

48345

# 板壳力学

中册

同济大学应用力学教研室编

1979

## 中册目录

## 第II篇 薄壳力学

第八章 弹性薄壳力学的基本知识	8-1
§ 8.1 工程实践中的薄壳结构物	8-1
§ 8.2 薄壳力学的基本知识	8-3
§ 8.3 薄壳力学发展简史	8-12
参考资料	8-14
第九章 弹性薄壳的薄膜理论	9-1
§ 9.1 旋转曲面及一般曲面的一些微分几何知识	9-1
§ 9.2 旋转薄壳薄膜理论平衡微分方程式	9-6
§ 9.3 旋转薄壳的薄膜形变, 弹性关系	9-11
§ 9.4 薄膜理论的边界条件	9-14
§ 9.5 轴对称旋转薄壳按薄膜理论计算的方法	9-16
§ 9.6 旋转薄壳按薄膜理论计算例题	9-20
§ 9.7 非对称荷载作用下薄壳的薄膜内力	9-28
§ 9.8 薄壳薄膜理论的基本方程式	9-35
§ 9.9 薄膜理论计算柱形薄壳	9-43
§ 9.10 薄膜介表格的利用	9-48
§ 9.11 本章总结	9-61
§ 9.12 习    题	9-62
参考资料	9-66

第十章 薄壳的弯曲理论	10 - 1
§ 10.1 前言	10 - 1
§ 10.2 再述曲面理论的知识	10 - 2
§ 10.3 薄壳内力及静力平衡微分方程式	10-10
§ 10.4 薄壳的形变几何方程形变连续条件 及弹性关系	10-22
§ 10.5 薄壳的边界条件	10-30
§ 10.6 弹性薄壳弯曲问题介法概述	10-33
§ 10.7 本章总结	10-37
§ 10.8 本章思考题及习题	10-39
参考资料	10-40

第十一章 旋转薄壳的计算	11 - 1
§ 11-1 引言	11 - 1
§ 11-2 旋转薄壳轴对称弯曲问题, 球壳的弯曲介	11 - 1
§ 11-3 等厚度球壳园顶	11 - 5
§ 11-4 球壳园顶计算例题	11-11
§ 11-5 园环与园板	11-15
§ 11-6 园柱形薄壳对称荷载下的弯曲介	11-19
§ 11-7 力法计算旋转薄壳	11-23
§ 11-8 组合旋转薄壳计算例	11-28
§ 11-9 本章总结	11-49
§ 11-10 本章习题	11-50
参考资料	11-54

第十二章 园柱形薄壳分析	12-1
§ 12.1 概 言	12-1
§ 12.2 园柱形薄壳的薄膜解	12-2
§ 12.3 位移法介园柱形薄壳弯曲问题的基本方程式	12-6
§ 12.4 力法解园柱形薄壳弯曲问题的基本方程	12-10
§ 12.5 双重福利衰级数解园柱形薄壳弯曲问题	12-14
§ 12.6 单福利衰级数介园柱形薄壳屋盖问题	12-19
§ 12.7 边梁理论	12-27
§ 12.8 园柱形薄壳计算例	12-32
§ 12.9 利用表格计算园柱形薄壳	12-39
§ 12.10 具有边梁的园柱形薄壳计算例	12-43
§ 12.11 本章总结	12-50
§ 12.12 习 题	12-51
第十二章附录	12-55
第十二章参考资料	12-67

第十三章 扁壳及扭壳	13-1
§ 13.1 扁壳的定义和假设	13-1
§ 13.2 扁壳理论中的基本方程式	13-3
§ 13.3 扁壳大挠度理论基本方程式	13-8
§ 13.4 扁壳的薄膜理论	13-12
§ 13.5 三种双曲扁壳的薄膜介	13-15
§ 13.6 线性扁壳弯曲问题双重福利衰数介法	13-24
§ 13.7 单福利衰级数介扁壳的平衡问题	13-29
§ 13.8 简化的单福利衰级数法介扁壳弯曲问题	13-37
§ 13.9 等扭壳	13-43
§ 13.10 变分法分析扁壳弯曲平衡问题	13-51
§ 13.11 差分法计算双曲扁壳	13-54
§ 13.12 园底球形扁壳轴对称变形弯曲平衡问题	13-57
§ 13.13 本章总结	13-63
§ 13.14 本章习题	13-64
第十三章参考资料	13-66

