数学

二轮冲刺
优化讲练

精练本

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

学校：__________

班级：__________

姓名：__________

专题 1　函数的综合应用

1－1　用函数的性质解题

1. 已知函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 与 $y=\log_b x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 a、b 的关系为　（　　）

　A. $a>1>b>0$　　B. $b>1>a>0$　　C. $a=b$　　D. $ab=1$

2. 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，$f(x)=-f(x+1)$，且在 $[0,1]$ 上单调递减，则　（　　）

　A. $f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{7}{3}\right)<f\left(\frac{7}{5}\right)$　　B. $f\left(\frac{7}{5}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{7}{3}\right)$

　C. $f\left(\frac{7}{3}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{7}{5}\right)$　　D. $f\left(\frac{7}{5}\right)<f\left(\frac{7}{3}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

3. 已知 $f(x^2+1)=x^4+x^2-6$，则 $f(x)$ 在定义域内的最小值是　（　　）

　A. $f(0)$　　B. $f(1)-\frac{1}{4}$　　C. $f(1)+\frac{1}{4}$　　D. $f(1)$

4. 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上周期为 3 的奇函数，且 $f(1)=2$，则 $f(2)+f(3)=$ ________.

5. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（a,b,c 为实数）满足 $f(1)=1$，$f(-1)=0$，并且对于任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f(x)\geqslant x$.

　(1) 求 $f(x)$ 的表达式；

　(2) 设 $F(x)=\begin{cases}\sqrt{f(x)}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\sqrt{f(x)}, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$ 解不等式 $F(x)>F(-x)+2x$.

6. 已知 $f(x)=2^x-1$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，$g(x)=\log_4(3x+1)$.

　(1) 若 $f^{-1}(x)\leqslant g(x)$，求 x 的取值范围 D；

　(2) 设函数 $H(x)=g(x)-\frac{1}{2}f^{-1}(x)$，当 $x\in D$ 时，求函数 $H(x)$ 的值域.

7. 设函数 $y=f(x)$，且 $\lg(\lg y)=\lg(3x)+\lg(3-x)$.

　(1) 求 $f(x)$ 的解析式及定义域；

　(2) 求 $f(x)$ 的值域；

　(3) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

8. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+ax$.

　(1) 试证明：当 $a\in[0,+\infty)$ 时，$y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数；

　(2) 当 $a\in(-1,0)$ 时，$y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是否单调？请说明理由.

1－2　函数的综合运用

1. 已知满足下列条件的函数 $f(x)$ 的集合为 M：当 $|x_1|<1$，$|x_2|\leqslant 1$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$. 若有函数 $g(x)=x^2+2x-1$，则 $g(x)$ 与 M 的关系是（　　）

A. $g(x)\subset M$　　B. $g(x)\in M$　　C. $g(x)\notin M$　　D. 不能确定

2. 已知函数 $f(x)=a^x-\frac{5}{2}a+6$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象经过点 $(5,2)$，且在区间 $\left(\frac{23}{4},+\infty\right)$ 上恒有 $f^{-1}(x)<0$，则实数 a 的值是（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2 或 $\frac{1}{2}$　　D. 不存在

3. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 为增函数，偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象重合. 设 $a>b>0$，给出下列不等式：① $f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$；② $f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$；③ $f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$；④ $f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$.

其中正确不等式的序号是（　　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ①④　　D. ②③

4. 函数 $f(x)=\lg(1+x^2)$，$g(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1,\\ 0, & |x|\leqslant 1,\\ -x+2, & x>1,\end{cases}$　$h(x)=\operatorname{tg}2x$ 中，________ 是偶函数.

5. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$.

(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

6. 是否存在实数 a,b,c，使函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图象过点 $M(-1,0)$，且满足条件：对一切 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$？

7. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+b^2+b+1\ (a,b\in\mathbf{R})$，对任意的实数 x 都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立，若当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，求 a 的值及 b 的取值范围.

8. 若 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{x^2-2})$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$.

(1) 求函数 $f^{-1}(x)$；

(2) 设 $g(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}f^{-1}(-n+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2})$，$n\in\mathbf{N}_+$，若对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，都有 $g(n)<\frac{a^n+a^{-n}}{2}\ (a>0$，且 $a\neq 1)$，求实数 a 的取值范围.

1－3　如何进行函数证明

1. (1) 已知 $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\left[\frac{1}{10},10\right]$,试研究 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $|\lg a-\lg b|\leqslant 1$,求证:$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant 10\frac{1}{10}$.

2. 已知 $h(x)=\sqrt{1+x}+1$, $f(x)=(a+b)^x-a^x-b^x$,其中 a,b 为正实数,$a\neq 1$, $b\neq 1$, $a\neq b$,且 $ab=4$.

(1) 求 $h(x)$ 的反函数 $g(x)$;

(2) 对于任意 $n\in\mathbf{N}$,且 $n\geqslant 3$,求证:$f(n)>g(2^n)$.

