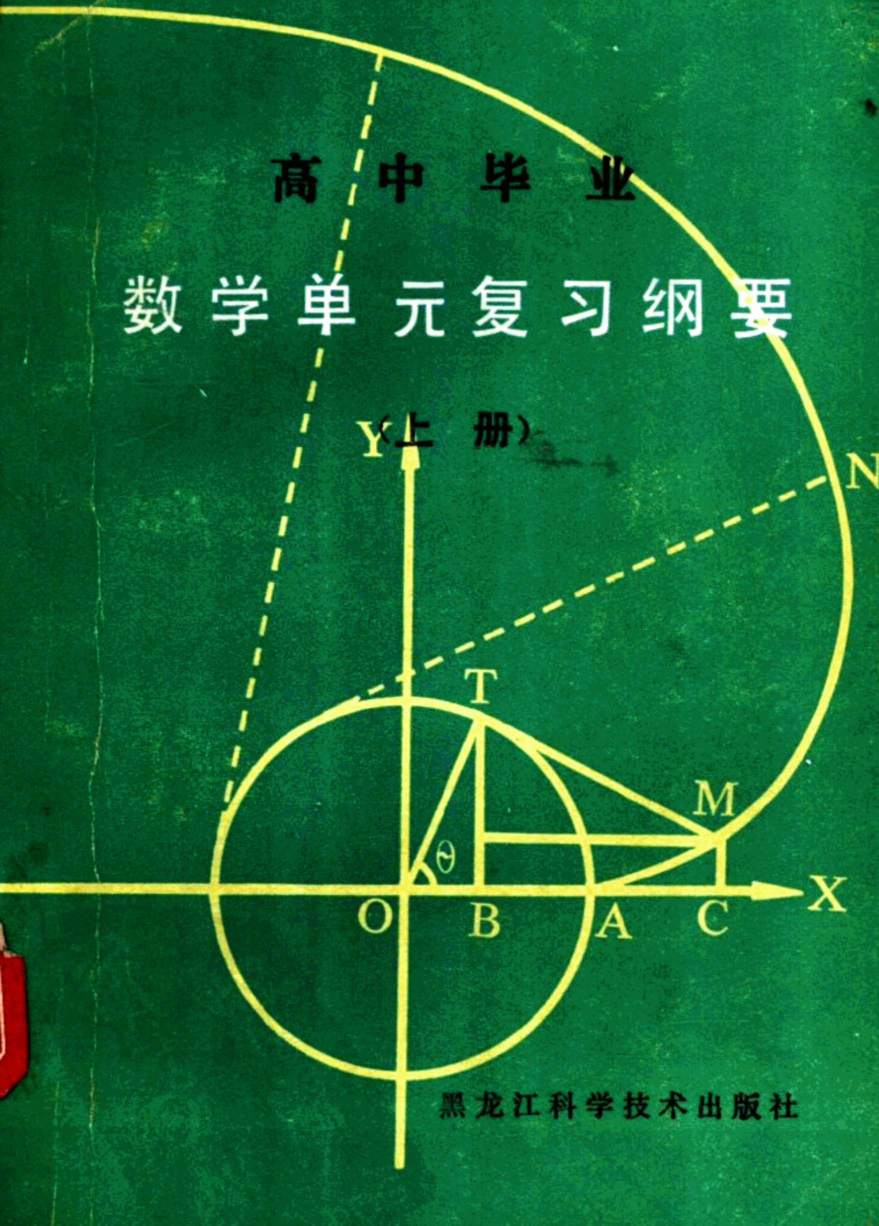
高中毕业

数学单元复习纲要

（上册）



黑龙江科学技术出版社

高　中　毕　业

数学单元复习纲要

《高中毕业数学单元复习纲要》编写组

（上　册）

黑龙江科学技术出版社

一九八二年·哈尔滨

编 写 说 明

本书是根据教育部规定的一九八二年高考内容和要求编写的。它以教学大纲和教材为依据，重视基础知识，选材包括数学科逐年新增加的内容，以高中为主，代数为主，可供高中毕业复习、高考复习时师生参考之用。

全书分代数、几何、三角、平面解析几何和极限、导数与微分五部分。为了减轻学生负担，选题时注意了典型性和数量，并根据高中毕业复习课的特点，将内容按单元归类，分节编排，每节可供九十分钟复习课教学之用。书后还附有重点内容及新增内容的十个专题辅导。