## 第 II 篇 薄壳力学

## 第八章 弹性薄壳力学的基本知识

## § 8-1 工程实践中的薄壳结构物

伟大领袖毛主席教导我们：“人的认识，主要地依赖于物质的生产活动。逐渐地了解自然的现象，自然的性质，自然的规律性，人和自然的关系；……。”

我们的祖先最早就居住在以茅草为顶以泥块砌筑起的筒形壳体的住房内，那时候使用的诸如盆罐缸钵之类的陶器都是些壳体（如西安半坡遗址。）

真正现代化的壳体结构研究工作约开始于 19 世纪初，深入的研究还是从 1930 年后才开始的。于 18—19 世纪蒸汽机是一种重要的动力工具。联着蒸汽机的锅炉是一个有内压力的壳体结构。有关锅炉及管道之类壳体的研究工作，目前还在进行，如管道进入壳体的应力集中问题等。

壳体结构用于土建工程也是比较早的。于 19 世纪初钢筋混凝土技术出现之后，便用于建造地下污水管（园柱形壳体）以及建造园柱形屋盖、球状园顶等类建筑物。于本世纪 20—30 年代国外建造薄壳屋盖很多。我国于解放后建造的也很多，如：

北京车站广厅屋面  $35\text{m} \times 35\text{m}$  双曲扁壳，曲率半径  $45.5\text{m}$ ，壳厚  $8\text{cm}$ ，边缘逐渐加厚至  $15\text{cm}$ 。用于高架候车室屋面为  $16.5\text{m} \times 16.5\text{m}$  及  $16.5\text{m} \times 21.5\text{m}$ ，厚为  $6\text{cm}$ （建于 1958 年）。山东体育馆比赛大厅双曲扁壳  $48 \times 48\text{m}$ ，中下壳厚  $6.5\text{cm}$ ，边缘增至  $15.0\text{cm}$ 。矢高  $\frac{1}{5}$ 。南通市候船室装配整体式双曲扁壳  $20 \times 20\text{m}$ 。中下厚

$3\text{cm}$ 。壳板中面有纵横肋共 10 条，建于 1962 年。北京民航局多波形园柱形薄壳跨度  $25\text{m}$ ，波长  $4.5\text{m}$ ，共 9 波，厚度  $6\text{cm}$ ，徐州车站园柱形薄壳跨度  $16\text{m}$ ，波宽  $9\text{m}$ ，厚  $6\text{cm}$ 。北京全国农展气象馆，球形薄壳屋盖，直径  $18\text{m}$  曲率半径  $15\text{m}$ ，矢高  $3\text{m}$ ，厚  $6\text{cm}$ 。新疆某机械厂金工车间厂房屋盖椭圆旋转面园形薄壳，直径  $60\text{m}$ ，矢高

11.5 m，壳厚 8 cm。上海嘉定光学玻璃厂大炉车间为跨度 24 m 波宽为 7.5 m 的圆柱形薄壳，厚 13.5 cm。上海交通大学食堂为五跨多波形薄壳跨长 10 m，波宽 4 m（共五波）的圆柱形薄壳屋盖，厚 9.5 cm。北京网球场是  $42 \times 42$  m，厚为 17.1 cm 的双曲扁壳。由许多扭壳可以连成一大片（图 8-4(c)）屋盖作为工厂车间及仓库等建筑物如武汉汉阳汽车配件厂由 12 只  $12 \times 12$  m 扭壳连成的车间……。