3. 设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbf{R})$ 在区间$[-1,1]$上恒有 $|f(x)|\leqslant 1$.

求证:(1) $|c|\leqslant 1$, $|b|\leqslant 1$;

(2) $|a|+|b|+|c|\leqslant 3$.

4. 已知函数 $f(x)=ax^2-bx+c\ (a>0)$,方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,1)$内有两个互异实根.

求证:(1) $b>2c$ 且 $a>c$;

(2) $f(0)\cdot f(1)<\frac{a^2}{16}$.

5. 设 $f(x)=x^2+bx+c$, $x\in[-m,m]$,m 为正常数.

(1) 用定义证明:当 $b<-2m$ 时,$f(x)$ 为减函数;

(2) 当 $b<-2m$ 时,在$[-m,m]$上必存在 x,使得 $|f(x)|\geqslant m|b|$ 成立.

6. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a,b,c\in\mathbf{R})$,满足 $f(-1)=0$,对于任意的实数 x,都有 $f(x)-x\geqslant 0$,并且当 $0<x<2$ 时,有 $f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$.

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 证明:$a>0$, $c>0$;

(3) 当 $x\in[-1,1]$ 时,函数 $g(x)=f(x)-mx\ (m\in\mathbf{R})$ 是单调的,求证:$m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 1$.

专题2　三角函数

2－1　三角函数的图象性质及三角变换

1. 函数 $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象中一条对称轴方程是　（　　）

A. $x=\frac{\pi}{4}$　　B. $x=\frac{\pi}{8}$　　C. $x=-\frac{\pi}{4}$　　D. $x=-\frac{\pi}{2}$

2. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{7}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，α、β均为锐角，则 $\alpha+2\beta$的值为　（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{5\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{4}$　　D. π

3. 已知矩形的两边长分别为 $\tan\frac{\theta}{2}$ 和 $1+\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$，且对于任何 $x\in\mathbf{R}$，θ使 $f(x)=\sin\theta\cdot x^2+4\sqrt{3}x+\cos\theta\geqslant0$ 成立，则此矩形的面积　（　　）

A. 有最大值1，无最小值　　B. 有最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小值$\frac{1}{2}$

C. 有最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}$，无最大值　　D. 有最大值1，最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{5\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{3\pi}{2}$，则 $\cos\alpha$与$\sin\beta$的大小关系是　（　　）

A. $\cos\alpha<\sin\beta$　　B. $\cos\alpha=\sin\beta$　　C. $\cos\alpha>\sin\beta$　　D. 不确定

5. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则 $M=\log_{\sqrt{5}}(\tan\alpha\cot\beta)^2$ 的值是　（　　）

A. 4　　B. -4　　C. 2　　D. 5

6. 给出下列各式：

① $\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$；② $\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$；③ $\cot\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$；④ $\cot\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$；⑤ $\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

其中与 $\tan\alpha+\sec\alpha$ 恒等的式子的序号是________.

7. 已知 α、β为锐角，且 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0$，求证：$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

8. 已知 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right)$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，求$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos3\alpha+\sin3\alpha}$的值.

9. 是否存在实数 a，使得函数 $y=\sin^2x+a\cos x+\frac{5}{8}a-\frac{3}{2}$ 在闭区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为1？若存在，求出对应的 a 值；若不存在，请说明理由.

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意 x_1、x_2 都满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，又 $f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$，对所有 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$均成立，求实数 m 的取值范围.

2－2　三角形中的有关问题

1. 在直角三角形中，两锐角为 A 和 B，则 $\sin A \cdot \sin B$　（　　）

A. 有最大值 $\frac{1}{2}$ 和最小值 0　　B. 有最大值 $\frac{1}{2}$，但无最小值

C. 既无最大值也无最小值　　D. 有最大值 1，但无最小值

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$AC=2$，$\angle A$ 的平分线长为 1，则 $\triangle ABC$ 的面积是　（　　）

A. $\frac{3\sqrt{7}}{8}$　　B. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$　　C. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{7}}{10}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，表达式 ① $\sin(A+B)+\sin C$，② $\cos(B+C)+\cos A$，③ $\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2}$，④ $\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2}$ 中，表示常数的是　（　　）

A. ①和②　　B. ②和③　　C. ①和③　　D. ②和④

4. 若 α、β 是锐角三角形的两个内角，则　（　　）

A. $\cos\alpha>\sin\beta$ 且 $\cos\beta>\sin\alpha$　　B. $\cos\alpha<\sin\beta$ 且 $\cos\beta<\sin\alpha$

C. $\cos\alpha>\sin\beta$ 且 $\cos\beta<\sin\alpha$　　D. $\cos\alpha<\sin\beta$ 且 $\cos\beta>\sin\alpha$

5. 给出下列四个命题：

① 若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形；

② 若 $\sin A=\sin B$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形；

③ 若 $\cos A\cos B\cos C<0$，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形；

④ 若 $\cos(A-B)\cdot\cos(B-C)\cdot\cos(C-A)=1$，则 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

以上命题中正确的是　（　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ①④　　D. ③④

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为钝角，设 $x=\sin C$，$y=\sin A+\sin B$，$z=\cos A+\cos B$，那么 x、y、z 之间的大小关系是________.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，三边 a、b、c 和面积 S 满足关系：$S=a^2-(b-c)^2$，且 $b+c=8$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边，已知 a、b、c 成等差数列，$A-C=\frac{\pi}{3}$，求 $\sin B$ 的值.

