

No. 13



网壳结构的力学模型

胡学仁

# 网壳结构的力学模型\*

胡学仁

(同济大学)

## 提 要

本文论述网壳结构的力学模型,提出把空间杆系网壳化算为连续体当量薄壳的一般原理。网壳的特殊性质用广义虎克定理来描述,其物理系数可以从网格单元与当量薄壳单元变形能相等的原则推导得到。不同形式的网格具有各自的物理属性,一般情况下都具有方向性,它是一种各向异性薄壳。文中推导了工程中应用较多的正三角形网格的物理系数,并与国外流行的化算理论作比较,最后论述了扁网壳的基本微分方程。

## 一、概 述

曲面形式的网架(以下称网壳)在当前是值得倡导的,它不仅可以使建筑形体丰富多采,而且也节省材料,无论从金属结构制造工艺和轻型屋面材料而论,都认为具备建造条件。大型计算机的应用对介算象网壳一类的高次超静定杆系结构的强度问题已是轻而易举的事,网壳的稳定问题等也已是不难解决。网壳结构具

---

\*该文于1984.7在太原召开的第二届空间结构学术讨论会上宣读并收入论文集。

有较好的刚度，对抵抗集中荷载和振动荷载有明显的优点。

100m左右直径跨度的穹顶网壳，结构层高度通常是1m左右，50m直径跨度的穹顶网壳采用单层钢管结构也为屡见不鲜。优越的结构却使设计师对网壳的档定性和构造方面过份疏忽，以致有1963年布加勒斯特一个直径跨度为93m的单层钢管网壳在大雪下失稳破坏，这已经成为历史教训。

网壳作为杆件系统的计算是精确的计算方法。其节点属于具有三个线变位和三个角变位的空间刚性节点。相应于这种结构的杆件不但承受轴心力，还有扭矩和截面二主轴方向的剪力和弯矩。实际的网壳结构由于构造原因或者简化计算的需要，常常采用部份铰接的假定。但是采用完全空间铰接的假定，对实际工程中的单层网壳来说也常常是不合理的，不仅因为有些空间桁架是属于瞬变体系，而且空间桁架的计算模型不能反映网壳的实际内力分布规律。实验证明，网壳曲面具有连续的挠曲变形，因此在垂直壳面方向，节点必须考虑能传递弯矩。在网壳曲面内，大多数网格单元是几何不变体，因此象平面桁架一样，可以认为网壳在其曲面上为铰接。网壳的节点考虑为具有壳面法线方向的柱状铰的力学模型比较合理。这些观点，可以从文献〔1〕、〔2〕、〔4〕等的论述中找到，至于网格单元有的在壳面内成几何可变体，则构造上采用刚接，并应用相应的计算方法比较合适〔5〕。

网壳作为连续体的力学模型是近似计算。但网壳的整体变形犹如薄壳，用广义虎克定理可以描述其主要特性，并采用目前比较成熟的板壳理论，能宏观地研究网壳主要的力学性能，诸如网壳的内力变位、稳定性和震动等。有些问题，用杆系来分析目前

在实际工程中还有一定困难，应用并不普遍。

## 二、网壳化算为连续体薄壳的基本方程

### 1. 网壳力学模型的基本假定

- (1) 网壳的网格是足够细密、均匀和有规律的。
- (2) 网壳单元体被一个与该单元体所属面积相等并代表其物理性状的连续体来代换，用广义虎克定理来描述，并用变形能相等的原则进行换算的；
- (3) 网壳结构的节点采用垂直壳面为柱状铰接的假定；
- (4) 网壳结构的内力是假定沿着单元体而变化，按每单元体所属面积中心的内力表示该连续体的受力，同时把连续分布的内力集中作用在该单元的节点上。

### 2. 广义虎克定理在网壳模型中的应用

图 1 a 所示壳体中，壳中面单位宽度的内力为  $n_\alpha$ 、 $n_\beta$  和  $n_{\alpha\beta}$ ，其相应的变位为  $\varepsilon_\alpha$ 、 $\varepsilon_\beta$  和  $\gamma_{\alpha\beta}$ 。采用广义虎克定理一般表达式为

