根据普通高中课程标准实验教科书（人教·B版）编写

“伴你学”新课程

# 数学

选修 4–4

## 坐标系与参数方程

新学案

新课程 新思想 新理念

XINKECHENG XINSIXIANG XINLINIAN

山东友谊出版社

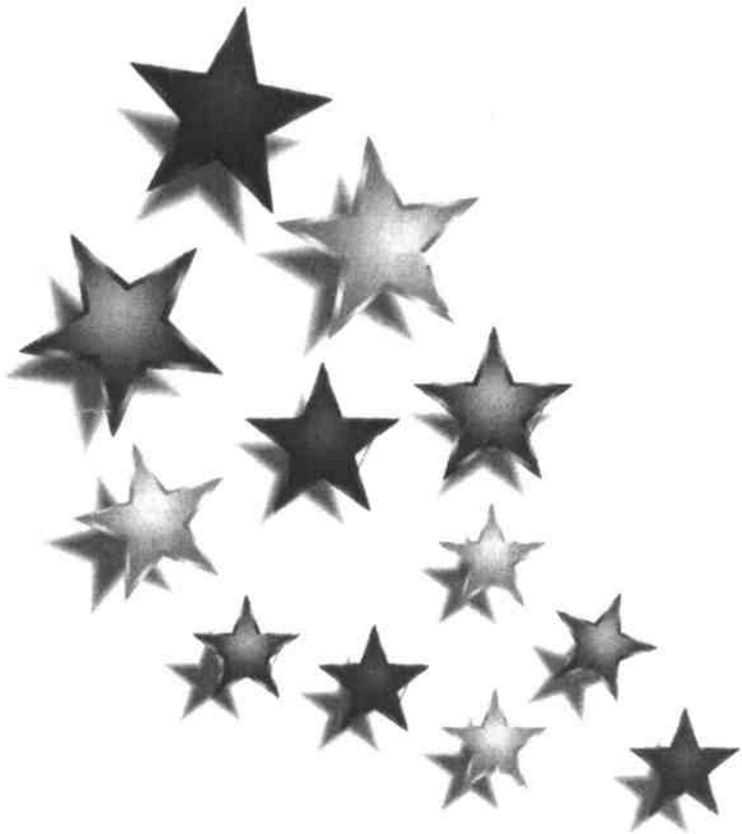
•••“伴你学”新课程·新学案•••

根据普通高中课程标准实验教科书(人教·B版)编写

# 数 学

选修 4－4

坐标系与参数方程



山 东 友 谊 出 版 社

# 编写说明

为了适应高中课程改革的需要，落实《基础教育课程改革纲要》中关于"注重培养学生的独立性和自主性"、"促进学生在教师的指导下主动地、富有个性地学习"的精神，体现教育教学改革最新成果，指导学生进行自主学习，减轻学生过重的课业负担，提高学习效率和质量，我们组织全省知名的教研员和骨干教师编写了这套《"伴你学"新课程·新学案》丛书.

本丛书包括9个学科.丛书编写以高中各学科课程标准为依据，以新的课程理念为指导，着眼于培养学生的创新精神和实践能力，侧重于学法指导和思维能力的培养.在栏目设置、习题编排上，紧扣课程标准的要求和高考改革的动向，突出应用性、新颖性和探究性，让学生巩固知识、发展能力、体验过程.

本书与高中数学实验教科书相配套，与教学同步，科学实用.收编的题目新颖、灵活、典型，知识和技能覆盖面广，重视解题方法、技巧归纳和思维训练等特色，设计理念独到.各模块按章节顺序编排，每章节均设有"学习目标"、"知识网络"、"学路导引"、"范例精析"、"过关评估"、"数学文化"、"单元检测"等自主性、探究性、开放性栏目.

本书主编：韩际清，参加编写的人员有：韩相河、杨玉红、潘洪艳、张永花、刘纾飒、刘坦.

殷切期望广大读者对本书提出宝贵意见，让我们与新课程改革一同成长.

编　者

2006年5月

# 目 录

# 第一章　坐标系

## 1.1　直角坐标系，平面上的伸缩变换

### 学习目标

- 1. 回顾在平面直角坐标系中刻画点的位置的方法，体会坐标系的作用.
- 2. 初步了解平面上的一种简单变换——伸缩变换.

