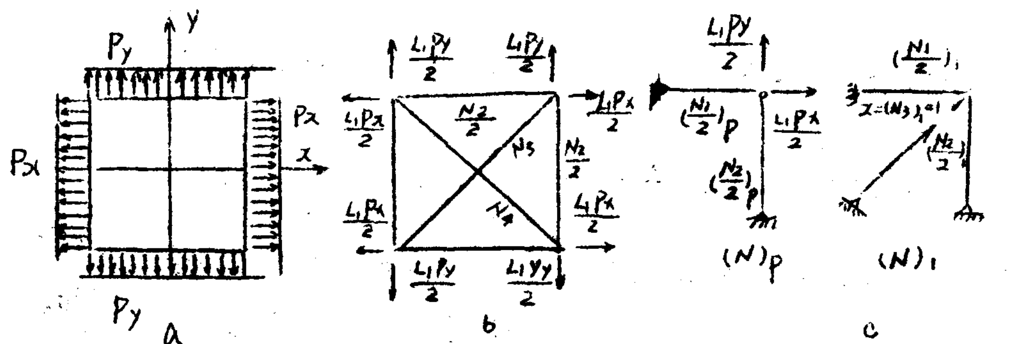

图 4

等代计算模型可取一简单的平面桁架，如图4 b所示。四根边杆的截面积应取$(\frac{A_1}{2})=(\frac{A_2}{2})=\frac{3}{8}\delta l_1$，其内力分别以$(\frac{N_1}{2})$、$(\frac{N_2}{\sqrt{2}})$表示；交叉杆的截面积为$A_3=A_4=\frac{3}{4\sqrt{2}}\delta l_1$，其内力为$X=N_3=N_4$。因双轴对称性，分析时取$\frac{1}{4}$平面桁架即可，并可采用熟知的力法求解。由图4c、4d可知

$$\left(\frac{N_1}{2}\right)_p=\frac{l_1 p_x}{2},\quad \left(\frac{N_2}{2}\right)_p=\frac{l_1 p_y}{2},\quad \left(\frac{N_1}{2}\right)_1=\left(\frac{N_2}{2}\right)_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta_{11}=\sum_i \frac{(N_i)_1^2 l_i}{EA_i}=\frac{8}{3E\delta}$$

$$\Delta_{1p}=\sum_i \frac{(N_i)_1 (N_i)_p l_i}{EA_i}=-\frac{\sqrt{2}\, l_1}{3E\delta}(p_x+p_y)$$

因而求得：

$$X=N_3=N_4=-\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}=\frac{\sqrt{2}}{8} l_1(p_x+p_y)$$

$$\left(\frac{N_1}{2}\right)=X\left(\frac{N_1}{2}\right)_1+\left(\frac{N_1}{2}\right)_p=\frac{l_1}{8}(3p_x-p_y)$$

$$\left(\frac{N_2}{2}\right)=X\left(\frac{N_2}{2}\right)_1+\left(\frac{N_2}{2}\right)_p=\frac{l_1}{8}(3p_y-p_x)$$

桁架在x、y轴方向的总伸长Δ_x、Δ_y分别为：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_x&=\frac{\left(\frac{N_1}{2}\right)l_1}{E\left(\frac{A_1}{2}\right)}=\frac{l_1}{E\delta}\left(p_x-\frac{p_y}{3}\right)\\
\Delta_y&=\frac{\left(\frac{N_2}{2}\right)l_1}{E\left(\frac{A_2}{2}\right)}=\frac{l_1}{E\delta}\left(p_y-\frac{p_x}{3}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad (21a)$$

根据桁架的内力，则可由式（20）第一式或其它各式返回求得平板的内力

$$\begin{Bmatrix} N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2l_1}\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&0\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{l_1}{4}(p_x-p_y)\\ \frac{l_1}{4}(3p_y-p_x)\\ \frac{l_1}{4}(p_x+p_y)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_x\\ p_y\\ 0\end{Bmatrix}$$