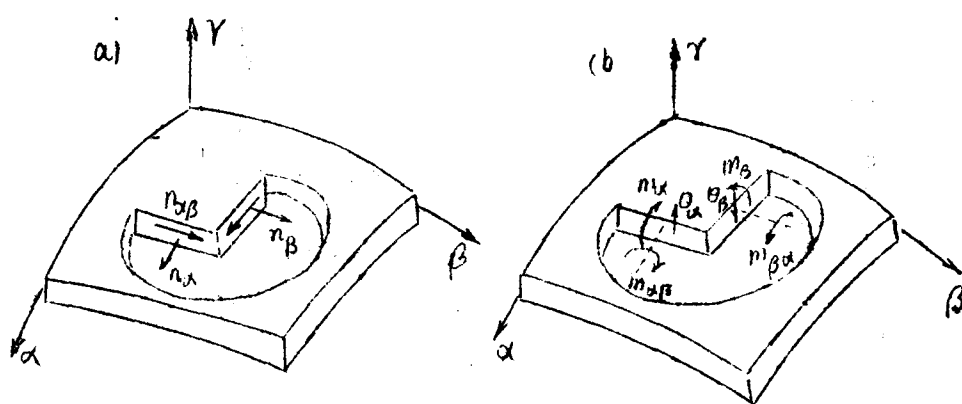


图 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\alpha} = a_{\alpha}^{\alpha} n_{\alpha} + a_{\alpha}^{\beta} n_{\beta} + a_{\alpha}^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\beta} = a_{\beta}^{\alpha} n_{\alpha} + a_{\beta}^{\beta} n_{\beta} + a_{\beta}^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{\alpha} n_{\alpha} + a_{\alpha\beta}^{\beta} n_{\beta} + a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (1c)$$

式中,  $a_{\alpha}^{\alpha}$ ,  $a_{\alpha}^{\beta}$ ,  $a_{\alpha}^{\alpha\beta}$ ,  $a_{\beta}^{\alpha}$ ,  $a_{\beta}^{\beta}$ ,  $a_{\beta}^{\alpha\beta}$ ,  $a_{\alpha\beta}^{\alpha}$ ,  $a_{\alpha\beta}^{\beta}$  和

$a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$  分别为壳体抵抗薄膜应力时的柔度系数。根据 E. Betti 功的互等定理则有,

$$a_{\alpha}^{\beta} = a_{\beta}^{\alpha}, \quad a_{\alpha}^{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{\alpha}, \quad a_{\beta}^{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{\beta} \quad (2)$$

图 1 b 所示的壳体中, 壳面单位宽度的力矩为  $m_{\alpha}$ ,  $m_{\beta}$  和扭矩  $m_{\alpha\beta}$ , 其相应的曲率为  $x_{\alpha}$ ,  $x_{\beta}$  和  $x_{\alpha\beta}$ 。广义虎克定理表达式为

$$m_{\alpha} = -D_{\alpha}^{\alpha} x_{\alpha} - D_{\alpha}^{\beta} x_{\beta} - D_{\alpha}^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} \quad (3a)$$

$$m_{\beta} = -D_{\beta}^{\alpha} x_{\alpha} - D_{\beta}^{\beta} x_{\beta} - D_{\beta}^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} \quad (3b)$$

$$m_{\alpha\beta} = +D_{\alpha\beta}^{\alpha} x_{\alpha} + D_{\alpha\beta}^{\beta} x_{\beta} + D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} \quad (3c)$$

式中,  $D_{\alpha}^{\alpha}$ ,  $D_{\alpha}^{\beta}$ ,  $D_{\alpha}^{\alpha\beta}$ ,  $D_{\beta}^{\alpha}$ ,  $D_{\beta}^{\beta}$ ,  $D_{\beta}^{\alpha\beta}$ ,  $D_{\alpha\beta}^{\alpha}$ ,  $D_{\alpha\beta}^{\beta}$  和

$D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$  为壳体抵抗弯曲与扭曲变形的刚度系数, 根据 E. Betti 功的互等定理, 则有

$$D_{\alpha}^{\beta} = D_{\beta}^{\alpha}, \quad D_{\alpha}^{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}^{\alpha}, \quad D_{\beta}^{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}^{\beta} \quad (4)$$