### 知识网络

- 直角坐标系，平面上的伸缩变换
  - 直角坐标系
    - 直线上点的坐标
    - 平面直角坐标系
    - 空间直角坐标系
  - 平面上的伸缩变换

### 学路导引

**学习重点**

(1)用直角坐标刻画直线上的点、平面上的点、空间中的点的位置，体会坐标系的作用.

(2)在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况.

**学习难点**

在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况.

## 学法指导

灵活掌握伸缩变换的坐标表达式，也可以与前面所学函数图象的伸缩变换相结合.

## 范例精析

【例 1】已知两点 $A(3,3,1)$、$B(1,0,5)$，求：

(1)线段 $AB$ 的中点坐标和长度；

(2)到 $A$、$B$ 两点距离相等的点 $P(x,y,z)$ 的坐标 $x,y,z$ 满足的条件.

【精析】直角坐标系下中点坐标公式及两点间距离公式的简单应用.

【解】(1)设 $M(x,y,z)$ 是线段 $AB$ 的中点，则

$x=\frac{3+1}{2}, y=\frac{3+0}{2}, z=\frac{1+5}{2}$.

$\therefore x=2, y=\frac{3}{2}, z=3$.

$\therefore M(2,\frac{3}{2},3)$, $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2+(1-5)^2}=\sqrt{29}$.

(2)由题意可知 $\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-5)^2}$,

化简可得 $4x+6y-8z+7=0$,

$\therefore$点 $P(x,y,z)$ 的坐标 $x,y,z$ 满足的条件是：$4x+6y-8z+7=0$.

【点评】(1)掌握两点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$ 的中点坐标公式$(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$.

(2)掌握 $A$、$B$ 两点间的距离公式：$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

(3)到 $A$、$B$ 距离相等的点 $P$ 的轨迹是线段 $AB$ 的垂直平分平面.在空间中，关于 $x,y,z$ 的三元一次方程的图形是平面.

【例 2】将 $y=\cos\frac{x}{2}$ 的图象经过图象变换 $(x,y)\to(rx,sy)$ 所成的图象方程式为 $y=4\cos x$. 求 $r,s$.

【精析】平面上伸缩变换坐标表达式是$\begin{cases}X=ax,\\Y=by.\end{cases}$

【解】方法 1：$\because (x,y)\to(rx,sy)$,

$\therefore\begin{cases}X=rx,\\Y=sy.\end{cases}$

平面上的这一坐标变换把 $y=\cos\frac{x}{2}$ 变为新的曲线 $\frac{Y}{s}=\cos\frac{\frac{X}{r}}{2}=\cos\frac{X}{2r}$,

$\therefore Y=s\cos\dfrac{X}{2r}$.

$\begin{cases} s=4, \\ \dfrac{1}{2r}=1, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} s=4, \\ r=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

方法 2：$y=\cos\dfrac{x}{2}\to y=4\cos x$，可看做先保持 $y$ 不变，把横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$，在此基础上，再把纵坐标变为原来的 4 倍，$\therefore s=4, r=\dfrac{1}{2}$.

【点评】把平面上伸缩变换的坐标表达式与以前学习的平面图象的平移与伸缩结合起来.

过关评估

## 1.1.1 直角坐标系

### A组

**一、选择题**

1.已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A$、$B$、$C$ 的坐标分别是 $(-2,1)$，$(3,4)$，$(-1,3)$，则第四个顶点 $D$ 的坐标是 ( )

A.$(2,2)$　　B.$(-6,0)$

C.$(4,6)$　　D.以上都不对

2.空间直角坐标系中，点 $A(2,3,-6)$ 关于 $xOy$ 面对称的点 $A'$ 的坐标是 ( )

A.$(2,3,6)$　　B.$(-2,3,-6)$

C.$(-2,-3,-6)$　　D.$(2,-3,-6)$

3.$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$，则 $\triangle ABC$ 的形状为 ( )

A.等边三角形　　B.等腰三角形

C.等腰直角三角形　　D.直角三角形

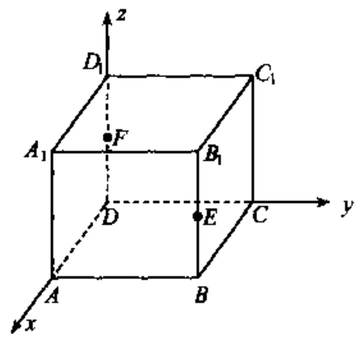
**二、填空题**

4.已知两点 $A(1,-3)$、$B(8,2)$，且 $A$、$B$、$C$ 三点共线，则 $C(x,y)$ 的坐标中 $x$，$y$ 的关系是____________.