9. 在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A、B、C 成等差数列.

(1) 求 $\cos^2 A+\cos^2 C$ 的取值范围；

(2) 若边长 $b=7$，$a=8$，求 $\triangle ABC$ 内切圆的半径.

10. 甲船在 A 处观察到乙船在它的北偏东 60° 的方向，两船相距 a 里，乙船正向北行驶. 若甲船速度是乙船速度的 $\sqrt{3}$ 倍，问甲船应取什么方向前进才能追上乙船，此时乙船已行驶多少里？

专题3 数　　列

3－1 等差数列与等比数列

1. 已知$-9, a_1, a_2, -1$成等差数列，$-9, b_1, b_2, b_3, -1$成等比数列，则$b_2(a_1+a_2)$等于　（　　）

A. 30　　B. -30　　C. ± 30　　D. 15

2. 已知等差数列的首项是$\frac{1}{5}$，第五项开始比1大，则此等差数列的公差d的取值范围是　（　　）

A. $d > \frac{1}{5}$　　B. $d < \frac{4}{15}$　　C. $\frac{1}{5} < d < \frac{4}{15}$　　D. $\frac{1}{5} < d \leqslant \frac{4}{15}$

3. 数列$\{a_n\}$中，$a_n > 0$，S_n是它的前n项和，且$4S_n = a_n^2 + 2a_n + 1\ (n \in \mathbf{N}^*)$，则它的通项公式是____________.

4. 已知$\{a_n\}$是等差数列，d是公差且不为零，它的前n项和为S_n，设集合$A = \left\{\left(a_n, \frac{S_n}{n}\right) \mid n \in \mathbf{N}^*\right\}$，若以$A$中元素作为点的坐标，这些点都在同一条直线上，那么这条直线的斜率为________.

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1 = 1$，公差$d > 0$，且第二项、第五项、第十四项分别是等比数列$\{b_n\}$的第二项、第三项、第四项.

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 设数列$\{c_n\}$对任意自然数n均有$\frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_2} + \cdots + \frac{c_n}{b_n} = a_{n+1}$成立，求$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{2006}$的值.

6. 已知函数$f(x) = \frac{x}{3x+1}$，数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 1$，$a_{n+1} = f(a_n)\ (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 记$S_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_{n+1}$，求证：$S_n < \frac{1}{3}$.

7. 已知$\{a_n\}$是首项为2，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，S_n为它的前n项和.

(1) 用S_n表示S_{n+1}；

(2) 是否存在自然数c和k，使得$\frac{S_{k+1} - c}{S_k - c} > 2$成立？

8. (2005全国Ⅱ文) 已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等差数列，$\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$成等差数列. 又$b_n = \frac{1}{a_{2^n}}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$.

(1) 证明：数列$\{b_n\}$为等比数列；

(2) 如果数列$\{b_n\}$前3项的和等于$\frac{7}{24}$，求数列$\{a_n\}$的首项a_1和公差d.

3－2　数列的综合应用

1. (2005 福建) 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16$，$a_4=1$，则a_{12}的值是　　(　　)

A. 15　　B. 30　　C. 31　　D. 64

2. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+2n$，那么a_{2006}的值是　　(　　)

A. $2\,005\times2\,004$　　B. $2\,006\times2\,005$　　C. $2\,006^2$　　D. $2\,006\times2\,007$

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\frac{n-\sqrt{98}}{n-99}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的前 30 项中最大项是第________项.

4. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=-\frac{1}{a_n+1}$，则$a_{18}=$________.

5. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$(3-m)S_n+2ma_n=m+3$ $(n\in\mathbf{N})$，其中m为常数，且$m\neq-3$.

(1) 求证：$\{a_n\}$是等比数列；

(2) 若数列$\{a_n\}$的公比$q=f(m)$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=a_1$，$b_n=\frac{2}{3}f(b_{n-1})$ $(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$，求证：$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$为等差数列，并求$b_n$.

6. 设函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ $(x<-2)$的反函数为$f^{-1}(x)$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\frac{1}{a_{n+1}}=-f^{-1}(a_n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求通项a_n；

(2) 设$S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$b_n=S_{2n+1}-S_n$，是否存在最小整数$m$，使得对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，有$b_n<\frac{m}{25}$成立？若存在，求出$m$的值；若不存在，说明理由.