把薄膜变形的物理方程采用应力表达式, 并引入薄壳在  $\alpha$ ,  $\beta$

方向抵抗薄膜变形的当量厚度  $t_{m\alpha}$ ,  $t_{m\beta}$  和  $t_{m\alpha\beta}$ , 则式(1)可  
 写为

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{n_{\alpha}}{t_{m\alpha} E_{\alpha\alpha}} - \frac{v_{\alpha}^{\beta} n_{\beta}}{t_{m\beta} E_{\alpha\alpha}} + \frac{\eta_{\alpha}^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta}}{t_{m\alpha\beta} E_{\alpha\alpha}} \quad (5a)$$

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{-v_{\beta}^{\alpha} n_{\alpha}}{t_{m\alpha} E_{\beta\beta}} + \frac{n_{\beta}}{t_{m\beta} E_{\beta\beta}} + \frac{\eta_{\beta}^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta}}{t_{m\alpha\beta} E_{\beta\beta}} \quad (5b)$$

$$\gamma = \frac{\eta_{\alpha}^{\alpha} n_{\alpha}}{t_{m\alpha} G_{\alpha\beta}} + \frac{\eta_{\beta}^{\beta} n_{\beta}}{t_{m\beta} G_{\alpha\beta}} + \frac{n_{\alpha\beta}}{t_{m\alpha\beta} G_{\alpha\beta}} \quad (5c)$$

上式中,  $E_{\alpha\alpha}$ ,  $E_{\beta\beta}$  为截面上法向应力作用下的杨氏系数

$G_{\alpha\beta}$  为截面上剪切应力作用下的变形模量

$v_{\alpha}^{\beta}$ ,  $v_{\beta}^{\alpha}$  为泊桑比

$\eta_{\alpha}^{\alpha\beta}$ ,  $\eta_{\beta}^{\alpha\beta}$ ,  $\eta_{\alpha\beta}^{\alpha}$ ,  $\eta_{\alpha\beta}^{\beta}$  为剪应力对法向变形或法向  
 应力对剪应变的影响系数, 又称秦曹夫系数〔6〕

比较(5)和(1)式, 得出如下关系式

$$E_{\alpha\alpha} = \frac{1}{a_{\alpha}^{\alpha} t_{m\alpha}}, \quad E_{\beta\beta} = \frac{1}{a_{\beta}^{\beta} t_{m\beta}}, \quad G = \frac{1}{a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} t_{m\alpha\beta}} \quad (6a)$$

$$v_{\alpha}^{\beta} = \frac{-a_{\alpha}^{\beta} t_{m\beta}}{a_{\alpha}^{\alpha} t_{m\alpha}}, \quad v_{\beta}^{\alpha} = \frac{-a_{\beta}^{\alpha} t_{m\alpha}}{a_{\beta}^{\beta} t_{m\beta}} \quad (6b)$$

$$\eta_{\alpha}^{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha}^{\alpha\beta} t_{m\alpha\beta}}{a_{\alpha}^{\alpha} t_{m\alpha}}, \quad \eta_{\beta}^{\alpha\beta} = \frac{a_{\beta}^{\alpha\beta} t_{m\alpha\beta}}{a_{\beta}^{\beta} t_{m\beta}} \quad (6c)$$

### 3. 网壳表达为当量薄壳的物理系数

图 2 a 表示网壳中取出的一个单元, 它所需面积为长度 1 和  $h$  围成的矩形。杆件中的内力认为是作用在周边上的内力通过节点传递给杆件, 以节点的变形代表单元体的变形, 图 2 b 表示当量薄壳单元, 它在薄膜内力弯矩和扭矩作用下储藏的应变能为:

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^h (n_\alpha \varepsilon_\alpha + n_\beta \varepsilon_\beta + n_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} - m_\alpha x_\alpha - m_\beta x_\beta + m_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}) d\alpha d\beta$$