5.点 $P$ 在 $z$ 轴上，且 $P$ 到点 $A(-4,1,7)$ 与到点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等，则点 $P$ 的坐标为__________.

**三、解答题**

6.已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为1的正方体，$E$、$F$ 分别是 $BB_1$ 和 $DD_1$ 的中点，建立如图所示的直角坐标系，试写出图中各点的坐标.




7.证明：以 $A(4,3,1)$、$B(7,1,2)$、$C(5,2,3)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 是一等腰三角形.

## B组

1.求到两定点 $M_1(1,-1,1)$ 与 $M_2(2,1,-1)$ 等距离的点 $M(x,y,z)$ 的轨迹方程.

2.若正三角形 $ABC$ 的三个顶点分别为 $A(2,0,-1)$、$B(6,-1,4)$、$C(1,y,z)$，求 $y,z$.

## 1.1.2 平面上的伸缩变换

### A组

**一、选择题**

1.伸缩变换$(x,y)\to(\frac{1}{2}x,3y)$将直线 $L:x+y+4=0$ 变成另一直线 $L'$,则 $L'$ 的方程式是 ( )

A.$2x+\frac{1}{3}y+4=0$　　B.$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+4=0$

C.$\frac{1}{2}x+3y+4=0$　　D.$2x+3y+4=0$

2.圆 $C:x^2+y^2=4$ 经过伸缩变换$(x,y)\to(x,sy)$后,变成椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,则 $s$ 的值为 ( )

A.3　　B.$\frac{2}{3}$

C.$\frac{3}{2}$　　D.$\frac{1}{3}$

3.已知函数 $y=f(x)$,将 $f(x)$的图象上每一点纵坐标保持不变,横坐标扩大到原来的2倍,然后把所得图象沿 $x$ 轴向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位,这样得到的曲线与 $y=\frac{1}{2}\sin x$图象相同,那么函数 $y=f(x)$的解析式为 ( )

A.$f(x)=\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})$　　B.$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{2})$

C.$f(x)=\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})$　　D.$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{2})$

**二、填空题**

4.伸缩变换$(x,y)\to(\frac{1}{2}x,3y)$后,将点 $P(6,9)$对应到点 $Q$,则 $Q$ 的坐标为________.

5.直线 $x+2y-10=0$ 经过伸缩变换$(x,y)\to(\frac{1}{2}x,y)$变成另一直线,则此直线方程式为________________.

三、解答题

6. 画出 $y=2\sin x(x\in[0,2\pi])$的图象.

7. 直线 $L$ 经过伸缩变换$(x,y)\to(x,3y)$后，变成另一直线 $9x+4y-18=0$，求 $L$ 的方程式.



## B组

1. 把圆的方程 $x^2+y^2=a^2$ 均匀压缩为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2k^2}=1$，写出坐标变换公式.

2. 将 $y=4\cos x$ 的图象经过图象变换$(x,y)\to(rx,sy)$，所成的图象方程式为 $y=\cos\frac{x}{2}$，求 $r,s$.

# 1.2 极坐标系

## 学习目标

- 1.会用极坐标表示平面上的点.
- 2.体会用极坐标刻画平面上点的位置与以前学过的直角坐标的区别.
- 3.掌握两种坐标间的变换公式.

## 知识网络

极坐标系
- 平面上点的极坐标
- 极坐标与直角坐标的关系

## 学路导引

### 学习重点

1.会用极坐标表示平面上的点.

2.掌握两种坐标间的变换公式.

### 学习难点

1.用极坐标表示平面上的点.

2.直角坐标与极坐标的互相转化.

### 学法指导

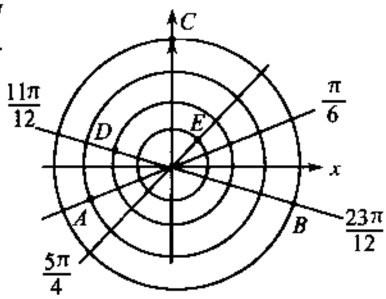
1.对用极坐标表示平面上一点,应认识到一个点 $P$ 可以有多组极坐标与之对应.

