高中
平面三角法
教科書
附表

韓桂叢
李耀春　編譯
王喬南

傅種孫
程廷熙　參校

教育部審定

算學叢刻社 附中

教科書

附表

編譯者

韓桂叢 李權春 王喬南

參校者

傅種孫 程廷熙

算學叢刻社印行

教育部審定

版權所有

高中平面三角法教科書

附表

影印本

編譯者　韓桂叢　李燿春　王喬南

印刷者　算學叢刻社

總售處　新華書店　北平和平門外西河沿185號電話南(3)5425號

目錄

第一章 銳角之三角函數，直角三角形之解法.

第二章 任意角之三角函數

第三章　三角函數間之關係

第四章　三角解析

第五章　角之通值,逆三角函數,三角方程

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第六章 三角函數之圖象表示法

第七章 斜角三角形之解法

第八章 對數之理論及應用

第九章　近於0°或90°之銳角

第十章 三角函數表之造法及其精確度略論

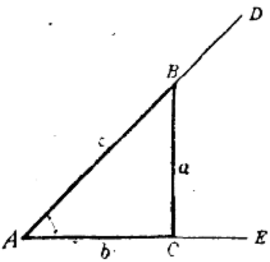
高中平面三角法教科書

第一章

銳角之三角函數,直角三角形之解法

§1. 銳角三角函數之釋義. 今假定學者對於初等幾何學中角之觀念,業經熟悉. 本章專就銳角研究之.

設 EAD 爲一小於90°之角, 即一銳角. 自角之一邊上任意點B,作一線垂直於他邊,得一直角三角形ABC. 以大字母A,B,C表其三角,以小字母a,b,c表其相當對邊(註). 按幾何學之理,知此三角形之邊之長短,與角之大小互有相依關係. 而三角法則欲將此相依關係精確表出之,因此須用諸邊之比. 此諸比即稱爲**三角函數**. 任何銳角如A,共六種三角函數,示之如下:



$\sin A$, 讀作 "A之正弦";

$\cos A$, 讀作 "A之餘弦";

$\tan A$, 讀作 "A之正切";

$\csc A$, 讀作 "A之餘割";

(註)除聲明外,凡直角三角形之弦皆以c表之,其直角皆以C表之.

$\sec A$, 讀作 "A之正割"

$\cot A$, 讀作 "A之餘切"

此等三角函數之定義,可以規定之如下(參看上面之圖):(註一)

(1) $\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{弦}}\left(=\dfrac{a}{c}\right)$;　(4) $\csc A=\dfrac{\text{弦}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{c}{a}\right)$;

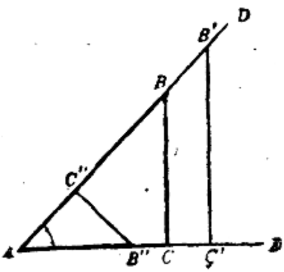
(2) $\cos A=\dfrac{\text{隣邊}}{\text{弦}}\left(=\dfrac{b}{c}\right)$;　(5) $\sec A=\dfrac{\text{弦}}{\text{隣邊}}\left(=\dfrac{c}{b}\right)$;

(3) $\tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{隣邊}}\left(=\dfrac{a}{b}\right)$;　(6) $\cot A=\dfrac{\text{隣邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{b}{a}\right)$;

於此有一重要事實,即任何函數之數值,僅與A角之大小有關係,而與所由以引垂線之B點無關係,甚易知也(註二).

(註一) 含銳角A之直角三角形中,對直角之邊爲弦,對A角之邊爲對邊,餘一邊爲隣邊.

(註二) 蓋設B′爲AD上另一任意點,B″爲AE上任意一點,作B′C′及B″C″分別垂直於AE及AD,則三角形ABC, AB′C′, AB″C″爲互等角,因其皆爲直角三角形,且有一公共角A故也. 於是此諸三角形皆爲相似三角形,而



$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''},$$

式中每比皆表A角之正弦. 同理,亦可証其他函數之此種性質. 由此可見各函數之值,實與所用三角形之大小無關,蓋各函數皆係兩邊相對之比,並非一邊實際之長也. 此理至要,不可不明.

