



SHUXUEFENXI
NEI RONGTI YAO
JITI JIE

—3—

数学分析

内容提要及题解

宁德师范专科学校数学系

数学分析内容提要及题解

3

宁德师范专科学校数学系
数 学 分 析 教 研 组

前 言

本册为《数学分析内容提要及题解》下册（即第3册）。按原计划本册应包括级数与多元函数的微积分学。在编写过程中，考虑到多元函数的微积分学，在理论上是一元微积分学相应理论的推广，为了节省篇幅，故把这部分内容省略，而换为编写富里埃分析初步。

本册第六章无穷级数由胡连三老师编写，由黄子卿老师审阅，第七章富里埃分析由黄政书、杨克仁老师合编并审阅。

全书共三册，至此结束。由于我们的水平不高且业余时间有限，因此不论在选题上或解题过程中都难免存在缺点和错误，恳望阅过本书的同志们给我们批评指正。

宁德师专数学系数学分析教研组

一九七九年十二月

目 录

第六章 无穷级数

§ 1. 数项级数无穷乘积·····	625
§ 2. 函数项级数·····	683
§ 3. 幂级数·····	713

第七章 富里哀分析初步

§ 1. 富里哀级数

(一) 一般正交函数系与富里哀级数·····	742
------------------------	-----

(二) 三角函数系与富里哀三角级数·····	745
------------------------	-----

〔I〕三角函数系的正交性·····	745
-------------------	-----

〔II〕富里哀三角级数·····	745
------------------	-----

〔III〕贝塞尔不等式与封闭性公式·····	748
------------------------	-----

〔IV〕富里哀三角级数的收敛性与	
------------------	--

一致收敛性·····	752
------------	-----

§ 2. 富里哀积分与富里哀变换·····	809
-----------------------	-----

1. 富里哀积分与富里哀变换·····	809
---------------------	-----

2. 富里哀积分的收敛性·····	813
-------------------	-----

3. 几个典型函数的富里哀变换与	
富里哀积分·····	816
4. 富里哀变换的性质·····	824
5. 卷积的富氏变换·····	828
§ 3. 富里哀分离变量法	
——解线性偏微分方程的定解问题·····	858
(一) 两变量线性偏微分方程的分类与简化·····	859
(二) 几个典型方程的定解问题·····	862
〔I〕一维波动方程·····	862
〔II〕一维热传导方程·····	873
〔III〕二维拉普拉斯方程的定解问题·····	879

第六章 无穷级数

无穷级数是数学分析的主要组成部分，它是研究数学、物理、化学及其他自然科学的重要工具，本章介绍数项级数、无穷乘积、函数项级数、幂级数等内容。

§1. 数项级数 无穷乘积

一、内容提要：

有限多个数的加法这是众所周知的运算，它具有以下的性质：有限多个数通过加法运算，都能得到唯一确定的和，并在求和的过程中，可以把被加数的次序任意对调（即可把被加数任意重排），还可以任意加上或去掉括号，而不影响和。无穷级数是研究无穷多个数的加法运算，即研究和式：

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

（ a_n 是数域 P 中的数）的意义及算律。有限多个数的加法与无穷级数之间既有联系又有本质上的区别，其根本区别就在于对后者的研究必须借助于极限的理论。

在此，我们必须解决以下问题：什么叫做无穷级数的和？和是否存在？如何判别 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有和？关于有限多个数的加法运算的算律在此是否仍然适用？下面逐一加以研究。

（一）我们通过无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

($n=1, 2, \dots$) 使每个无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与它的部分和数列

$\{S_n\}$ 之间建立起 1—1 对应, 从而即可借助于已建立的极限理论来研究无穷级数. 这是处理无穷级数问题的基本思想方法.

(二) 基本概念

1. 对于数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ 若它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 设为 S , 则称数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的, 并把 S 叫做 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和. 记为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$$

否则若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散的, 这时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 没有和. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛的; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛的.

2. 对于无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \dots$ 若 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分积数列 $\{p_n\}$ (其中 $p_n = \prod_{k=1}^n a_k, n=1, 2, \dots$) 的极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 存在且不等于零, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \neq 0$ 则称 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

为收敛的并把 p 叫做 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 的积, 记为:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

否则若 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 不存在或 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$, 则称 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散.

若 $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ($a_n > 0$) 收敛, 则称 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛的; 若

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛的.

(三) 数项级数敛散性的判别法(下列记号 $A \iff B$ 表示 B 是 A 的充要条件, $A \rightarrow B$ 表示 A 是 B 的充分条件).

1. 哥西收敛准则: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\iff$ 对于任意给定的正数 ϵ , 都存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 对于任意的自然数 p 均有

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=1}^p a_{n+i} \right| < \epsilon$$

特别地有: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

或者说: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2. 正项级数敛散性的判别法:

(1) 基本定理: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

(2) 比较判别法: 对于两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 若存在 $C > 0$, 使 $a_n \leq C b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 或自某项以后(即存在自然数 N , 当 $n > N$ 时)上述关系式成立, 那么:

①当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛;

②当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦发散.

比较判别法的极限形式:

设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$
($0 < L < +\infty$) 那么这两个级数必同时收敛或同时发散.

(3) 哥西判别法: 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0, n = 1, 2, \dots$)

若从某项起均有 $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, (其中 q 为常数) 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

收敛, 若从某项起均有 $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(4) 达朗贝尔判别法: 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0, n = 1, 2, \dots$)

若从某项起均有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ (其中 q 为常数), 则

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(5) 哥西积分判别法: 如果 $f(x)$ 是在 $[1, +\infty)$ 上的正的单调递减函数且 $a_n = f(n)$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ 存在.