2.对于两种坐标互相转化的学习应掌握变换公式$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta. \end{cases}$

## 范例精析

【例 1】如图,写出 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 的一个极坐标($\rho<0,\theta\in\mathbf{R}$).

【精析】当 $\rho<0$ 时,极坐标 $(\rho,\theta)$ 对应的点 $M$ 的位置按下列规则确定:点 $M$ 在与极轴成 $\theta$ 角的射线的反向延长线上,它到极点 $O$ 的距离为 $|\rho|$.




【解】$\because \rho<0$,

$\therefore A(-3,\frac{\pi}{6}),B(-4,\frac{11\pi}{12}),C(-4,\frac{3\pi}{2})$,

$D(-2,\frac{23}{12}\pi),E(-1,\frac{5\pi}{4})$.

【点评】一个点 $P$ 可以有多组极坐标与之对应.以下几种形式都是点 $P$ 的极坐标:$(\rho,\theta),(\rho,2k\pi+\theta),(-\rho,\pi+\theta)$.

【例 2】化下列各点的极坐标为直角坐标:

(1)$(2,\frac{\pi}{6})$; (2)$(3,-\frac{2\pi}{3})$.

【精析】直角坐标与极坐标互相转化的公式是:$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta.\end{cases}$

【解】(1)由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\\y=2\sin\frac{\pi}{6}=1,\end{cases}$

$\therefore$ 直角坐标为 $(\sqrt{3},1)$.

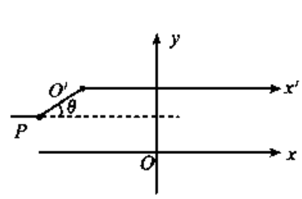
(2)由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3\cos(-\frac{2\pi}{3})=-\frac{3}{2},\\y=3\sin(-\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2},\end{cases}$

$\therefore$ 直角坐标为 $(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

【点评】熟练掌握两种坐标形式的转化公式.

【例 3】已知点 $P(-3,\sqrt{3})$,若极坐标系的极点在直角坐标系的 $O'(-3+\sqrt{3},2\sqrt{3})$,极轴的方向与 $x$ 轴正向相同,两个坐标系单位长度相同,求点 $P$ 的极坐标.

【精析】平面上任一点 $M$ 的位置由 $M$ 到极点的距离 $\rho$ 和从 $Ox$ 到 $OM$ 的角度 $\theta$ 来表示,所以只要找到 $\rho$、$\theta$,就可以确定点的坐标.




【解】$\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-3+\sqrt{3}+3}=1,\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore\angle x'O'P=\frac{5\pi}{4}$.

$\rho=|O'P|=\sqrt{(-3+\sqrt{3}+3)^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3+3}$
$=\sqrt{6}$,

$\therefore$极坐标系 $O'x'$ 中，点 $P$ 的极坐标为$(\sqrt{6},\frac{5\pi}{4})$.

【点评】在极坐标系中，$\rho$ 是指点 $P$ 到极点的距离，从 $Ox$ 到 $OP$ 的角度是 $\theta$.

**过关评估**

# 1.2.1 平面上点的极坐标

## A组

### 一、选择题

1.与极坐标$(-2,\frac{\pi}{6})$不表示同一点的极坐标是 ( )

A.$(2,\frac{7\pi}{6})$　　B.$(2,-\frac{7\pi}{6})$　　C.$(-2,-\frac{11}{6}\pi)$　　D.$(-2,\frac{13}{6}\pi)$

2.将点 $P$ 的直角坐标$(-1,2)$化为极坐标是 ( )

A.$(5,-\arctan 2)$　　B.$(5,\pi-\arctan 2)$

C.$(-\sqrt{5},-\arctan 2)$　　D.$(-\sqrt{5},\pi-\arctan 2)$

3.极坐标系中，与点 $A(3,-\frac{\pi}{3})$关于极轴所在直线对称的点的极坐标是 ( )

A.$(3,\frac{2\pi}{3})$　　B.$(3,\frac{\pi}{3})$　　C.$(3,\frac{4\pi}{3})$　　D.$(3,\frac{5\pi}{6})$

### 二、填空题

4.已知点 $A(\rho_1,\theta_1)$、$B(\rho_2,\theta_2)$的极坐标满足条件 $\rho_1+\rho_2=0,\theta_1+\theta_2=\pi$，则 $A$、$B$ 的位置关系是____________.