學者更須注意如A角之大小有變化,則每比亦必變其數值

此諸函數乃研究三角法之基本要件 學者苟于以上六定義不能澈底了解,則研究斷不能進行.上列左方之三個函數乃右方相當函數之倒數.學者如能注意此點,亦甚易記憶.因

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A}.$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A};\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

設用定義(1)至(6)於銳角B,則

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$

$$\cos B=\frac{a}{c}.\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$

$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

以之與A角之函數相比較,可知

$$\sin A=\cos B;\qquad \csc A=\sec B;$$

$$\cos A=\sin B;\qquad \sec A=\csc B;$$

$$\tan A=\cot B;\qquad \cot A=\tan B;$$

因$A+B=90°$(即A與B互爲餘角),故以上結果,可簡述之如下:

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

定理　一銳角之函數,等於其餘角之餘函數.(註)

例題1. 已知 $a=3$, $b=4$, 計算直角三角形內 A 角之函數.

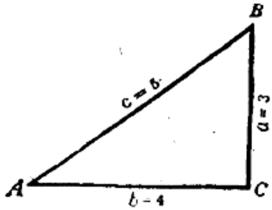
解. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

用(1)至(6)各定義.

$\sin A=\frac{3}{5}$;　　$\csc A=\frac{5}{3}$;

$\cos A=\frac{4}{5}$;　　$\sec A=\frac{5}{4}$;

$\tan A=\frac{3}{4}$;　　$\cot A=\frac{4}{3}$.



更求 B 角之各函數而比較其得數.

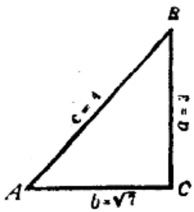
例題2. 已知 $a=3$, $c=4$, 計算直角三角形內 B 角之各函數.

解. $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$;　　$\csc B=\frac{4}{\sqrt{7}}$;

$\cos B=\frac{3}{4}$;　　$\sec B=\frac{4}{3}$;

$\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3}$;　　$\cot B=\frac{3}{\sqrt{7}}$.



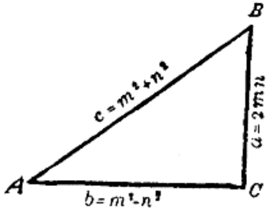
更求 A 角之各函數而比較其得數.

(註) 正弦與餘弦互爲餘函數. 同理,正切與餘切,正割與餘割,皆互爲餘函數.

例題3. 已知 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, 計算直角三角形內 A 角之函數.

解. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$

$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2.$



$\sin A=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$;　$\csc A=\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$;

$\cos A=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$;　$\sec A=\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

$\tan A=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$;　$\cot A=\dfrac{m^2-n^2}{2mn}$.

例題4. 在一直角三角形內, 已知 $\sin A=\dfrac{4}{5}$ 及 $a=80$; 求 c.

解. 由公式(1) $\sin A=\dfrac{a}{c}$.

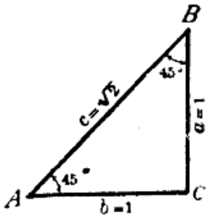
以 $\sin A$ 及 a 之數值代入, 得

$$\frac{4}{5}=\frac{80}{c};$$

解之,　　$c=100$. 答.

§2. 45° 30°, 60° 之函數. 此等角常見於用三角方法所解之題中, 故應求出此等角之三角函數值而熟記之.

(a) 求 45° 之函數.



作一等腰直角三角形, 如 ABC,

則　　$\angle A=\angle B=45°$.

因各函數皆係兩邊相互之比, 無關于實際長度. 故可作一任意大小之三角

形，但使三角爲 $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ 可耳．此三角形自必等腰．

設取短邊之長爲1，即設 $a=1$ 及 $b=1$．

於是　　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$，而得

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \csc 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \sec 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ=1;\qquad \cot 45^\circ=1.$$

(b)　求 30° 及 60° 之函數．

作一等邊三角形，如 ABD，由 B 至 AD 作垂直線 BC 在三角形 ABC 中，

$$\angle A=60^\circ，而\ \angle ABC=30^\circ.$$

又設最短邊之長爲1，即設 $b=1$．則得

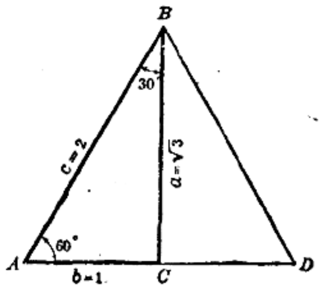
$$c=AB=AD=2AC=2b=2,$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\qquad \sec 60^\circ=2;$$

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3};\qquad \cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$



