

宇 1 3 4 2 宇  
 高 中  
 1 1  
 平 面 三 角 法  
 3 3  
 教 科 書  
 4 4  
 附 表  
 4 4  
 韓 李 王 傅 程  
 2 2  
 桂 耀 喬 種 廷  
 2 2  
 叢 春 南 孫 熙  
 2 2  
 編 譯  
 參 校  
 宇 1 3 4 2 宇

教育部審定



# 教科書

附表

編譯者

韓桂叢 李權春 王喬南

參校者

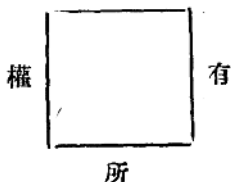
傅種係 程廷熙



算學叢刻社印行

教育部審定

版



高中平面三角法

教科書

附表

影印本

編譯者 韓桂叢 李耀春 王喬南

印刷者 算學叢刻社

總售處 新華書店 北平和平門外西河沿185號電話南(3)5425號

# 目 錄

## 第一章 銳角之三角函數, 直角三角形之解法.

節數	面數
1. 銳角三角函數之釋義 ... ..	1
2. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數 ... ..	5
3. 直角三角形之解法 ... ..	9
4. 直角三角形解法之通則 ... ..	10
5. 等腰三角形之解法 ... ..	16
6. 正多邊形之解法 ... ..	18
7. 插入法 ... ..	20
8. 三角應用題中之通用名詞 ... ..	24

## 第二章 任意角之三角函數

9. 角之發生 ... ..	31
10. 正角及負角 ... ..	31
11. 任意大小之角 ... ..	32
12. 四象限 ... ..	32
13. 本面中一點之垂直坐標 ... ..	34
14. 一點與原點之距離 ... ..	35
15. 任意角三角函數之釋義 ... ..	36
16. 三角函數之正負 ... ..	38
17. 知一函數之值, 求作相當之角, 並求其他五函數 之值 ... ..	39
18. 用一函數表示其他五函數 ... ..	44
19. 三角函數之直線定義 ... ..	48
20. 角變化時各函數值所起之變化 ... ..	50
21. 量角法 ... ..	58

22.	弧量法	...	...	...	...	58
23.	化各種三角函數爲銳角之函數	...	...	...	...	63
24.	餘角之函數	...	...	...	...	64
25.	第二象限內各角之函數之化法	...	...	...	...	64
26.	第三象限內各角之函數之化法	...	...	...	...	69
27.	第四象限內各角之函數之化法	...	...	...	...	72
28.	負角之函數之化法	...	...	...	...	76
29.	化任何角之函數爲銳角函數之通則	...	...	...	...	79
<b>第三章 三角函數間之關係</b>						
30.	三角函數之基本關係	...	...	...	...	82
31.	三角恆等式	...	...	...	...	86
<b>第四章 三角解析</b>						
32.	二角和與二角差之諸函數	...	...	...	...	88
33.	二角和之正弦與餘弦	...	...	...	...	88
34.	二角差之正弦與餘弦	...	...	...	...	93
35.	二角和與二角差之正切與餘切	...	...	...	...	95
36.	以某一角之函數表二倍該角之函數	...	...	...	...	98
37.	倍角之函數	...	...	...	...	99
38.	一角之函數以其半角之函數表之	...	...	...	...	102
39.	以一角之餘弦表其半角之函數	...	...	...	...	103
40.	函數之和與差	...	...	...	...	104
41.	三角恆等式	...	...	...	...	109
<b>第五章 角之通值, 逆三角函數, 三角方程</b>						
42.	角之通值	...	...	...	...	118
43.	正弦相同或餘割相同之角之通值	...	...	...	...	118
44.	餘弦相同或正割相同之角之通值	...	...	...	...	120

- |     |                |     |
|-----|----------------|-----|
| 45. | 正切相同或餘切相同之角之通值 | 122 |
| 46. | 逆三角函數          | 125 |
| 47. | 三角方程           | 135 |
| 48. | 三角方程之解法指南      | 136 |