5.一个三角形的一个顶点在极点，其他两个顶点分别为 $P_1(-5,109°)$，$P_2(4,49°)$，则$\triangle OP_1P_2$ 的面积为________.

### 三、解答题

6.将下列极坐标化为直角坐标.

(1)$(2,-\frac{\pi}{6})$；　　(2)$(4,-\frac{2\pi}{3})$.

7.求点 $P_1(2,\frac{\pi}{6})$关于极轴、极点以及过极点且垂直于极轴的直线对称的极坐标($\rho>0,-\pi<\theta\leqslant\pi$).

## B组

1.在极坐标中,如果等边三角形的两个顶点分别是 $A(2,\frac{\pi}{4})$,$B(2,\frac{5\pi}{4})$,求顶点 $C$ 的坐标.



2.已知定点 $P(4,\frac{\pi}{3})$.

(1)将极点移到 $O'(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$处,极轴方向不变,求点 $P$ 的新坐标;

(2)极点不变,将极轴逆时针转动$\frac{\pi}{6}$角,求点 $P$ 的新坐标.

# 1.2.2 极坐标与直角坐标的关系

## A组

### 一、选择题

1.直角坐标为$(-3,4)$的点的极坐标可能是　　　　（　　）

A.$(5,\arctan(-\frac{4}{3}))$　　B.$(5,\arcsin\frac{4}{5})$

C.$(-5,-\arccos\frac{3}{5})$　　D.$(-5,\arccos(-\frac{3}{5}))$

2.极坐标系中点$P(2,\frac{\pi}{3})$的直角坐标是　　　　（　　）

A.$(1,\sqrt{3})$　　B.$(\sqrt{3},1)$　　C.$(-1,\sqrt{3})$　　D.$(1,-\sqrt{3})$

3.点$P$的直角坐标$(-1,2)$化为极坐标是　　　　（　　）

A.$(5,-\arctan2)$　　B.$(5,\pi-\arctan2)$

C.$(-\sqrt{5},-\arctan2)$　　D.$(-\sqrt{5},\pi-\arctan2)$

### 二、填空题

4.点$A$的直角坐标为$(0,-2)$,则它的极坐标为________.

5.点$B$的极坐标为$(-2,-\frac{\pi}{3})$,则它的直角坐标是________.

### 三、解答题

6.化下列各点的极坐标为直角坐标.

(1)$(1,\frac{\pi}{2})$;　　(2)$(3,-\frac{2\pi}{3})$.

7. 把点 $M$ 的直角坐标 $(1,-1)$ 化为极坐标形式(限定 $\rho\geqslant 0,-\pi<\theta\leqslant\pi$).

## B组

1. 将直角坐标 $P(-1,-\sqrt{3})$ 化为极坐标($\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi$).

2. 化曲线 $C$ 的直角坐标方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 为极坐标方程.

# 1.3 曲线的极坐标方程

## 学习目标

- 1. 了解曲线的极坐标方程的概念.
- 2. 能写出过极点的直线方程和圆心在极点的圆的方程.

## 知识网络

曲线的极坐标方程
- 曲线的极坐标方程的概念
- 特殊的直线、圆的极坐标方程



## 学路导引

### 学习重点

能写出过极点的直线方程和圆心在极点的圆的方程.

### 学习难点

过极点的直线方程和圆心在极点的圆的方程.

### 学法指导

(1)求曲线的极坐标方程,就是求曲线上任一点 $M(\rho,\theta)$的坐标符合已知条件的方程,它在方法与步骤上和求直角坐标方程是类似的:

①建立适当的坐标系.

②列出点 $P$ 在曲线上的充要条件.

③将上述条件用动点坐标$(\rho,\theta)$的解析式来表示.

④化简并证明所得到方程就是所求曲线的方程.

(2)由于一个点有无数个极坐标,所以一条曲线可以有无数个方程与之对应.求曲线方程并不要求得到每条曲线的所有方程,只要求出其中一个方程即可.