同理，由此同一三角形，

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2};\qquad \csc 30^\circ=2;$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \cot 30° = \sqrt{3}.$$

將以上得數之尤重要者表列如下:(註)

角	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2} = .50$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = .71+$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86+$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86+$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = .71+$	$\frac{1}{2} = .50$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}} = .57+$	1	$\sqrt{3} = 1.73+$

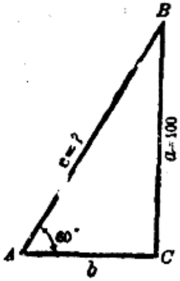
至于餘割,正割,及餘切亦易記憶,因其各爲正弦,餘弦,及正切之倒數也.

學者當極熟悉含45°角之直角三角形及含30°角60°角之直角三角形. 如能默記此等三角形之圖,以直接得各函數之值,亦足代替記憶上表也.

例題 5. 已知直角三角形之 $A=60°$, $a=100$; 求 c.

解. 因 A 爲已知而 A 之正弦含 a 及 c, a 已知而 c 未知,故用下式:

(註) 表中第一列(正弦)三數爲 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 各除以2.第二列(餘弦)三數與第一列三數先後次序正相反. 第三列(正切)三數,係由一二兩列相當之數相除而得. 明夫此,則易于記憶矣



$$\sin A=\frac{a}{c} \qquad (1)$$

可以求 c, 以 $a=100$ 及 $\sin A=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入, 則得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{100}{c}.$$

化去分數求 c, 則得

$$c=\frac{200}{\sqrt{3}}=\frac{200}{1.7+}=117.6+. \qquad \text{答.}$$

B 之數值爲何? 又依照上法, 求出 $b=58.8+$.

習 題

下列諸題僅指直角三角形.

1. 已知 $a=8$, $b=15$, 計算 A 角之各函數,

   答. $\sin A=\frac{8}{17}$, $\cos A=\frac{15}{17}$, $\tan A=\frac{8}{15}$, 等等.

2. 已知 $a=5$, $c=7$, 計算 B 角之各函數.

   答. $\sin B=\frac{\sqrt{24}}{7}$, $\cos B=\frac{5}{7}$, $\tan B=\frac{\sqrt{24}}{5}$, 等等.

3. 已知 $b=2$, $c=\sqrt{11}$, 計算 A 角之各函數.

   答. $\sqrt{\frac{7}{11}}$, $\frac{2}{\sqrt{11}}$, $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 等等.

4. 已知 $a=40$, $c=41$, 計算 B 角之各函數.

   答. $\frac{9}{41}$, $\frac{40}{41}$, $\frac{9}{40}$, 等等.

5. 已知 $a=p$, $b=q$, 計算 A 角之各函數.

答. $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\frac{p}{q}$, 等等.

6. 已知 $a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$, 計算 A 角之各函數.

答. $\frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}$, $\frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}$, $\sqrt{\frac{m}{n}}$, 等等.

7. 已知 $a=\sqrt{m^2+n^2}$, $c=m+n$, 計算 B 角之各函數.

答. $\frac{\sqrt{2mn}}{m+n}$, $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}$, $\sqrt{\frac{2mn}{m^2+n^2}}$, 等等.

8. 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$, $c=200.5$; 計算 a. 答. 120.3.

9. 已知 $\cos A=.44$, $c=30.5$; 計算 b. 答. 13.42.

10. 已知 $\tan A=\frac{11}{3}$, $b=\frac{27}{11}$; 計算 c. 答. $\frac{9}{11}\sqrt{130}$.

11. 已知 $A=30^\circ$, $a=25$, 求 c. 又求 B 及 b.

答. $c=50$, $B=60^\circ$, $b=25\sqrt{3}$.

12. 已知 $B=30^\circ$, $c=48$, 求 b. 又求 A 及 a.

答. $b=24$, $A=60^\circ$, $a=24\sqrt{3}$.

13. 已知 $B=45^\circ$, $b=20$; 求 c. 又求 A 及 a.

答. $c=20\sqrt{2}$, $A=45^\circ$, $a=20$.

§3. 直角三角形之解法. 一三角形爲六部份所組成,即三邊與三角是也. 所謂**解一三角形,即求其未知之部份.** 若已知三角形之三部份,且至少有一部份爲邊,則此三角形能解.(註) 若在直角三角形,

(註) 假定所與條件合理,卽能由已知部份作一三角形.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com