在航空工业方面飞机的机身是一个薄壳结构，飞机在飞行及起落时这个薄壳会受到压缩，弯曲，剪切及扭转等荷载作用。这里除了强度问题外，还有壳体失去稳定（屈曲）而破坏的问题，同时还有重量要轻，刚度要大等问题。近年来，飞机机身的薄壳力学问题主要是由于飞机速度的提高（如为声速的 1—3 倍）以及飞机飞行高度提高（如 2—3 万公尺）所引起的。以超音速速度飞行的飞机的机身及机翼会发生颤振迫使壳体产生过大的变形最后疲劳破坏造成事故。高速飞行的飞机机身壳体结构与空气摩擦产生高温引起热屈曲及蠕滑屈曲等问题。飞机飞得高了，机舱外的空气稀薄，舱内维持正常气压于是机身成为一个内加压力的壳体。如果设计不慎机身将沿窗口出现应力集中的裂缝，扩展开来就引起机毁人亡的事故。

在造船工业方面壳体结构问题始终围绕着一个潜水艇艇身的制造问题在研究。这是一个受到较大外压力的圆柱形薄壳的屈曲问题及强度问题。海水深处的压力是非常巨大的，如海水下一公里的压力约是 100 个大气压力，如果潜艇设计不妥便会给海水压得象一只干瘪的辣椒一样。潜艇受到敌人深水炸弹的袭击还须研究圆柱形壳受冲击波作用的反应，应力波的传递以及有关振动等问题。

化学工业，石油化工工业，食品工业中所用的壳体是大大小小的各种形状的旋转薄壳或厚壳。如圆柱形的合成氨塔内压力即达几百个大气压力，但做炼乳用的圆柱形薄壳球形薄壳是真空塔。内压容器是强度问题，外压容器是屈曲问题。石油工业中各种油库如圆柱形的球形的水滴形的都是些轴对称旋转薄壳问题。轨油轨汽的管道也都是些壳体问题。我国近年来所修造的石油罐用于贮藏石油都是轴对称旋转薄壳，贮存石油以万立方米计。

水利电力工程中最先应用的壳体结构是泄洪门和虹吸管等。三通四道的交叉管道属于组合的薄壳的应力集中问题至今还在研究，它们

常常称为叉管。建筑在二个山谷之间的薄拱坝实际上是“壳板坝”，有关这种坝的强度，温度及地震引起的振动问题现在可以利用较为精确的有限单元法理论依靠电子计算机进行分析计算。

原子能发电站中的燃料室是一个忍受高温，高压及高密度放射线束的圆柱形薄壳，原子能电站中的压力容器安全壳等都是壳体，设计时难题很多。

火箭导弹及人造卫星都是些壳体结构，它们是组合的旋转薄壳，设计的要点是重量要轻，能经得住空气摩擦产生的高温及巨大的气体推动力。

## § 8-2 薄壳力学的基本知识

一、定义——按照目前国内外公认的概念，所谓薄壳体的厚度  $t$  与壳体中面的最小曲率半径  $R_{min}$  之比小于  $1/20$ ，即 (8.1.1)：

$$\frac{t}{R_{min}} \leq \frac{1}{20} \quad (8.2.1)$$

这里所谓壳体的中面是平分壳体厚度的曲面 (图 8.2.1)。所谓最小曲率半径是中面上某点  $M$  的一个较小的主曲率。圆柱形曲面及圆锥形曲面上的母线的曲率 (为零) 都是主曲率。另一个主曲率就是垂直于母线的圆弧线的曲率，曲率中心在轴线上。球形曲面任一点两个主曲率半径相同，也是最小曲率半径。



图 8.2.1

一种壳体如果  $\frac{t}{R_{min}} > \frac{1}{20}$  便算是中厚壳或厚壳 (8.1.1)。

### 二、薄壳的分类：

#### 1. 按中面的外形来分：

(1)、旋转薄壳——这类薄壳最常见，薄壳的中面以一根平面曲线绕一定轴旋转而得。常见的旋转薄壳有：



球壳（全球或下分球）；圆柱形壳（封闭的及开口的）；圆锥壳（截头的或有尖顶的）；单叶双曲面壳（常作为冷却塔用），环壳（图 8.2.2），抛物面壳，椭球面壳，水滴形壳（如一水滴形状）。