7. (2005 山东) 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=5$，前n项和为S_n，且$S_{n+1}=2S_n+n+5$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

(2) (理) 令$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，求函数$f(x)$在点$x=1$处的导数$f'(1)$，并比较$2f'(1)$与$23n^2-13n$的大小.

(文) 令$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，求函数$f(x)$在点$x=1$处的导数$f'(1)$.

8. 在xOy平面上有一点列$P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$，…，$P_n(a_n,b_n)$，…，对每个正整数n，点P_n位于函数$y=2\,000\left(\frac{a}{10}\right)^x$ $(0<a<10)$的图象上，且点P_n、点$(n,0)$与点$(n+1,0)$构成一个以P_n为顶点的等腰三角形.

(1) 求点P_n的纵坐标b_n的表达式；

(2) 若对每个正整数n，以b_n、b_{n+1}、b_{n+2}为边长能构成一个三角形，求a的取值范围；

(3) 设$B_n=b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，若a取(2)中确定的范围内的最小整数，求数列$\{B_n\}$的最大项的项数；

(4) 设$c_n=\lg(b_n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，若a取(2)中确定的范围内的最小整数，问数列$\{c_n\}$前多少项的和最大？试说明理由.

专题 4　不等式的证明

4－1　不等式的证明

1. 若 $\epsilon > 0$，命题甲："a、b 为实数，且 $|a-b| < 2\epsilon$"；命题乙："a、b 为实数，满足 $|a-2| < \epsilon$，且 $|b-2| < \epsilon$"，则 (　　)

A. 甲是乙的充分非必要条件　　B. 甲是乙的必要非充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　D. 甲不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

2. 已知 $|a| \neq |b|$，$m = \dfrac{|a|-|b|}{|a-b|}$，$n = \dfrac{|a|+|b|}{|a+b|}$，那么 m、n 之间的大小关系为 (　　)

A. $m > n$　　B. $m < n$　　C. $m = n$　　D. $m \leqslant n$

3. 设 $0 < 2a < 1$，$M = 1-a^2$，$N = 1+a^2$，$P = \dfrac{1}{1-a}$，$Q = \dfrac{1}{1+a}$，那么 (　　)

A. $Q < P < M < N$　　B. $M < N < Q < P$

C. $Q < M < N < P$　　D. $M < Q < P < N$

4. 若 a、b 是任意实数，且 $a > b$，则 (　　)

A. $a^2 > b^2$　　B. $\dfrac{b}{a} < 1$　　C. $\lg(a-b) > 0$　　D. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a < \left(\dfrac{1}{2}\right)^b$

5. 若 $a < b < 0$，则 a^2b 与 ab^2 的大小关系是____________(用"$<$"连接).

6. 若 $0 < b < a < \dfrac{1}{4}$，则 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$a-b$，$\sqrt{a-b}$ 由小到大排列的顺序是________________.

7. 已知 $\dfrac{a}{1-a} > 0$，$x > 1$，那么三个数 a^x，$x^{\frac{1}{a}}$，$\log_a x$ 由小到大的排列顺序为______________.

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$BC = 3$，$AC = 4$，P 是 AB 上的点，则点 P 到 AC、BC 的距离乘积的最大值是______.

9. 设 $f(x) = x^2 - x + 13$，$|x-a| < 1$，求证：$|f(x) - f(a)| < 2(|a|+1)$.

10. 若 $x^2 + y^2 \leqslant 1$，求证：$|x^2 + 2xy - y^2| \leqslant \sqrt{2}$.

11. 已知 a、b 是不等的正数，且 $a^3 - b^3 = a^2 - b^2$，求证：$1 < a+b < \dfrac{4}{3}$.

12. 已知函数 $f(x) = \dfrac{a(x-1)^2+1}{bx+c-b}$ $(a,b,c \in \mathbf{N})$，$f(2) = 2$，$f(3) < 3$ 且 $f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{e} = (-1, 0)$ 平移后得到的图象关于原点对称.

(1) 求 a、b、c 的值；

(2) 设 $0 < |x| < 1$，$0 < |t| \leqslant 1$，求证：$|t+x| + |t-x| < |f(tx+1)|$；

(3) 设 x 是正实数，求证：$[f(x+1)]^n - f(x^n+1) \geqslant 2^n - 2$.