### 第六章 三角函數之圖象表示法

- |     |              |     |
|-----|--------------|-----|
| 49. | 變量           | 141 |
| 50. | 常量           | 141 |
| 51. | 函數           | 141 |
| 52. | 函數之圖象        | 142 |
| 53. | 三角函數之圖象      | 144 |
| 54. | 三角函數之週期性     | 147 |
| 55. | 用單位圓繪三角函數之圖象 | 148 |

### 第七章 斜角三角形之解法

- |     |                |     |
|-----|----------------|-----|
| 56. | 三角形邊與角之關係      | 152 |
| 57. | 正弦定律           | 153 |
| 58. | 兩解情形           | 156 |
| 59. | 餘弦定律           | 163 |
| 60. | 正切定律           | 167 |
| 61. | 以三角形之三邊表其半角之函數 | 169 |
| 62. | 求斜角三角形之面積之公式   | 175 |

### 第八章 對數之理論及應用

- |     |            |     |
|-----|------------|-----|
| 63. | 在三角法內對數之需要 | 179 |
| 64. | 對數之性質      | 182 |
| 65. | 常用對數       | 187 |
| 66. | 決定對數指標之法則  | 189 |
| 67. | 對數表及其用法    | 190 |

68.	由表 I 求一數之對數	...	...	194
69.	求與一已知對數相當之真數	...	...	200
70.	在計算上對數之用法	...	...	202
71.	餘對數	...	...	206
72.	對數之底之變換	...	...	209
73.	指數方程	...	...	210
74.	三角函數對數表之用法	...	...	213
75.	由角求其函數之對數	...	...	214
76.	由一函數之對數求角	...	...	217
77.	用對數解直角三角形	...	...	221
78.	用對數解斜角三角形	...	...	229
	類 I 已知兩角與一邊	...	...	230
	類 II 已知兩邊與其一邊之對角(兩解情形)	...	...	230
	類 III 已知兩邊與其夾角	...	...	238
	類 IV 三邊爲已知	...	...	242
79.	用對數求斜角三角形之面積	...	...	245
80.	陸地面積之測量	...	...	249
81.	平行航海	...	...	250
82.	平面航海	...	...	252
83.	中緯航海	...	...	253

### 第九章 近於 $0^\circ$ 或 $90^\circ$ 之銳角

84.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 與 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ 之值	...	...	257
85.	近於 $0^\circ$ 與 $90^\circ$ 諸正銳角之三角函數	...	...	259
86.	求近於 $0^\circ$ 之銳角各三角函數所用之法則	...	...	260
87.	求近於 $90^\circ$ 之銳角各三角函數所用之法則	...	...	261

88.	求近於 $0^\circ$ 與 $90^\circ$ 之角各函數對數所用之法則	262
89.	適合之測量與計算	264
<b>第十章 三角函數表之造法及其精確度略論</b>		
90.	二項式定理	272
91.	De Moivre's 定理	272
92.	用 $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 表示 $\sin n\theta$ 及 $\cos n\theta$	273
93.	正弦級數及餘弦級數	274
94.	三角函數表之造法及其精確度	275
95.	本書附表之精確度	276
公式錄		278-284
漢英名詞對照表		285-288



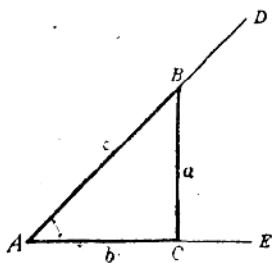
# 高中平面三角法 教科書

## 第一章

### 銳角之三角函數, 直角三角形之解法

§1. 銳角三角函數之釋義. 今假定學者對於初等幾何學中角之觀念, 業經熟悉. 本章專就銳角研究之.

設  $EAD$  爲一小於  $90^\circ$  之角, 即一銳角. 自角之一邊上任意點  $B$ , 作一線垂直於他邊, 得一直角三角形  $ABC$ . 以大字母  $A, B, C$  表其三角, 以小字母  $a, b, c$  表其相當對邊(註). 按幾何學之理, 知此三角形之邊之長短, 與角之大小互有相依關係. 而三角法則欲將此相依關係精確表出之, 因此須用諸邊之比. 此諸比即稱爲三角函數. 任何銳角如  $A$ , 共六種三角函數, 示之如下:



$\sin A$ , 讀作 “ $A$  之正弦”;

$\cos A$ , 讀作 “ $A$  之餘弦”;

$\tan A$ , 讀作 “ $A$  之正切”;

$\csc A$ , 讀作 “ $A$  之餘割”;

(註)除聲明外, 凡直角三角形之弦皆以  $c$  表之, 其直角皆以  $C$  表之.