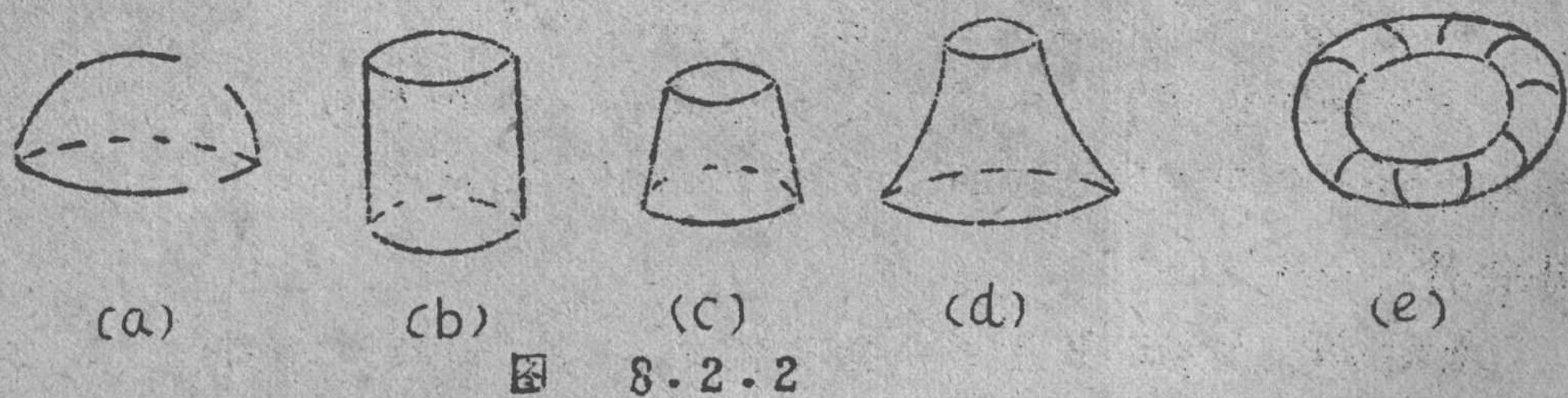


图 8.2.2

(2)、扁壳——顶隆起得不高的壳体。壳顶离开壳的底平面的高度称为矢高  $f$ （图 8.2.3）。当矢高  $f$  与底平面特征尺寸  $l$ （如球壳底半径  $R$  或矩形底扁壳矩形底短边  $a$ （见图 8.2.3）之比是