以(1)、(3)二式代入上式得出

$$\begin{aligned} \Delta U_1 = \frac{h1}{2} & (a_\alpha^\alpha n_\alpha^2 + a_\beta^\beta n_\beta^2 + a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta}^2 + 2a_\alpha^\beta n_\alpha n_\beta \\ & + 2a_\alpha^{\alpha\beta} n_\alpha n_{\alpha\beta} + 2a_\beta^{\alpha\beta} n_\beta n_{\alpha\beta} + D_\alpha^\alpha X_\alpha^2 + D_\beta^\beta X_\beta^2 \\ & + D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}^2 + 2D_\alpha^\beta X_\alpha X_\beta + 2D_\alpha^{\alpha\beta} X_\alpha X_{\alpha\beta} + 2D_\beta^{\alpha\beta} X_\beta X_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

在图 2 a 所示网格单元中, 各杆件储藏的应变能由杆中轴心力、弯矩和扭矩和其相应的变位乘积来表示, 其总和为

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i^2}{E_1 A_1} + E_1 I_1 X_1^2 + G_1 I_{\alpha 1} \bar{X}_1^2 \right) l_1 \quad (8)$$

上式中,  $X_1$ 、 $\bar{X}_1$  表示第 1 根杆件的曲率和扭率, 它与当量薄壳中的曲率  $X_\alpha$ 、 $X_\beta$  和扭率  $X_{\alpha\beta}$  具有如下关系, 式中  $\varphi_1$  为杆件 1 与座标轴  $\alpha$  的夹角。

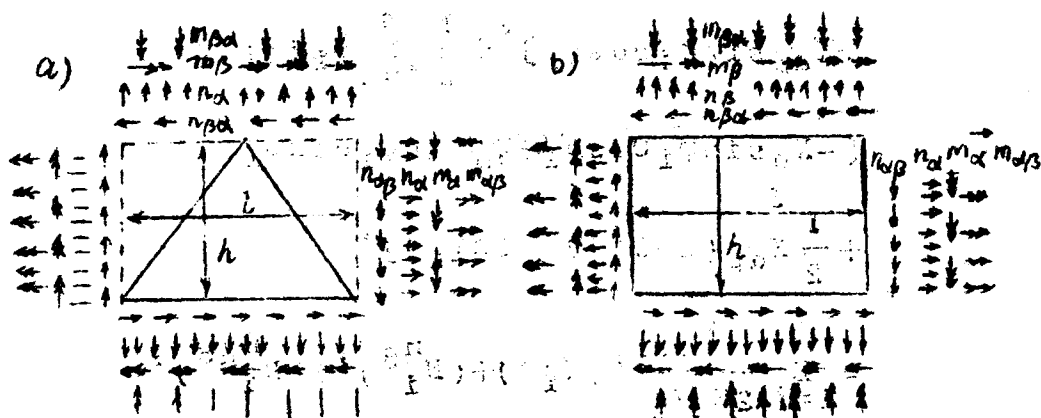


图 2

$$X_1 = X_a \cos^2 \varphi_1 + X_\beta \sin^2 \varphi_1 + X_{a\beta} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 = & -X_a \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + X_\beta \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \\ & + \frac{1}{2} (\cos \varphi_1 - \sin \varphi_1) X_{a\beta} \end{aligned} \quad (9b)$$