$\sec A$ , 讀作 “ $A$ 之正割”

$\cot A$ , 讀作 “ $A$ 之餘切”

此等三角函數之定義, 可以規定之如下(參看上面之圖):

$$(1) \sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{弦}} \left( = \frac{a}{c} \right); \quad (4) \csc A = \frac{\text{弦}}{\text{對邊}} \left( = \frac{c}{a} \right);$$

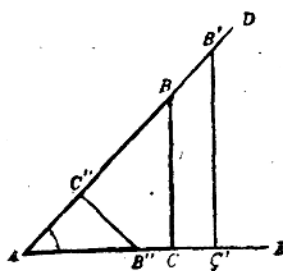
$$(2) \cos A = \frac{\text{隣邊}}{\text{弦}} \left( = \frac{b}{c} \right); \quad (5) \sec A = \frac{\text{弦}}{\text{隣邊}} \left( = \frac{c}{b} \right);$$

$$(3) \tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{隣邊}} \left( = \frac{a}{b} \right); \quad (6) \cot A = \frac{\text{隣邊}}{\text{對邊}} \left( = \frac{b}{a} \right);$$

於此有一重要事實, 即任何函數之數值, 僅與  $A$  角之大小有關係, 而與所由以引垂線之  $B$  點無關係, 甚易知也(註二).

(註一) 含銳角  $A$  之直角三角形中, 對直角之邊為弦, 對  $A$  角之邊為對邊, 餘一邊為隣邊.

(註二) 蓋設  $B'$  為  $AD$  上另一任意點,  $B''$  為  $AE$  上任意一點, 作



$B'C'$  及  $B''C''$  分別垂直於  $AE$  及  $AD$ , 則三角形  $ABC$ ,  $AB'C'$ ,  $AB''C''$  為互等角, 因其皆為直角三角形, 且有一公共角  $A$  故也. 於是此諸三角形皆為相似三角形, 而

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$

式中每比皆表  $A$  角之正弦, 同理, 亦可証其他函數之此種性質. 由此可見各函數之值, 實與所用三角形之大小無關, 蓋各函數皆係兩邊相對之比, 並非一邊實際之長也. 此理至要, 不可不明

學者更須注意如  $A$  角之大小有變化, 則每比亦必變其數值

此諸函數乃研究三角法之基本要件。學者苟于以上六定義不能澈底了解，則研究斷不能進行，上列左方之三個函數乃右方相當函數之倒數，學者如能注意此點，亦甚易記憶。因

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A}; \quad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin A}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A}; \quad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A}; \quad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}$$

設用定義 (1) 至 (6) 於銳角  $B$ ，則

$$\sin B = \frac{b}{c}; \quad \csc B = \frac{c}{b};$$

$$\cos B = \frac{a}{c}; \quad \sec B = \frac{c}{a};$$

$$\tan B = \frac{b}{a}; \quad \cot B = \frac{a}{b}.$$

以之與  $A$  角之函數相比較，可知

$$\sin A = \cos B; \quad \csc A = \sec B;$$

$$\cos A = \sin B; \quad \sec A = \csc B;$$

$$\tan A = \cot B; \quad \cot A = \tan B;$$

因  $A + B = 90^\circ$  (即  $A$  與  $B$  互為餘角)，故以上結果，可

簡述之如下：

定理 一銳角之函數，等於其餘角之餘函數。<sup>(註)</sup>

例題 1. 已知  $a=3$ ,  $b=4$ , 計算直角三角形內  $A$  角之函數.

$$\text{解. } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

用 (1) 至 (6) 各定義.

$$\sin A = \frac{3}{5};$$

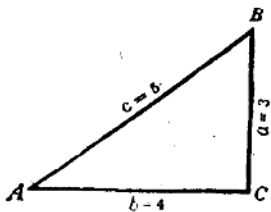
$$\csc A = \frac{5}{3};$$

$$\cos A = \frac{4}{5};$$

$$\sec A = \frac{5}{4};$$

$$\tan A = \frac{3}{4};$$

$$\cot A = \frac{4}{3}.$$



更求  $B$  角之各函數而比較其得數.