$$\frac{f}{l} < \frac{1}{5} \quad (8.2.2)$$

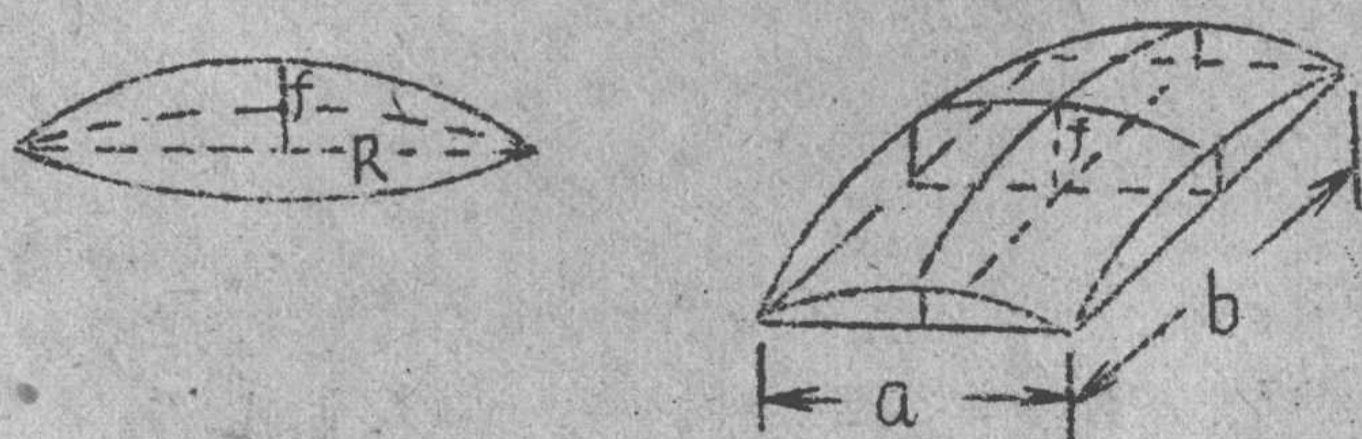


图 8.2.3

这个壳体就称为扁壳。扁壳的底可圆可方亦可为其他形状，扁壳的面可以是圆柱形的，球形的，圆锥形的，双曲抛物面形的或其他的曲面。

(3)、组合薄壳——由几只简单几何形状的壳体联合而成的壳体称之为。老式的锅炉由一只圆柱形薄壳两端复盖两只顶盖（例如球壳）组合起来，是一只组合的旋转薄壳（图 8.2.4a）。由一只尖顶壳及圆柱形壳等所组成的火箭导弹外壳也是一只组合的旋转薄壳（图 8.2.4b）。由四只双曲抛物面壳块组成的屋顶（图 8.2.4c）是组合薄壳。两管交镶而成的叉管（图 8.2.4d）是一种组合壳。