杆件中的轴心力由当量薄壳中内力  $n_\alpha$ 、 $n_\beta$  和  $n_{a\beta}$  组合得

到

$$N_1 = N_1^{n_\alpha} + N_1^{n_\beta} + N_1^{n_{a\beta}} \quad (10)$$

把(9)、(10)二式代入(8)式得出网格的总应变能

$$\begin{aligned} \Delta U_s = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E_i A_i} (N_1^{n_\alpha} + N_1^{n_\beta} + N_1^{n_{a\beta}})^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i I_i l_i (X_a \cos^2 \varphi_i + X_\beta \sin^2 \varphi_i \\ & - X_{a\beta} \sin \varphi_i \cos \varphi_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +X_{\alpha\beta}\sin\varphi_1\cos\varphi_1]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{G_i I_{d1} l_1}{E_i I_1} \\
& \cdot (-X_{\alpha}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + X_{\beta}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 \\
& + \frac{1}{2} X_{\alpha\beta}(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1))^2 \\
& = \sum_{i=1}^n \frac{l_1}{2E_i A_1} \{ (N_1^{n\alpha})^2 + (N_1^{n\beta})^2 + (N_1^{n\alpha\beta})^2 \\
& + 2(N_1^{n\alpha})(N_1^{n\beta}) + 2(N_1^{n\alpha})(N_1^{n\alpha\beta}) + 2(N_1^{n\beta})(N_1^{n\alpha\beta}) \} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{E_i I_1 l_1}{2} [ X_{\alpha}^2(\cos^4\varphi_1 \\
& + k\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_1) + X_{\beta}^2(\sin^4\varphi_1 + k\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_1) \\
& + X_{\alpha\beta}^2((1-\frac{k}{2})\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_1 + \frac{h}{4}\cos^4\varphi_1 \\
& + \frac{k}{4}\sin^4\varphi_1) + 2X_{\alpha}X_{\beta}(1-k)\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_1 \\
& + 2X_{\alpha}X_{\alpha\beta}(\frac{2-k}{2}\sin\varphi_1\cos^3\varphi_1 + \frac{k}{2}\sin^3\varphi_1\cos\varphi_1) \\
& + 2X_{\beta}X_{\alpha\beta}(\frac{2-k}{2}\sin^3\varphi_1\cos\varphi_1 + \frac{k}{2}\sin\varphi_1\cos^3\varphi_1) \\
& \dots\dots (11)
\end{aligned}$$

上式中,  $k = \frac{G_1 I_{d1}}{E_1 I_1}$ ;

应用  $\Delta U_1 = \Delta U_2$ , 并比较(7)和(11)式各项相应的系数, 得出

$$a_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n \frac{l_1}{E_1 A_1} (N_1^{\alpha=1})^2 \quad (12a)$$

$$a_{\beta}^{\beta} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n \frac{l_1}{E_1 A_1} (N_1^{\beta=1})^2 \quad (12b)$$

$$a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n \frac{l_1}{E_1 A_1} (N_1^{\alpha\beta=1})^2 \quad (12c)$$

$$a_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n \frac{l_1}{E_1 A_1} (N_1^{\alpha=1})(N_1^{\beta=1}) \quad (12d)$$

$$a_{\alpha}^{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n \frac{l_1}{E_1 A_1} (N_1^{\alpha=1})(N_1^{\alpha\beta=1}) \quad (12e)$$

$$a_{\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n \frac{l_1}{E_1 A_1} (N_1^{\beta=1})(N_1^{\alpha\beta=1}) \quad (12f)$$

$$D_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n l_1 E_1 I_1 (\cos^4 \varphi_1 + k \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1) \quad (13a)$$

$$D_{\beta}^{\beta} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n l_1 E_1 I_1 (\sin^4 \varphi_1 + k \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1) \quad (13b)$$

$$D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n l_1 E_1 I_1 \left( \frac{2-k}{2} \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 + \frac{k}{4} \cos^4 \varphi_1 + \frac{k}{4} \sin^4 \varphi_1 \right) \quad (13c)$$

$$D_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n l_1 E_1 I_1 (1-k) \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \quad (13d)$$

$$D_{\alpha}^{\alpha\beta} = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^n l_i E_i I_i \left( \frac{2-k}{2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \right. \\ \left. + \frac{k}{2} \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 \right) \quad (13e)$$

$$D_{\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^n l_i E_i I_i \left( -\frac{2-k}{2} \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \right. \\ \left. + \frac{k}{2} \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 \right) \quad (13f)$$