4-2　不等式的解法

1. 若 $|x+4|+|x-3|<a$ 有实数解，则 a 的取值范围是　（　　）

A. $a>1$　　B. $a\leqslant 1$　　C. $a>7$　　D. $1<a<7$

2. 不等式 $|x+1|(2x-1)\geqslant 0$ 的解集为　（　　）

A. $\left\{x \mid x\geqslant \frac{1}{2}\right\}$　　B. $\left\{x \mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant \frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x \mid x=-1 \text{ 或 } x\geqslant \frac{1}{2}\right\}$　　D. $\left\{x \mid -1\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\right\}$

3. 当不等式 $2\leqslant x^2+px+10\leqslant 6$ 恰好有一个解时，实数 p 的值是　（　　）

A. 2　　B. -2　　C. ± 2　　D. ± 4

4. 若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1, 2)$，则实数 a 等于　（　　）

A. 8　　B. 2　　C. -4　　D. -8

5. 不等式 $|x+2|\geqslant |x|$ 的解集为____________.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则不等式 $xf(x)+x\leqslant 2$ 的解集是____________.

7. 不等式 $x+x^3\geqslant 0$ 的解集是____________.

8. 若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x \mid f(x)<0\}$，$Q=\{x \mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0,\\ g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为____________.

9. 解不等式 $\lg\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$.

10. 解关于 x 的不等式 $mx^2-2x+1>0\ (m\in \mathbf{R})$.

11. 当 $|m|\leqslant 2$ 时，不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 恒成立，求 x 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{ax+b}$（a、b 为常数），且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3$，$x_2=4$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）设 $k>1$，解关于 x 的不等式：$f(x)<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$.

4－3 不等式的应用

1. 若正数 a、b、c、d 满足 $a+d=b+c$，$|a-d|<|b-c|$，则 ( )

A. $ad=bc$ B. $ad<bc$

C. $ad>bc$ D. ad 与 bc 的大小不能确定

2. 已知 $\lg x\cdot\lg y-\lg(xy)+1>0$，且 $\lg(xy)>2$，那么 ( )

A. $0<x<10,\ 0<y<10$ B. $x>10,\ 0<y<10$

C. $x>10,\ y>10$ D. $0<x<10,\ y>10$

3. 已知 $x^2+y^2=1$，$a^2+b^2=4$，则 $ax+by$ 的最大值是 ( )

A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 4 D. 不存在

4. 函数 $y=\frac{3x}{x^2+x+1}\ (x<0)$ 的值域是 ( )

A. $(-1,0)$ B. $[-3,0)$ C. $[-3,1]$ D. $(-\infty,0)$

5. 函数 $f(x)=\log_{\sin^2\theta}\sqrt{1+x^2}+\log_{\sqrt{1+x^2}}\sin^2\theta$ 的值域为____________.

6. 若 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，则 x^2-xy+y^2 的取值范围为____________.

7. 若函数 $f(x)=\log_2(x^2+ax-a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是____________.

8. 若对于任意的 $x\in(0,1)$，恒有 $2x^2+(a+1)x-a(a-1)<0$，则 a 的取值范围是____________.

9. 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]\ (a<1)$ 的定义域为 B.

(1) 求 A；

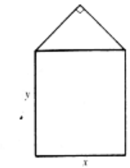
(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

10. 设全集 $U=\mathbf{R}$.

(1) 解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0\ (a\in\mathbf{R})$；

(2) 记 A 为(1)中不等式的解集，集合 $B=\left\{x\mid \sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=0\right\}$，若 $(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素，求 a 的取值范围.

11. 某单位用木料制作如图所示的框架，框架的下部是边长分别为 x、y(单位：m)的矩形，上部是等腰直角三角形. 要求框架围成的总面积为 8 m^2，问 x、y 分别为多少时用料最省？(精确到 0.001 m)



(第 11 题)

12. 已知函数 $f(x)=-\frac{1}{a}+\frac{2}{x}\ (x>0)$.

(1) 判断 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的增减性，并证明你的结论；

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x)>0$；

(3) 若 $f(x)+2x\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

专题5　解析几何

5-1　求曲线的方程

1. 已知两点 $M\left(1,\ \frac{5}{4}\right)$、$N\left(-4,\ -\frac{5}{4}\right)$，给出下列曲线方程：

① $4x+2y-1=0$；② $x^2+y^2=3$；③ $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；④ $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

在曲线上存在点 P 满足 $|MP|=|NP|$ 的所有曲线方程是　（　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ②③④

2. 圆心在抛物线 $y^2=2x$ 上，且与 x 轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是　（　）

A. $x^2+y^2-x-2y-\frac{1}{4}=0$　　B. $x^2+y^2+x-2y+1=0$

C. $x^2+y^2-x-2y+1=0$　　D. $x^2+y^2-x-2y+\frac{1}{4}=0$

3. 如果抛物线的顶点在坐标原点，对称轴为 y 轴，焦点在直线 $x-2y+4=0$ 上，那么抛物线的方程是　（　）

A. $x^2=8y$　　B. $x^2=-8y$　　C. $y^2=-16x$　　D. $y^2=16x$

4. 若双曲线 C 以椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 的焦点为焦点，其离心率是该椭圆离心率的 2 倍，则双曲线的标准方程为________________.