于微分几何学中（第九，第十二章及附录），曲面上任意点两个主曲率的乘积称为高斯曲率。薄壳也可按高斯曲率分为三类即中面高

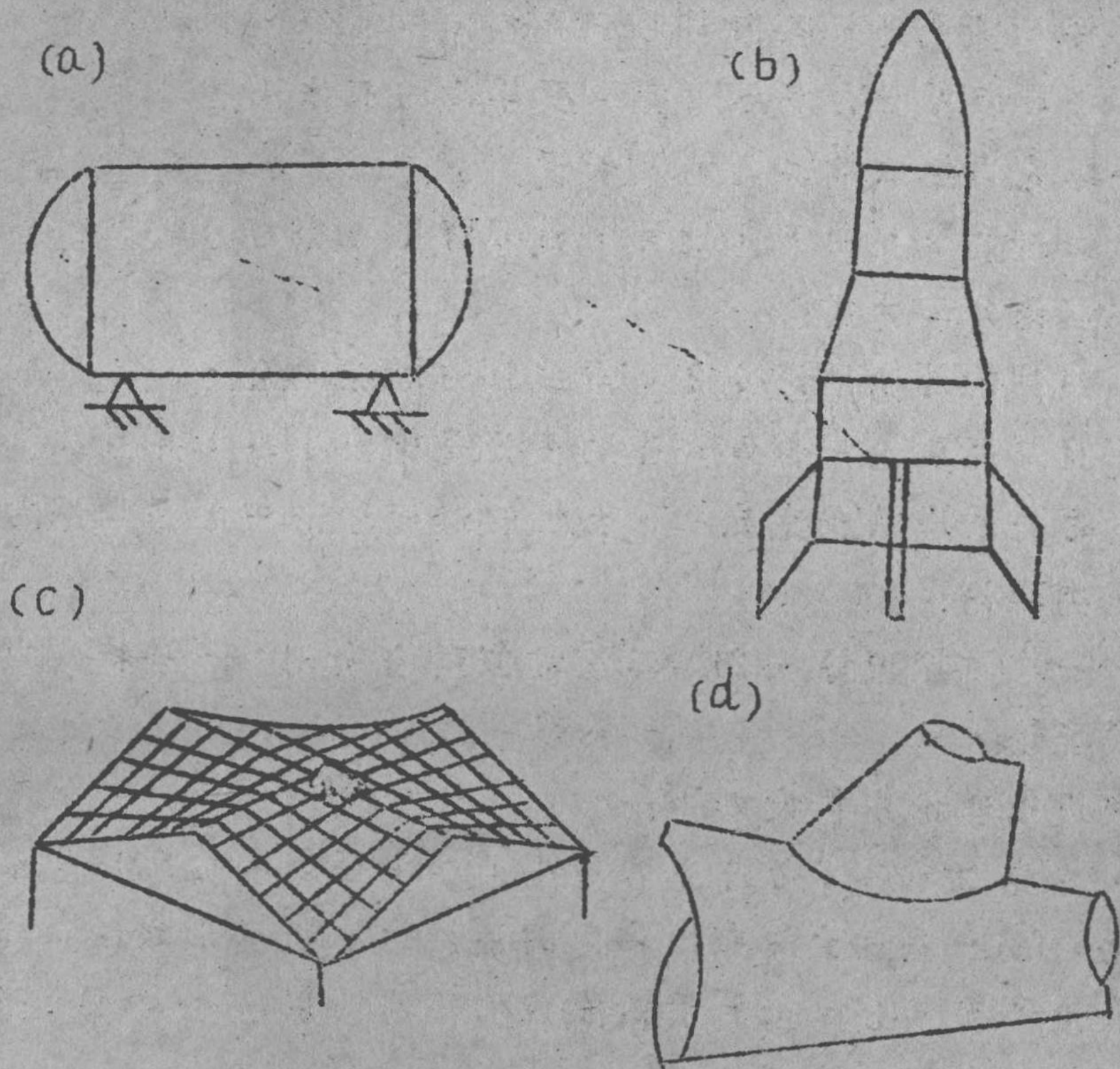


图 8.2.4

斯曲率是正的(两个主曲率半径在中面的同一边)零的(中面一个主曲率为零)及负的(两个主曲率半径在中面的两边)也是一种常用的壳体分类法。

## 2. 按薄壳的构造形式来分:

(1)、光面壳与加劲壳——毫无加肋内外两面光滑的壳体是光面壳。壳的一面或两面加了加劲肋条就是加劲壳了,图8.2.5所示一个圆柱形薄壳内下于纵向及环向都具有加肋的情况。壳加肋后强度及稳定性大为增高。

(2)、夹心壳——壳板的构造是上下二层面板中间夹有一层夹心材料如图8.2.6所示。夹心材料形式不一,较多用六角形蜂窝状的构造。抗力特点是面板抗弯,夹心抗剪。

(3)、多层壳——壳体由多层壳板叠合而成常作为高压容器的构造形式。

3. 按材料可分为各向同性壳及各向异性壳。

4. 按厚度可分为等厚度壳及变厚度的壳体等。

### 三、薄壳力学的计算理论及假设

为了要进行薄壳的工程设计，我们需要薄壳的力学理论知识。薄壳的力学理论分两大类：

1. 线性的薄壳理论；2. 非线性的薄壳理论。

线性的薄壳理论中假设薄壳的变形是比较小的，并且薄壳中的应力与应变的关系服从虎克定律，线性的薄壳理论中根据理论的精确度等分为四类理论：

(1)、一次近似理论；(2)、二次近似理论；(3)、一些特殊的理论；(4)、薄膜理论。

一次近似理论中假设如下：

(1)、薄壳的厚度  $t$  与薄壳的最小曲率半径  $R_{min}$  之比是很小的可加以略去。(2)、垂直于薄壳的中面的法线于薄壳变形之后仍然保持垂直并且长度不变。(3)、平行于中面的应力很小可以略去。(4)、壳体形变式中的高阶量加以略去。

二次近似理论中保留了如  $\frac{z^2}{R}$  的一些量 ( $z$  是壳中任意点离开中面的垂直距离， $R$  是该点的曲率半径) 以此较为精确。

特殊的薄壳理论指扁壳计算理论及考虑横向剪切变形的计算理论等。后者考虑了近似理论中略去的剪切变形问题。

完全略去了弯曲变形因素的薄壳理论称为薄膜理论。

非线性薄壳理论指两个方面，一是“物理非线性”，二是“几何非线性”。作为薄壳的材料呈现弹性，但是应力与应变的关系是一种非线性函数的关系。考虑这种弹性关系的薄壳理论称为物理非线性的薄壳理论。几何非线性的薄壳理论就是大挠度的薄壳理论，在这种理论中保留了变形的高阶项。非线性理论是很复杂的，现在还未发展成熟。