本书由孙倬旺、韩殿发、张公万（代数，极限、导数与微分）、李辉、王万祥（几何，平面解析几何）、戴再平（三角）等同志编写，由戴再平同志最后定稿。

目　　录

代　　数

§1.1　代数式的运算、求值

用代数运算（加、减、乘、除、乘方和开方）符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式．分类如下：

$$
\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}
$$

一　整式的四则运算　乘法公式：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$；

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$．

二　分　式

1．基本性质　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{am}{bm}(m\neq 0)$．

2．通分、约分及四则运算．

3．繁分式的化简　利用除法法则或分式的基本性质．

三　二次根式

1．性质

（1）$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0); \end{cases}$

(3) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$;

(4) $\sqrt{a/b}=\sqrt{a}/\sqrt{b}\quad(a\geqslant 0,\ b>0)$.

2. 最简二次根式与同类根式

3. 根式运算

例 1 计算

$(x+y+z)(-x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)$.

解

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=[(y+z)+x][(y+z)-x][x+(y-z)][x-(y-z)]\\
&=[(y+z)^2-x^2][x^2-(y-z)^2]\\
&=[2yz+(y^2+z^2-x^2)][2yz-(y^2+z^2-x^2)]\\
&=(2yz)^2-(y^2+z^2-x^2)^2\\
&=2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2-x^4-y^4-z^4.
\end{aligned}$$

例 2 已知 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，求下面代数式的值：

$$\left[\frac{(a+b)^2+2b^2}{a^3-b^3}+\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}-\frac{1}{a-b}\right]\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\div\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right).$$

解

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\left[\frac{a^2+2ab+3b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}+\frac{a^2-b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\right.\\
&\quad\left.-\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\right]\cdot\frac{a-b}{ab}\div\frac{b^2-a^2}{ab}\\
&=\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a-b}{ab}\cdot\frac{ab}{b^2-a^2}\\
&=\frac{1}{b^2-a^2}.
\end{aligned}$$

由已知 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 原式$=\dfrac{1}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1$.

说明 本题宜化简后求值。

例 3 已知 $a>0$，$x=\dfrac{1+a^2}{a}$，计算$\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$。

解一 $\because \sqrt{x+2}=\sqrt{\dfrac{1+a^2}{a}+2}=\sqrt{\dfrac{(a+1)^2}{a}}=\dfrac{a+1}{a}\sqrt{a}$；

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a}}=\begin{cases}\dfrac{1-a}{a}\sqrt{a} & (0<a<1)\\ \dfrac{a-1}{a}\sqrt{a} & (a\geqslant 1).\end{cases}$$

把 $\sqrt{x+2}$、$\sqrt{x-2}$ 的值代入原式，化简后得

$$原式=\begin{cases}1/a & (0<a<1)\\ a & (a\geqslant 1).\end{cases}$$

解二 分母有理化

$$原式=\frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x-2})^2}=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

$$=\frac{1+a^2+\sqrt{(1-a^2)^2}}{2a}=\begin{cases}1/a & (0<a<1)\\ a & (a\geqslant 1).\end{cases}$$

例 4 已知 $x+1/x=4$，分别求下列分式的值：

（1）x^2+1/x^2；（2）x^3+1/x^3；

（3）x^4+1/x^4；（4）x^4-1/x^4。

解（1）把 $x+1/x=4$ 两边平方得

$x^2+2+1/x^2=16$，$\therefore\ x^2+1/x^2=14$。

（2）把 $x+1/x=4$，两边立方，整理得

$x^3+1/x^3+3(x+1/x)=64$，$\therefore\ x^3+1/x^3=52$。

（3）把 $x^2+1/x^2=14$ 两边平方得

$x^4+2+1/x^4=196$，$\therefore\ x^4+1/x^4=194$。

（4）$\because\ x^4-1/x^4=(x^2+1/x^2)(x+1/x)(x-1/x)$；

又 $\because\ (x-1/x)^2=x^2+1/x^2-2=14-2=12$，

$\therefore\quad x-1/x=\pm 2\sqrt{3}$，故$x^4-1/x^4=14\times 4\times(\pm 2\sqrt{3})$
$=\pm 112\sqrt{3}$。