把(12)、(13)二式的系数代入(1)、(3)式,即为网壳的物理方程。

#### 4. 网壳任意方向的物理性质

网壳的物理性质在一个确定的坐标系中是由(12)、(13)各式的系数决定。一般情况下,网壳在任意方向的物理性质是不同的。设网壳在 $\alpha$ 、 $\beta$ 坐标系中的物理性质为已知,则坐标轴转动 $\varphi$ 角的新坐标系 $\alpha'$ 、 $\beta'$ 中的物理性质,可以通过二个坐标系中对于一个单元具有相等的应变能的原理来确定,这一原则首先由勒夫[7]提出的,网壳中也完全适用。新坐标系 $\alpha'\beta'$ 中的物理系数为

$$a_{\alpha'}^{\alpha'} = a_{\alpha}^{\alpha} \cos^4 \varphi + (2a_{\alpha}^{\beta} + a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a_{\beta}^{\beta} \sin^4 \varphi \\ + (a_{\alpha}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi + a_{\beta}^{\alpha\beta} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi \quad (14a)$$

$$a_{\beta'}^{\beta'} = a_{\alpha}^{\alpha} \sin^4 \varphi + (2a_{\alpha}^{\beta} + a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a_{\beta}^{\beta} \cos^4 \varphi \\ - (a_{\alpha}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi + a_{\beta}^{\alpha\beta} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi \quad (14b)$$

$$a_{\alpha}^{\beta'} = a_{\alpha}^{\beta} + (a_{\alpha}^{\alpha} + a_{\beta}^{\beta} - 2a_{\alpha}^{\beta} - a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ + \frac{1}{2} (a_{\beta}^{\alpha\beta} - a_{\alpha}^{\alpha\beta}) \sin 2\varphi \cos \varphi \quad (14c)$$

$$a_{\alpha}^{\alpha'\beta'} = a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + 4(a_{\alpha}^{\alpha} + a_{\beta}^{\beta} - 2a_{\alpha}^{\beta} - a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ + 2(a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - a_{\alpha}^{\alpha\beta}) \sin 2\varphi \cos 2\varphi \quad (14d)$$

$$a_{\alpha}^{\alpha'\beta'} = (a_{\beta}^{\beta} \sin^2 \varphi - a_{\alpha}^{\alpha} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} (2a_{\alpha}^{\beta} + a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \cos 2\varphi) \\ \sin 2\varphi + a_{\alpha}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) \\ + a_{\beta}^{\alpha\beta} \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (14e)$$

$$a_{\beta}^{\alpha'\beta'} = (a_{\beta}^{\beta} \cos^2 \varphi - a_{\alpha}^{\alpha} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (2a_{\alpha}^{\beta} + a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \cos 2\varphi) \\ \sin 2\varphi + a_{\alpha}^{\alpha\beta} \sin \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ + a_{\beta}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) \quad (14f)$$

$$D_{\alpha}^{\alpha'} = D_{\alpha}^{\alpha} \cos^4 \varphi + 2(D_{\alpha}^{\beta} + 2D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ + D_{\beta}^{\beta} \sin^4 \varphi + 2(D_{\alpha}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi + D_{\beta}^{\alpha\beta} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi \\ \dots\dots (15a)$$

$$D_{\beta}^{\beta'} = D_{\alpha}^{\alpha} \sin^4 \varphi + 2(D_{\alpha}^{\beta} + 2D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ + D_{\beta}^{\beta} \cos^4 \varphi - 2(D_{\beta}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi + D_{\alpha}^{\alpha\beta} \sin^2 \varphi) \\ \sin 2\varphi \quad (15b)$$

$$D_{\alpha'}^{\beta'} = D_{\alpha}^{\beta} + (D_{\alpha}^{\alpha} + D_{\beta}^{\beta} - 2D_{\alpha}^{\beta} + 4D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ + (D_{\beta}^{\alpha\beta} - D_{\alpha}^{\beta}) \sin 2\varphi \cos 2\varphi \quad (15c)$$

$$D_{\alpha'}^{\alpha'\beta'} = D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + (D_{\alpha}^{\alpha} + D_{\beta}^{\beta} - 2D_{\alpha}^{\beta} - 4D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ + (D_{\beta}^{\alpha\beta} - D_{\alpha}^{\alpha\beta}) \sin 2\varphi \cos 2\varphi \quad (15d)$$

$$D_{\alpha'}^{\alpha'\beta'} = \frac{1}{2} \{ D_{\beta}^{\beta} \sin^2 \varphi - D_{\alpha}^{\alpha} \cos^2 \varphi + (D_{\alpha}^{\beta} + 2D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \cos 2\varphi \} \\ \sin 2\varphi + D_{\alpha}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi) \\ + D_{\beta}^{\alpha\beta} \sin^2 \varphi (3\cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi) \quad (15e)$$