例題 2. 已知  $a=3$ ,  $c=4$ , 計算直角三角形內  $B$  角之各函數.

$$\text{解. } b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4};$$

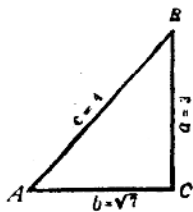
$$\csc B = \frac{4}{\sqrt{7}};$$

$$\cos B = \frac{3}{4};$$

$$\sec B = \frac{4}{3};$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3};$$

$$\cot B = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$



更求  $A$  角之各函數而比較其得數.

(註) 正弦與餘弦互為餘函數，同理，正切與餘切，正割與餘割，皆互為餘函數。

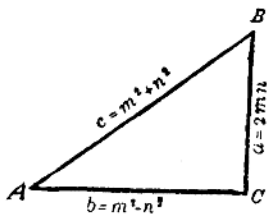
例題 3. 已知  $a=2mn$ ,  $b=m^2-n^2$ , 計算直角三角形內  $A$  角之函數.

$$\begin{aligned} \text{解. } c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4} \\ &= \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = m^2 + n^2. \end{aligned}$$

$$\sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}; \quad \csc A = \frac{m^2 + n^2}{2mn};$$

$$\cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}; \quad \sec A = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};$$

$$\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}; \quad \cot A = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$



例題 4. 在一直角三角形內, 已知  $\sin A = \frac{4}{5}$  及  $a = 80$ ;

求  $c$ .

$$\text{解. 由公式(1) } \sin A = \frac{a}{c}.$$

以  $\sin A$  及  $a$  之數值代入, 得

$$\frac{4}{5} = \frac{80}{c};$$

解之,

$$c = 100. \quad \text{答.}$$

§ 2. 45°, 30°, 60° 之函數. 此等角常見於用三角方法所解之題中, 故應求出此等角之三角函數值而熟記之.

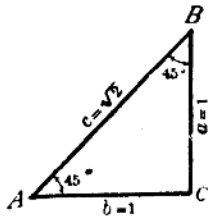
(a) 求 45° 之函數.

作一等腰直角三角形, 如  $ABC$ ,

則

$$\angle A = \angle B = 45^\circ.$$

因各函數皆係兩邊相互之比, 無關於實際長度. 故可作一任意大小之三角



形，但使三角為  $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$  可耳。此三角形自必等腰。

設取短邊之長為 1，即設  $a=1$  及  $b=1$ 。

於是  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ ，而得

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \csc 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1; \quad \cot 45^\circ = 1.$$

(b) 求  $30^\circ$  及  $60^\circ$  之函數。

作一等邊三角形，如  $ABD$ ，由  $B$  至  $AD$  作垂直線  $BC$ 。在三角形  $ABC$  中，

$$\angle A = 60^\circ, \text{ 而 } \angle ABC = 30^\circ.$$

又設最短邊之長為 1，即設  $b=1$ 。則得

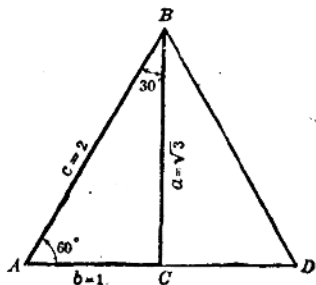
$$c = AB = AD = 2AC = 2b = 2,$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sec 60^\circ = 2;$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



同理，由此同一三角形，

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \csc 30^\circ = 2;$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

將以上得數之尤重要者表列如下：(註)

角	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sin	$\frac{1}{2} = .50$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = .71 +$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86 +$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86 +$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = .71 +$	$\frac{1}{2} = .50$
tan.	$\frac{1}{\sqrt{3}} = .57 +$	1	$\sqrt{3} = 1.73 +$

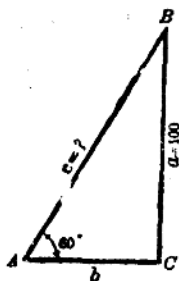
至于餘割, 正割, 及餘切亦易記憶, 因其各為正弦, 餘弦, 及正切之倒數也。

學者當極熟悉含  $45^\circ$  角之直角三角形及含  $30^\circ$  角  $60^\circ$  角之直角三角形。如能默記此等三角形之圖, 以直接得各函數之值, 亦足代替記憶上表也。