例 5 已知实数 a,b,c,d 满足 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}$，

求 $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$。

解 令 $a/b=b/c=c/d=d/a=k$ 则

$\therefore\quad d=ak$； $c=dk=(ak)k=ak^2$；

$b=ck=(ak^2)k=ak^3$； $a=bk=(ak^3)k=ak^4$。

$\because\quad a\neq 0$（如果等 0， a、b、c、d 都为 0，分式分母无意义）

$\therefore\quad k^4=1$，$k=\pm 1$。

$$原式=\frac{a+ak^3+ak^2+ak}{a+ak^3+ak^2-ak}=\frac{1+k^3+k^2+k}{1+k^3+k^2-k}$$

$$=\begin{cases}2 & 当\ k=1时\\ 0 & 当\ k=-1时.\end{cases}$$

说明 如果已知条件以等比形式给出，常可设比值为 k。

例 6 已知 $a+3b+5c=0$，$2a+4b+7c=0$，$abc\neq 0$，

求 $\frac{a^2+5b^2-2c^2}{3a^2-2b^2+5c^2}$的值。

解 $\because\quad abc\neq 0$，$\therefore\quad c\neq 0$，设 $a/c=x$，$b/c=y$。
则已知二式可化为 $x+3y+5=0$，$2x+4y+7=0$，解之得
$x=-1/2$，$y=-3/2$

$$\therefore\quad \frac{a^2+5b^2-2c^2}{3a^2-2b^2+5c^2}=\frac{x^2+5y^2-2}{3x^2-2y^2+5}$$

$$=\frac{(-1/2)^2+5(-3/2)^2-2}{3(-1/2)^2-2(-3/2)^2+5}=7\frac{3}{5}.$$

例 7 已知实数 x、y、z 满足：

$|2x-y|+\sqrt{y+2z}+z^2-4z+4=0$，求 $(x-y)^2$ 的值。

分析 已知条件只有一个含 $x、y、z$ 的关系式，通常不能用解方程的办法求出 $x、y、z$ 的值。考虑到 $|2x-y|$ 是绝对值，$\sqrt{y+2z}$ 是算术根，$z^2-4z+4=(z-2)^2$ 是完全平方式，当 $x、y、z$ 都是实数时它们都是非负的，所以要使它们的和为 0，只能这三项均为 0，于是可求出 $x、y、z$ 的值。

解 $\because$ $|2x-y|\geqslant 0$，$\sqrt{y+2z}\geqslant 0$，z^2-4z+4

$=(z-2)^2\geqslant 0$，

由已知 $x、y、z$ 为实数，$|2x-y|+\sqrt{y+2z}+(z-2)^2=0$，故有 $2x-y=0$，$y+2z=0$，$z-2=0$，解得 $x=-2$，$y=-4$，$z=2$。

于是 $(x-y)^2=[-2-(-4)]^2=4$。

【练习】

1．计算（1）$x(x+2)^2(x-2)^2+(2x-1)(4x^2+2x+1)$；

（2）$\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$；

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{8}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$；

（4）$\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$；

（5）$(a^4-40b^4-5a^3b+22ab^3)\div(a^2+4b^2-3ab)$。

2．已知 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{2}-\sqrt{3}$，

求 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})/(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ 的值。

3．已知 $2a^2-5a+2>0$，化简 $2\sqrt{a^2-4a+4}+|2a-1|$。

4．已知 $x+y=a$，$x^2+y^2=b^2$，求 x^4+y^4 的值。

5．$\dfrac{x^2+2}{x(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}$ 是恒等式，求 $A、B、C$。

【习题】

1. 若 $6x^4-7x^3-4x^2+5x+3$ 除以 $p(x)$，得商式是 $2x^2-3x+1$，余式是 $-2x+5$，试求 $p(x)$。

2. 化简 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\Big/\left(1-\frac{2a^2}{a^2-b^2}\right)$。

3. 如果 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求 $3x^2-13xy+3y^2$的值。

4. 当 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)(a>0,b>0)$时，

求 $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ 的值。

5. 已知方程 $4x^2-2ax+2a-3=0$ 无实根，化简 $\sqrt{4a^2-12a+9}+\sqrt{a^2+12a+36}$。

6. 化简$\left(\sqrt{a}+\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\div\left(\frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)$