(6) 拉贝判别法: 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0, n = 1, 2, \dots$) 如果有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

则当 $\alpha > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

当 $\alpha < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(7) 高斯判别法: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 如果有:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{\beta}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad (n \rightarrow \infty)$$

则当 $\beta > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 而当 $\beta < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3. 变量级数敛散性判别法:

(1) 绝对收敛级数必为收敛级数, 但反之不真.

(2) 阿贝尔判别法: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 数列 $\{a_n\}$ 单调

有界. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(3) 狄利克来判别法: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列 $\{b_n\}$ 有

界, 数列 $\{a_n\}$ 单调趋于零, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(4) 莱布尼兹判别法: 如果一个交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ($a_n > 0, n = 1, 2, \dots$) 的项 a_n 满足下列条件:

① a_n 单调减少, 即 $a_{n+1} \leq a_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 并且它的余和

γ_n 与余和的第一项同号且 $|\gamma_n| \leq a_{n+1}$,

注: 所谓收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 的第 n 项余和 γ_n 就是和 S

与部分和 S_n 的差 $\gamma_n = S - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$

4. 对数尺度: 可用级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n (\ln \ln n)^p}$... 等为标准级

数, 根据它们的敛散性来判别其他级数的敛散性. 这批级数人们称之为对数尺度.

(1) 当 $|\gamma| < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n$ 收敛; 当 $|\gamma| \geq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n$ 发散.

(2) 当 $p > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$... 都收敛.

当 $p \leq 1$ 时, 上述级数都发散

这些级数收敛 (发散) 快慢如下所示:

快	←	—————	发散	—————	—————	→	慢
$(\gamma \geq 1)$		$(p \leq 1)$	$(p \leq 1)$			$(p \leq 1)$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$			$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$...	
$ \gamma < 1$		$(p > 1)$	$(p > 1)$			$(p > 1)$	
快	←	—————	收敛	—————	—————	→	慢

5. 级数敛散性判别法一览表

判别法的名称	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 所满足的条件	敛散性	便于应用该方法的级数的特点	判别法的理论根据
关于级数哥西收敛准则	$\left \sum_{i=1}^p a_{n+i} \right < \varepsilon$, 其中 ε 为任意给定的正数, N 为由 ε 所确定的自然数, p 为任意自然数	收敛	部分和易于求 的级数或通项 经化简后易于求 其部分和的级数	关于数列 的哥西收敛 准则
	特例: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 或不存在	发散		
基本定理	正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界	收敛	同上	单调递增 有界数列必有 极限

比较	$0 < a_n \leq c b_n$ $c > 0$, c 是常数 ($n = 1, 2, \dots$)	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛	a_n 与 b_n 的主部为同级无穷小, 且其中有一个级数的敛散性为已知的。	基本定理
	极限形式: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l, \quad 0 < l < +\infty$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散		
判别法			$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的敛散性		a_n 的主部为 c^n (c 为常数)
哥西	$a_n > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,$ q 为常数, $n = 1, 2, \dots$	收敛			
		发散			
判别法	$a_n > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1,$ $n = 1, 2, \dots$				

达朗贝尔判别法	$a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 (q \text{ 为常数})$	收敛	a_n 的主部为 $\frac{1}{n!}$	比较判别法以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 作为标准级数。
	$a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$	发散		
哥西积分判别法	$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为正的单调递减函数, $a_n = f(n)$, $n = 1, 2, \dots$	收敛	符合该判别法条件的级数	基本定理
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ 存在	收敛		
拉贝判别法	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$ ($n \rightarrow \infty$)	收敛	a_n 为 n 的分式或无理式	比较判别法以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 为标准级数
	$\alpha > 1$	收敛		
高斯判别法	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\beta}{n \ln n} + o(\frac{1}{n \ln n})$ ($n \rightarrow \infty$)	收敛	比较判别法, 以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 为标准级数	
	$\beta > 1$	收敛		
		收敛		
		收敛		

绝对收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n $ 收敛	收敛		哥西收敛准则
阿贝尔判别法	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, $\{a_n\}$ 单调有界	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛	通项能分解为 a_n 与 b_n 之积, 且符合条件	同上
狄黎克雷判别法	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, $\{a_n\}$ 单调趋于零.	同上	同上	同上
莱布尼兹判别法	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为交错级数即 $a_n = (-1)^{n-1} b_n$, $b_n > 0$, $b_{n+1} \leq b_n$, $b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛	交错级数	狄黎克雷判别法或哥西收敛准则

6. 无穷级数与有限多个数的和式的比较

	无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	有限多个数的和式 $\sum_{k=1}^m a_k$
和的存在与唯一性	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ 存在时才有和, 这时和是唯一的, 否则没有和。	$\sum_{k=1}^m a_k$ 都有唯一确定的和
交换律推广的可能 (重排性 (重排问题))	(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛时, 其中的被加数可以任意重排 (即可任意调换被加数的次序) 而不改变其和。 (2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的被加数不能任意重排。	$\sum_{k=1}^m a_k$ 中的被加数可以任意重排, 而不改变其和。
结合律推广的可能 (任意加括号)	(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时, 可以任意加括号而不改变其和。 (2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, 不能任意加括号。	$\sum_{k=1}^m a_k$ 可以任意加括号而不改变其和

分 配 律	(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时, 有 $c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c a_n, \quad (c \text{ 为常数})$	(1) 恒有: $c \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m c a_k$ (c 为常数)
推 广 的 可 能 性	(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛时, $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_j \text{ 也绝对收敛, 且}$ $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_j$	(2) 恒有: $\left(\sum_{k=1}^m a_k \right) \left(\sum_{k=1}^m b_k \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m a_i b_j$
交 换 律 与 结 合 律 进 一 步 推 广 的 可 能 性	当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$	恒有: $\sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{k=1}^m (a_k + b_k)$