即板内各处两个轴向内力分别为 p_x、p_y，剪力为零，这明显是正确的。至于平板的应变，当 $\nu=\frac{1}{3}$ 时，由式（11）可得

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E\delta}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{E\delta}\begin{Bmatrix} p_x-\frac{p_y}{3} \\ p_y-\frac{p_x}{3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

从而平板在 x、y 两轴方向的总伸长为

$$\Delta_x=\int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}}\varepsilon_x d_x=\frac{l_1}{E\delta}\left(p_x-\frac{p_y}{3}\right)$$

$$\Delta_y=\int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}}\varepsilon_y d_y=\frac{l_1}{E\delta}\left(p_y-\frac{p_x}{3}\right) \qquad (21b)$$

这与根据桁架求得由式（21a）所表示的结果完全相等。

因此，从这个简例可以说明。当材料的泊桑系数为 $\frac{1}{3}$ 时，用等代平面杆系的计算模型来简化分析平板的平面问题是可行的。

三、$\nu \neq \frac{1}{3}$时的刚度修正系数

当组合结构中平板材料的泊桑系数ν不等于$\frac{1}{3}$时，可引入一个刚度修正系数，仍按上述方法进行简化计算。

设平板材料的弹性模量为E_0，泊桑系数为ν_0。由材料力学可知，任意一组平面内力可通过转轴变换求其主内力N_{I}、N_{II}。在主内力状态下，单位板面积内的余应变能密度为

$$V_0=\frac{1}{2E_0\delta}(N_1^2-2\nu_0 N_{\mathrm{I}}N_{\mathrm{II}}+N_{\mathrm{II}}^2)$$

$$=\frac{N_1^2}{2E_0\delta}(1+\gamma^2-2\nu_0\gamma) \tag{22}$$

如平板材料的弹性模量为E，泊桑系数为$\frac{1}{3}$时，在相同的主内力状态下，则其余应变能密度为

$$V=\frac{N_{\mathrm{I}}^2}{2E\delta}(1+\gamma^2-\frac{2}{3}\gamma) \tag{23}$$

使两者的余应变能相等，便有

$$E=\frac{1+\gamma^2-\frac{2}{3}\gamma}{1+\gamma^2-2\nu_0\gamma}E_0=\eta E_0 \tag{24}$$

式中

$$\eta=\frac{1+\gamma^2-\frac{2}{3}\gamma}{1+\gamma^2-2\nu_0\gamma} \tag{25}$$

η为弹性模量的修正系数，亦即刚度修正系数。

实际上，η值也可乘在式(9)的右端，即得

$$A_i=\eta\beta_i\delta l_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \tag{9'}$$

这表明当 $\nu_0 \neq \frac{1}{3}$ 时，可将等代杆系的截面积乘刚度修正系数 η，而弹性模量仍取平板的实际弹性模量 E_0 。

刚度修正系数 η　　　　　　　　　　　　　　　表 1

γ_0 \ N_0/N_1	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	−0.2	−0.4	−0.6	−0.8	−1.0
0.15	0.784	0.790	0.814	0.859	0.925	1.000	1.067	1.115	1.143	1.156	1.159
1/6	0.800	0.806	0.828	0.870	0.932	1.000	1.060	1.103	1.128	1.140	1.143
0.20	0.833	0.838	0.857	0.893	0.944	1.000	1.047	1.081	1.100	1.109	1.111
0.25	0.889	0.892	0.906	0.931	0.965	1.000	1.029	1.049	1.060	1.065	1.066
0.30	0.952	0.954	0.960	0.971	0.989	1.000	1.011	1.019	1.023	1.025	1.026
1/3	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

当平板的主内力比为 1 ～ −1、泊桑系数为 0.15 ～ $\frac{1}{3}$ 时，η 值的变化规律见表 1。网架－平板组合结构的平板大多是受压的，且主内力比绝大部分为 1.0～0.4。如取混凝土平板的泊桑系数为 1 ／ 6，则 η 值的变化范围为 0.800 ～ 0.870，具体计算时可取其加权平均值，或近似取 η =0.825。