7. 三角形三边为 x^2+x-1，x^2-1，$2x+1$，且 $x>1$，求最大角。

8. 已知 $\frac{x}{18}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{3}$，（1）求证 $x=-3y+z$；

（2）求 $(x+y+z)/z$ 的值；（3）且 $y+z=4$，求 x、y、z 的值。

9. 已知 $a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值。

10. 若 $\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$，求 $a:b:c$。

§1.2 因式分解和代数等式的证明

一 因式分解 把一个多项式化为几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解。

分解因式要根据指明的数集进行，直到不能分解为止。

1. 因式分解的常用分法有：提取公因式法，应用公式法，分组分解法。二次三项式还常用十字相乘法、配方法和求根公式法。

2. 因式分解的一般步骤

（1）若有公因式，先提取；

（2）若没有公因式，看能不能应用公式来分解；

（3）如果是二次三项式，可用十字相乘法、求根法或配方法；

（4）如果上述方法都不能分解，就适当变形分组，使之能用上述方法。

例 1 分解因式：

（1）$(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$；

（2）$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$。

解 （1）原式$=x^4-2x^3y-y^4+2xy^3$

$=(x^4-y^4)-(2x^3y-2xy^3)$

$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)-2xy(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(x^2+y^2-2xy)$

$=(x+y)(x-y)^3$。

（2）原式$=xy(x-y)+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2$

$=xy(x-y)-z(x^2-y^2)+z^2(x-y)$

$=(x-y)[z^2-(x+y)z+xy]$

$=(x-y)(z-x)(z-y)$。

说明 从上例看到，如果不能直接进行分解，需要展开后适当分组。

例 2 分解因式

（1）$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2$；

（2）$(x+1)^4+(x^2-1)^2+(x-1)^4$（在复数集合内）

解 （1）

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=(a^4-2a^2b^2+b^4)-2c^2(a^2-b^2)+c^4-4b^2c^2\\
&=(a^2-b^2)^2-2c^2(a^2-b^2)+(c^2)^2-(2bc)^2\\
&=(a^2-b^2-c^2)^2-(2bc)^2\\
&=(a^2-b^2-c^2-2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc)\\
&=[a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]\\
&=(a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).
\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}
\text{原式}&=[(x+1)^2]^2+2(x+1)^2(x-1)^2\\
&\quad+[(x-1)^2]^2-(x^2-1)^2\\
&=[(x+1)^2+(x-1)^2]^2-(x^2-1)^2\\
&=[(x+1)^2+(x-1)^2+(x^2-1)][(x+1)^2\\
&\quad+(x-1)^2-(x^2-1)]\\
&=(3x^2+1)(x^2+3)\\
&=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)(x+\sqrt{3}\,i)(x-\sqrt{3}\,i).
\end{aligned}$$

说明 在变形分组时，有些题目需要拆项或添项（注意保持恒等）.

例 3 分解因式 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$。

解一 原式$=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$

把它看成关于 x 的二次三项式，求其根得

$$x_1=\frac{3y-1}{2},\qquad x_2=\frac{3-y}{2}.$$

所以　　$原式=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)\left(x-\frac{3-y}{2}\right)$

$$=(2x-3y+1)(2y+y-3).$$

解二　应用两次十字相乘

$$原式=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)\qquad \begin{array}{l}3y \diagdown\!\!\!\!\diagup -1\\ y \qquad -3\end{array}$$

$$=4x^2-4(y+1)x-(3y-1)(y-3)\qquad \begin{array}{l}2x \diagdown\!\!\!\!\diagup -(3y-1)\\ 2x \qquad y-3\end{array}$$

$$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$$

例 4　试证任意四个连续整数之积加 1 是完全平方数.

证　设四个连续整数为 $x-1$，x，$x+1$，$x+2$，则

$$(x-1)x(x+1)(x+2)+1$$
$$=[(x-1)(x+2)][x(x+1)]+1$$
$$=(x^2+x-2)(x^2+x)+1$$
$$=(x^2+x)^2-2(x^2+x)+1=(x^2+x-1)^2.$$

因 x 为整数，所以 (x^2+x-1) 也是整数，这就证明了任意四个连续整数之积加 1 是完全平方数.

二　代数等式的证明

代数等式可分为恒等式和条件等式. 代数等式常用的变形有：

整式的恒等变形：利用乘法公式和因式分解；

分式的恒等变形：利用约分和通分.