5. 椭圆的中心在原点，对称轴为坐标轴，椭圆短轴的一个顶点 B 与两焦点 F_1、F_2 组成的三角形的周长为 $4+2\sqrt{3}$ 且 $\angle F_1BF_2=\frac{2\pi}{3}$，则椭圆的方程是________________.

6. 已知动圆 M 过定点 $A(3,\ 0)$，且截 y 轴正向所得线段 BC 保持定长 $2a$，则动圆圆心 M 的轨迹方程为________________.

7. 已知圆 C 的圆心在抛物线 $y^2=-18x$ 上，且与 y 轴相切，又与另一圆 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$ 外切，求圆 C 的方程.

8. 斜率为 $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 的直线过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点 F，与椭圆交于两点 A、B，与 y 轴交于点 C，且 B 为 CF 的中点，又 A、B 两点到右准线的距离之和为 $\frac{9}{5}$，求椭圆的方程.

9. 已知 $O(0,\ 0)$、$B(1,\ 0)$、$C(b,\ c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.

(1) 分别写出 $\triangle OBC$ 的重心 G、外心 F、垂心 H 的坐标，并证明 G、F、H 三点共线；

(2) 当直线 FH 和 OB 平行时，求顶点 C 的轨迹.

10. 已知直线 l 过定点$(0,\ 3)$，并且是抛物线 $y^2=4x$ 上动弦 P_1P_2 的中垂线.

(1) 求直线 l 倾斜角的范围；

(2) 求直线 l 与动弦 P_1P_2 交点 M 的轨迹方程.

5-2 曲线的性质

1. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两焦点为 F_1、F_2，连结点 F_1、F_2 为边作正三角形，若椭圆恰好平分正三角形的另两条边，则椭圆的离心率为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $4-2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}-1$

2. 若双曲线 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到右焦点的距离是 8，则点 P 到左准线的距离是 ( )

A. $\frac{32}{5}$　　B. 10　　C. $\frac{96}{5}$　　D. $\frac{64}{5}$

3. $A(x_1, y_1)$、$B\left(2\sqrt{2}, \frac{5}{3}\right)$、$C(x_2, y_2)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 上三点，若点 $F(0, 4)$ 与三点 A、B、C 的距离成等差数列，则 y_1+y_2 的值为 ( )

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{10}{3}$　　C. $\frac{16}{3}$　　D. $\frac{22}{3}$

4. 已知 F 是抛物线 $x^2=4y$ 的焦点，点 P 在抛物线上运动，$A(2, 3)$ 是平面内一定点，则使 $|PA|+|PF|$ 为最小的 P 点的坐标为________.

5. 若 P 是双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 右支上一个动点，F 是双曲线的右焦点，已知点 $A(3, 1)$，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值是________.

6. 设 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，且 $|PA|-|PF|=1$，则 $\cos\angle F_1PF_2=$ ________.

7. 在双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上求一点 M，使它到左、右焦点的距离之比为 3 : 2.

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，左准线为 l，P 是双曲线左支上一点，并且有 $|PF_1|$ 是 P 到 l 的距离 d 与 $|PF_2|$ 的比例中项，求双曲线离心率的取值范围.

9. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上存在一点 P，使 $\angle A_1PA_2=120°$，其中 A_1、A_2 分别为椭圆的左、右顶点，求椭圆的离心率的取值范围.

10. (2000 全国) 已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$，过动点 $M(a, 0)$ 且斜率为 1 的直线 l 与该抛物线交于不同的两点 A、B，$|AB|\leqslant 2p$.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 若线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N，求 $\triangle NAB$ 面积的最大值.

5－3　直线与圆锥曲线

1. 已知直线 l: $x-y=2$，点 $P(1,0)$，若 P 点关于 l 的对称点 P_1 在双曲线 $2ax^2-ay^2=1$ 上，则双曲线的焦点坐标是　(　　)

A. $\left(0,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$　　B. $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$　　C. $\left(0,\pm\frac{\sqrt{42}}{2}\right)$　　D. $\left(\pm\frac{\sqrt{12}}{2},0\right)$

2. 抛物线 $2y=x^2$ 上距离点 $A(0,a)$ $(a>0)$ 最近的点恰好是顶点，这个结论成立的充要条件是　(　　)

A. $a>0$　　B. $0\leqslant a<\frac{1}{2}$　　C. $a\geqslant 1$　　D. $0<a\leqslant 1$

3. 已知直线 l 的方程为 $y=x+3$，在 l 上任取一点 P，若过点 P 且以双曲线 $12x^2-4y^2=3$ 的焦点作椭圆的焦点，那么具有最短长轴的椭圆方程为________.

4. 在抛物线 $y^2=16x$ 内，通过点(2, 1)且在此点被平分的弦所在直线的方程是________.

5. 过椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的左焦点 F 引直线 l 交椭圆于 P、Q 两点，交两准线于 A、B 两点. 若 $|PQ|$、$||AF|-|BF||$、$|AB|$ 成等比数列，设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则 $|x_1-x_2|=$________.