$$D_{\beta'}^{\alpha'\beta'} = \frac{1}{2} \{ D_{\beta}^{\beta} \cos^2 \varphi - D_{\alpha}^{\alpha} \sin^2 \varphi - (D_{\alpha}^{\beta} + 2D_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}) \\ \cos 2\varphi \} \sin^2 \varphi + D_{\alpha}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi (3\cos^2 \varphi - \\ - \sin^2 \varphi) + D_{\beta}^{\alpha\beta} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi) \\ \dots\dots (15f)$$

### 三. 正三角形网格的物理系数

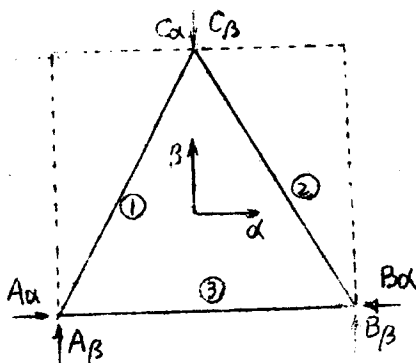


表 1

| 连续体内力                 | 网格单元体节点<br>荷 载                                                                          | 杆 件 内 力               |                       |                         |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
|                       |                                                                                         | $N_1$                 | $N_2$                 | $N_3$                   |
| $n_\alpha = 1$        | $A_\alpha = B_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} l n_\alpha$<br>$C_\alpha = 0$                 | 0                     | 0                     | $-\frac{\sqrt{3}}{2} l$ |
| $n_\beta = 1$         | $C_\beta = n_\beta l$<br>$A_\beta = B_\beta = \frac{1}{2} n_\beta$                      | $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{3}}$   |
| $n_{\alpha\beta} = 1$ | $C_\alpha = n_{\alpha\beta} l$<br>$-A_\alpha = B_\alpha = -\frac{n_{\alpha\beta}}{2} l$ | 1                     | -1                    | 0                       |

在图 3 所示的一个正三角形网格单元中, 虚线表示所属连续体的区域。在各种内力  $n_\alpha$ 、 $n_\beta$  和  $n_{\alpha\beta}$  作用下, 节点上的作用力和杆力见表 1, 应用式 (12) 各式, 得出网壳薄膜变形的物理系数, 并代入 (1) 式得出:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{3} l}{2 EA} n_\alpha - \frac{l l}{2\sqrt{3} EA} n_\beta \quad (16a)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{-l l}{2\sqrt{3} EA} n_\alpha + \frac{\sqrt{3} l}{2 EA} n_\beta \quad (16b)$$

$$\gamma = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{l}{EA} n_{\alpha\beta} \quad (16c)$$

进一步分析网格的物理特性，可以应用 (6a) 式。如假定网壳在抵抗薄膜变形时具有相同的当量厚度， $t_{m\alpha} = t_{m\beta} = t_{m\alpha\beta} = t_m$ ，则可得到如下当量弹性系数

$$E_{\alpha\alpha} = E_{\beta\beta} = \frac{2EA}{\sqrt{3} l t_m} \quad (17a)$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EA}{l t_m} \quad (17b)$$

$$\nu_{\alpha\beta} = \nu_{\beta\alpha} = 1/3 \quad (17c)$$

$$\eta_{\alpha}^{\alpha\beta} = \eta_{\beta}^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}^{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}^{\beta} = 0 \quad (17d)$$

这一方法首先是由松下富士雄 [8] 提出的所谓弹性等价板，可惜他当时提出的系数均比 (17) 式的系数小一倍。文 [10] 已应用 (17) 各式。

另一种方法可以认为结构材料的物理常数不变，在 (6a) 式认为  $E_{\alpha\alpha} = E_{\beta\beta} = E$ ， $G_{\alpha\beta} = G$ ，而以各方向的当量厚度来表示网壳的特性，由 (6a) 得出：

$$t_{m\alpha} = t_{m\beta} = t_{m\alpha\beta} = \frac{2A}{\sqrt{3} l} \quad (18a)$$

$$\nu_{\alpha\beta} = \nu_{\beta\alpha} = 1/3 \quad (18b)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3}{8} E \quad (18c)$$