例題 5. 已知直角三角形之  $A=60^\circ$ ,  $a=100$ ; 求  $c$ 。

解. 因  $A$  為已知而  $A$  之正弦含  $a$  及  $c$ ,  $a$  已知而  $c$  未知, 故用下式:

(註) 表中第一列(正弦)三數為  $\sqrt{1}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , 各除以 2, 第二列(餘弦)三數與第一列三數先後次序正相反。第三列(正切)三數, 係由一二兩列相當之數相除而得。明夫此, 則易于記憶矣。



$$\sin A = \frac{a}{c} \quad (1)$$

可以求  $c$ ，以  $a=100$  及  $\sin A = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

代入，則得

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{100}{c}$$

化去分數求  $c$ ，則得

$$c = \frac{200}{\sqrt{3}} = \frac{200}{1.73} = 117.6 + \quad \text{答.}$$

$B$  之數值爲何？又依照上法，求出  $b=58.8+$ 。

## 習 題

下列諸題僅指直角三角形。

1. 已知  $a=8$ ,  $b=15$ ，計算  $A$  角之各函數。

答.  $\sin A = \frac{8}{17}$ ,  $\cos A = \frac{15}{17}$ ,  $\tan A = \frac{8}{15}$ , 等等。

2. 已知  $a=5$ ,  $c=7$ ，計算  $B$  角之各函數。

答.  $\sin B = \frac{\sqrt{24}}{7}$ ,  $\cos B = \frac{5}{7}$ ,  $\tan B = \frac{\sqrt{24}}{5}$ , 等等。

3. 已知  $b=2$ ,  $c=\sqrt{11}$ ，計算  $A$  角之各函數。

答.  $\frac{\sqrt{7}}{11}$ ,  $\frac{2}{\sqrt{11}}$ ,  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ , 等等。

4. 已知  $a=40$ ,  $c=41$ ，計算  $B$  角之各函數。

答.  $\frac{9}{41}$ ,  $\frac{40}{41}$ ,  $\frac{9}{40}$ , 等等。

5. 已知  $a=p$ ,  $b=q$ ，計算  $A$  角之各函數。



答.  $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}, \frac{p}{q}$ , 等等.

6. 已知  $a = \sqrt{m^2+mn}, c = m+n$ , 計算  $A$  角之各函數.

答.  $\frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}, \frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}, \sqrt{\frac{m}{n}}$ , 等等.

7. 已知  $a = \sqrt{m^2+n^2}, c = m+n$ , 計算  $B$  角之各函數.

答.  $\frac{\sqrt{2mn}}{m+n}, \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}, \sqrt{\frac{2mn}{m^2+n^2}}$ , 等等.

8. 已知  $\sin A = \frac{3}{5}, c = 200.5$ ; 計算  $a$ . 答. 120.3.

9. 已知  $\cos A = .44, c = 30.5$ ; 計算  $b$ . 答. 13.42.

10. 已知  $\tan A = \frac{11}{3}, b = \frac{27}{11}$ ; 計算  $c$ . 答.  $\frac{6}{11}\sqrt{130}$ .

11. 已知  $A = 30^\circ, a = 25$ , 求  $c$ . 又求  $B$  及  $b$ .

答.  $c = 50, B = 60^\circ, b = 25\sqrt{3}$ .

12. 已知  $B = 30^\circ, c = 48$ , 求  $b$ . 又求  $A$  及  $a$ .

答.  $b = 24, A = 60^\circ, a = 24\sqrt{3}$ .

13. 已知  $B = 45^\circ, b = 20$ ; 求  $c$ . 又求  $A$  及  $a$ .

答.  $c = 20\sqrt{2}, A = 45^\circ, a = 20$ .

§3. 直角三角形之解法. 一三角形為六部份所組成, 即三邊與三角是也. 所謂解一三角形, 即求其未知之部份. 若已知三角形之三部份, 且至少有一部份為邊, 則此三角形能解. (註) 若在直角三角形,

(註) 假定所與條件合理, 即能由已知部份作一三角形.