6. 过椭圆 $2x^2+y^2=2$ 的一个焦点的直线交椭圆于 A、B 两点，求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

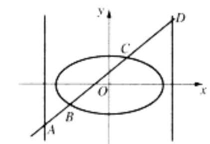
7. 已知椭圆长轴长 $|A_1A_2|=6$，焦距 $|F_1F_2|=4\sqrt{2}$，过椭圆焦点 F_1 作一直线，交椭圆于两点 M、N. 设 MN 的倾斜角为 α，当 α 取什么值时，$|MN|$ 等于椭圆的短轴长？

8. 已知点 P 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 上的点，求 P 点到直线 $y=3x$ 与 $y=-3x$ 的距离之积的最小值.

9. 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-1}=1$ $(2\leqslant m\leqslant 5)$，过其左焦点且斜率为 1 的直线与椭圆及其准线的交点从左到右的顺序依次为 A、B、C、D，设 $f(m)=||AB|-|CD||$.

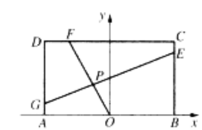
(1) 求 $f(m)$ 的解析式；

(2) 求 $f(m)$ 的最值.



(第 9 题)

10. (2003 全国) 已知常数 $a>0$，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=4a$，O 为 AB 的中点，点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动，且 $\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$，$P$ 为 GE 与 OF 的交点(如图)，问是否存在两个定点，使 P 到这两点的距离的和为定值？若存在，求出这两点的坐标及此定值；若不存在，请说明理由.



(第 10 题)

专题6　向量的综合运用

6－1　平面向量与代数的综合问题

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(2,2)$，$\overrightarrow{OB}=(4,1)$，在 x 轴上一点 P 使 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值，则 P 点的坐标是（　　）

A. $(-3,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

2. 已知 $\theta\in[0,2\pi)$，$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{OP_2}=(3-\cos\theta,4-\sin\theta)$，则 $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 的取值范围是（　　）

A. $[4,7]$　　B. $[3,7]$　　C. $[3,5]$　　D. $[5,6]$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\alpha-m,\cos\alpha)$，$\alpha\in\mathbf{R}$ 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 m 的最小值为（　　）

A. -2　　B. -1　　C. $-\sqrt{2}$　　D. -3

4. 已知△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，$S_{\triangle ABC}=\frac{15}{4}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为（　　）

A. 30°　　B. -150°　　C. 150°　　D. 30°或150°

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x^2+x,-x)$，则关于 x 的不等式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2>\frac{2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}+1$ 的解集是________.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(-\sqrt{2},1)$，若正数 k 和 t，使得向量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(t^2+1)\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{d}=-k\boldsymbol{a}+\frac{1}{t}\boldsymbol{b}$ 垂直，则 k 的最小值是________.

7. 平面直角坐标系中有两点 $P(1,\cos x)$，$Q(\cos x,1)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

(1) 求向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角 θ 的余弦用 x 表示的函数 $f(x)$；

(2) 求 θ 的最值.

8. 已知 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}=(2\cos^2x,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3}\sin 2x+a)$（$x\in\mathbf{R}$，$a\in\mathbf{R}$，$a$ 为常数），若 $y=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式 $f(x)$；

(2) 若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 的最大值为2，求 a 的值并指出 $f(x)$ 的单调增区间.

9. 若向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，且 $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|$，其中 $k>0$.

(1) 用 k 表示 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2) 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值，并求出此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所成的角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）的大小.

10. 已知 A、B、C 三点的坐标分别是 $A(3,0)$、$B(0,3)$、$C(\cos\alpha,\sin\alpha)$，其中 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

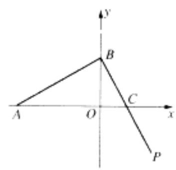
(1) 若 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，求角 α 的值；

(2) 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$，求 $\frac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\tan\alpha}$ 的值.

11. 已知 $A(-1,0)$、$B(1,0)$ 两点，C 点在直线 $2x-3=0$ 上，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 成等差数列，记 θ 为 $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角，求 $\tan\theta$.

6－2　平面向量与几何的综合问题

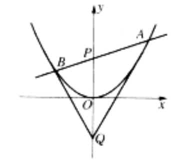
1. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的点，若 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}|$，则 $\triangle ABC$ 的形状为　（　　）
   A. 等腰直角三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰三角形　　D. 正三角形
2. $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，则下列推导不正确的是　（　　）
   A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形
   B. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\triangle ABC$ 为直角三角形
   C. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形
   D. 若 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$，则 $\triangle ABC$ 为正三角形
3. 若四边形 $ABCD$ 满足 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则该四边形是　（　　）
   A. 菱形　　B. 直角梯形　　C. 矩形　　D. 正方形
4. 如图，已知点 $A(-4,0)$，B、C 两点分别在 y 轴和 x 轴上运动，且满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CP}$.
   (1) 求动点 P 的轨迹方程；
   (2) 设过点 A 的直线与点 P 的轨迹交于 E、F 两点，$A'(4,0)$，求直线 $A'E$、$A'F$ 的斜率之和.