这一方法首先由 F. D. Pozo [9] 提出的，可是他得出的是  $\alpha$ 、 $\beta$  二方向不同的当量厚度和不同的弹性常数，因此成为一个

各向异性体。现都用(18)各式。

关于三角形网格对抵抗薄膜变形在任意方向的物理性质，可以把(16)各式中的系数代入(14)各式中，发现(16)式的各项系数与转角 $\varphi$ 无关，因此证实正三角形网格对抵抗薄膜变形是一种各向同性体。关于(16)、(18)各式中的系数以及作为各向同性体薄壳的计算方法现在都已澄清，并在结构设计中广泛应用(12)。

三角形网格抵抗弯曲和扭曲的性能，可应用(13)各式求得所有物理系数，并代入(3)式，得出网格对弯曲和扭曲的物理方程。

$$m_{\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{41} (3EI + GI_{\alpha}) \left\{ X_{\alpha} + \frac{EI - GI_d}{3EI + GI_d} X_{\beta} \right\} \quad (19a)$$

$$m_{\beta} = -\frac{\sqrt{3}}{41} (3EI + GI_{\alpha}) \left\{ \frac{EI - GI_d}{3EI + GI_d} X_{\alpha} + X_{\beta} \right\} \quad (19b)$$

$$m_{\alpha\beta} = +\frac{\sqrt{3}}{41} (EI + GI_d) X_{\alpha\beta} \quad (19c)$$

(19)式可以与各向同性板壳的弯曲和扭曲物理方程相比拟，得出

$$D = \frac{\sqrt{3}}{41} (3EI + GI_d) \quad (20a)$$

$$v_b = \frac{EI - GI_d}{3EI + GI_d} \quad (20b)$$

上式中， $D$ 为当量薄壳的圆柱刚度；

$v_b$ 为当量薄壳抵抗弯曲和扭曲时的泊桑比。

引入当量薄壳在  $\alpha$ 、 $\beta$  方向的抗弯当量厚度  $t_{ba}$  和  $t_{b\beta}$ ，以及抗扭曲的当量厚度  $t_{ba\beta}$ ，并近似采用薄膜变形时的  $G$  和  $E$  的关系式 (18c)\*1 得出：

$$t_{ba} = t_{b\beta} = (24\sqrt{3})^{1/3} \left\{ \frac{I(8I+3I_d)}{1(24I+3I_d)} \right\}^{1/3} \quad (21a)$$

$$t_{ba\beta} = (3)^{1/6} \left\{ \frac{8I+3I_d}{1} \right\}^{1/3} \quad (21b)$$

(21) 式表示抗弯和抗扭的当量厚度不同，二者 之比值

$$\frac{t_{ba\beta}}{t_{ba}} = \frac{t_{ba\beta}}{t_{b\beta}} = \left( \frac{1}{24} \right)^{1/3} \left\{ \frac{I(8I+3I_d)}{1(24I+3I_d)} \right\}^{1/3} \quad \dots\dots (22)$$

从 (22) 式得知：抗扭当量厚度  $t_{ba\beta}$  略大于抗弯当量厚度  $t_{ba}$  或  $t_{b\beta}$ 。对园管截面，其比值为 1.077，因此其比值可近似取用 1.0，并以  $t_{ba}$  或  $t_{b\beta}$  作为统一的当量厚度，由 (20)、(21) 式得出园管截面特性：

$$D = 1.62 \frac{EI}{1}, \quad v_b = \frac{1}{15},$$

$$t_b' = 11.2\sqrt{3} \frac{I}{1} \quad *2 \quad (23)$$

\* 1 本文取  $G/E = 3/8$ ，也可以取用  $4/10$ 。

\* 2 Berchert [11] 得出的当量厚度为  $t_b' = 9\sqrt{3} \frac{I}{1}$ ，且

[11]、[12] 引用中均有误。