根式的恒等变形：利用分母（有时是分子）有理化，$\sqrt{p\pm2\sqrt{q}}$ 的化简等.

例 1　求证 $a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$.

证　∵ $a^4+b^4+(a+b)^4$

$$=[(a^2+b^2)^2-2a^2b^2]+(a+b)^4$$

$$=[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2+(a+b)^4$$
$$=2[(a+b)^4-2ab(a+b)^2+a^2b^2]$$
$$=2[(a+b)^2-ab]^2=2(a^2+ab+b^2)^2$$

例 2 若 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$，试证 $x+y+z=0$

证 令 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}=k$，则

$$x=k(a-b),\quad y=k(b-c),\quad z=k(c-a).$$

$$\therefore\quad x+y+z=k(a-b)+k(b-c)+k(c-a)$$
$$=k(a-b+b-c+c-a)=0$$

例 3 设 $a+b+c=0$，且 $abc\neq0$，求证

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3.$$

分析 证明条件等式，一般应充分利用已知条件，尽可能减少字母个数，由 $a+b+c=0$ 可得 $c=-a-b$，代入原式化简。

证一 由 $a+b+c=0$，得 $c=-a-b$ 代入原式。

$$原式=a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)+b\left(\frac{-1}{a+b}+\frac{1}{a}\right)-(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{a^2}{b(a+b)}+\frac{b^2}{a(a+b)}-\frac{(a+b)^2}{ab}$$

$$=\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{ab(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2-(a+b)^2}{ab}$$

$$=\frac{-3ab}{ab}=-3.$$

证二 $\because\ abc\neq0$，$\therefore\ a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$，于是得

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=-1,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{b}=-1,\quad \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=-1.$$

$$原式=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$

$$=(\frac{b}{a}+\frac{c}{a})+(\frac{a}{b}+\frac{c}{b})+(\frac{a}{c}+\frac{b}{c})$$

$$=-1-1-1=-3$$

证三 $$原式=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab}$$

$$=\frac{a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+ac^2}{abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(bc+ca+ab)-3abc}{abc}$$

$$=\frac{-3abc}{abc}=-3.$$

证四 $\because\ a+b+c=0$，$\therefore\ b+c=-a$，

$c+a=-b$，　　$a+b=-c$。

$$原式=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3.$$

证五 $\because\ a+b+c=0$，把它代入原式变形后的式子，

$$原式=a(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a})$$

$$+c(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-3$$

$$=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-3=0-3=-3.$$

【练习】

1．在有理数集合内分解下列各式：

（1）$xy^3(a+1)+x^3y(a+1)$；（2）a^4-16b^4。

2．（1）用十字相乘法分解 $m^2-7mn+10n^2$；

（2）用配方法分解 $6x^2-7x-3$；

（3）用求根公式法分解 $2x^2+xy-y^2-3x+3y-2$。

3．若 $ad=bc$，求证

$$(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)=ad(a+b+c+d)^2.$$

4．若 a、b、c 为实数，且 $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$，求证 $a=b=c$。

5．当 k 是什么数时二次多项式 $kx^2+xy-y^2-3x+3y-2$ 能分解成两个一次因式？

【习题】

1．在实数集合内分解因式：

（1）$a^2+b^2-c^2-d^2-2ab-2cd$；

（2）$(p^2+q^2)^2-4p^2q^2$；

（3）$a^5-a^3-a^2+1$；

（4）$x^{n+5}+9x^{n+3}-162x^{n+1}$ $(n\in N)$；

（5）$2x^2+5xy-3y^2-3x+5y-2$；

（6）$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$。

2．在复数集合内分解下列各多项式的因式：

（1）x^4-4x^2+3；（2）$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$；

（3）x^3-4x^2+2x-8；（4）$x^4+2x^3-8x-16$；

3．分解因式：

（1）$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$；

（2）$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$。

4．（1）证明 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$$=x(x+5)(x^2+5x+10).$$

（2）已知 $x+y=a$，$x^2+y^2=b^2$，$x^3+y^3=c^3$，求证 $2c^3=a(3b^2-a^2)$。

5．已知 $a^{-1}+b^{-1}=c^{-1}$，求证 $a^2+b^2+c^2=(a+b-c)^2$。