（第 4 题）

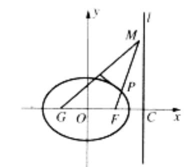
5. 已知定点 $A(0,1)$、$B(0,-1)$、$C(1,0)$，动点 P 满足：$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=k|\overrightarrow{PC}|^2$.
   (1) 求动点 P 的轨迹方程，并说明方程表示的曲线；
   (2) 当 $k=2$ 时，求 $|2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$ 的最大值和最小值.

6. 如图，过抛物线 $x^2=4y$ 对称轴上任一点 $P(0,m)$ $(m>0)$ 作直线与抛物线交于 A、B 两点，点 Q 是点 P 关于原点的对称点.
   (1) 设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ，证明：$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$；
   (2) 设直线 AB 的方程是 $x-2y+12=0$，过 A、B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线，求圆 C 的方程.



（第 6 题）

7. 已知点 $F(1,0)$，直线 l：$x=2$，设动点 P 到直线 l 的距离为 d，已知 $\frac{|PF|}{d}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $\frac{2}{3}\leqslant d\leqslant\frac{3}{2}$.
   (1) 求动点 P 的轨迹方程；
   (2) 若 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}$，求向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OF}$ 的夹角；
   (3) 如图所示，若点 G 满足 $\overrightarrow{GF}=2\overrightarrow{FC}$，点 M 满足 $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{PF}$，且线段 MG 的垂直平分线经过点 P，求 $\triangle PGF$ 的面积.



（第 7 题）

8 已知两点 $M(-2,0)$、$N(2,0)$，动点 P 在 y 轴上的射影是 H，如果 $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PH}$、$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 分别是公比为 2 的等比数列的第三、第四项.
   (1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程；
   (2) 已知过点 N 的直线 l 交曲线 C 于 x 轴下方两个不同的点 A、B，设 R 为 AB 的中点，若过点 R 与定点 $Q(0,-2)$ 的直线交 x 轴于点 $D(x_0,0)$，求 x_0 的取值范围.

专题 7　空间的角与距离

7－1　空　间　角

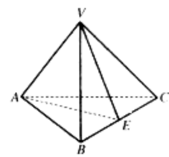
1. 矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=1$，则 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角是（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

2. 设二面角 $\alpha-AB-\beta$，D 为棱 AB 上的一点，DP 在 α 内与 AB 成 45° 角、与 β 成 30° 角，则二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的度数是（　　）

A. 60°　　B. 45°　　C. 120°　　D. 以上都不对

3. （2004 上海春）如图，在底面边长为 2 的正三棱锥 $V-ABC$ 中，E 是 BC 的中点. 若 $\triangle VAE$ 的面积是 $\frac{1}{4}$，则侧棱 VA 与底面所成角的大小为________（结果用反三角函数值表示）.



（第 3 题）

4. 直角 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 在平面 α 内，AB、AC 与 α 所成的角分别是 30° 和 45°，则平面 ABC 与平面 α 所成的锐二面角的度数为________.

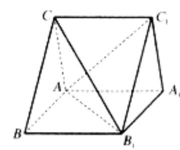
5. 已知直角三角形 ABC 的两直角边 $AC=2$，$BC=3$，P 为斜边上一点. 现沿 CP 将此三角形折成直二面角 $A-CP-B$，当 $AB=\sqrt{7}$ 时，求二面角 $P-AC-B$ 的大小.

6. 如图，已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长均为 2，侧棱 BB_1 与底面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，且侧面 ABB_1A_1 垂直于底面 ABC.

(1) 求斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积；

(2) 求二面角 $C-AB_1-B$ 的大小；

(3) 判断 B_1C 与 C_1A 是否垂直，并证明你的结论.



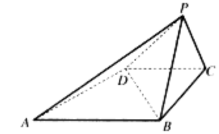
（第 6 题）

7. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，$AB=BC=PB=PC=2CD$，侧面 $PBC\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) PA 与 BD 是否相互垂直，请证明你的结论；

(2) 求二面角 $P-BD-C$ 的大小；

(3) 求证：平面 $PAD\perp$ 平面 PAB.

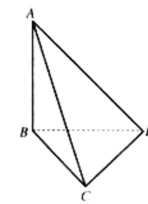


（第 7 题）

8. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，AB、BC、CD 两两垂直.

(1) 由该棱锥所有相邻的两个面组成的二面角中，哪些是直二面角？（要求全部写出，并说明理由）

(2) 若 AD 与平面 BCD 所成的角为 45°，AD 与平面 ABC 所成的角为 30°，求二面角 $B-AD-C$ 的大小（用反三角函数表示）.



（第 8 题）