我们学习的薄壳理论是线性的一次近似理论及线性薄膜理论。

### 四、薄壳的内力及外力

作用在薄壳上的外力一般是分布载荷，例如壳板的自重，土压力，雪重，水压力，气体压力及风压力等。集中力则较少见。所有这些分布载荷都须化为壳板的单位面积的量计算。在理论计算中还须将分布载荷分为坐标方向的分载荷，亦须以单位面积计量。

一定边界条件的薄壳结构在外力作用下（也可以是温度差别，材料收缩等引起），一般地在壳体的正交曲线坐标线方向的两个相互垂直的截面上会产生10个内力，这10个内力可以分为二个内力系统——薄膜内力系统和弯曲内力系统。薄膜内力系统共有4个力，这实际上就是薄膜平面问题的4个内力：

$N_\alpha$ —— 坐标线 $\alpha$ 方向的拉（压）力；	} 中面拉（压）力
$N_\beta$ —— 坐标线 $\beta$ 方向的拉（压）力；	
$N_{\alpha\beta}$ —— 坐标线 $\beta$ 方向的剪力；	} 中面剪力
$N_{\beta\alpha}$ —— 坐标线 $\alpha$ 方向的剪力。	

这些内力的特点是沿着壳体的厚度大小不变（图8.2.7a、b）。它们的大小都以单位长度计量。



图 8.2.5

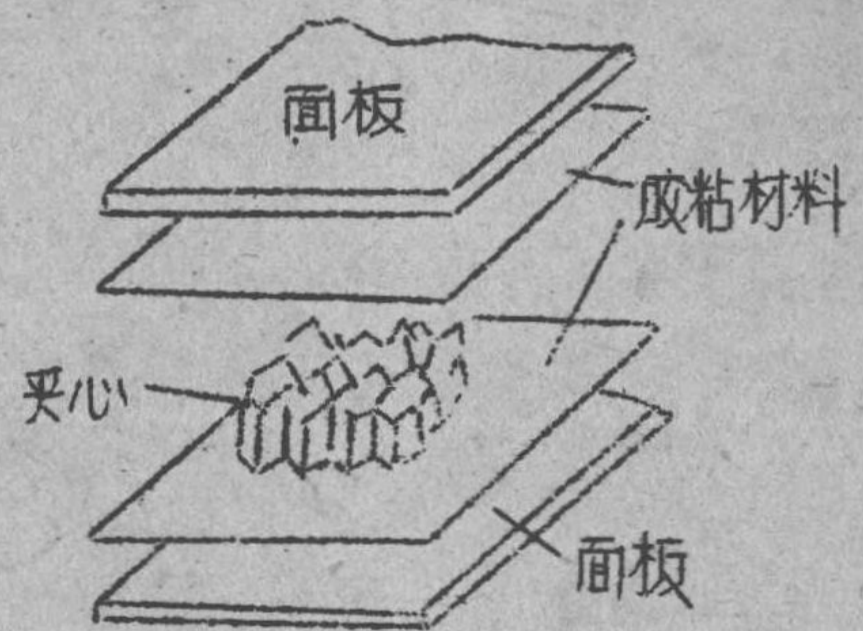


图 8.2.6

所有薄壳内力的大小都以单位长度计量。

弯曲内力系统共有6个内力，实际这些就是薄板弯曲问题中的6个内力（图8.2.7c、d、e）。

$M_\alpha, M_\beta$  —— 分别为沿  $\beta$  及  $\alpha$  坐标线截面上的弯矩；

$M_{\alpha\beta}, M_{\beta\alpha}$  —— 分别为沿  $\beta$  及  $\alpha$  坐标线截面上的扭矩。

$Q_\alpha, Q_\beta$  — 分别为沿  $\beta$  及  $\alpha$  坐标线截面上的横剪力。

五、薄壳的位移变形和弹性关系

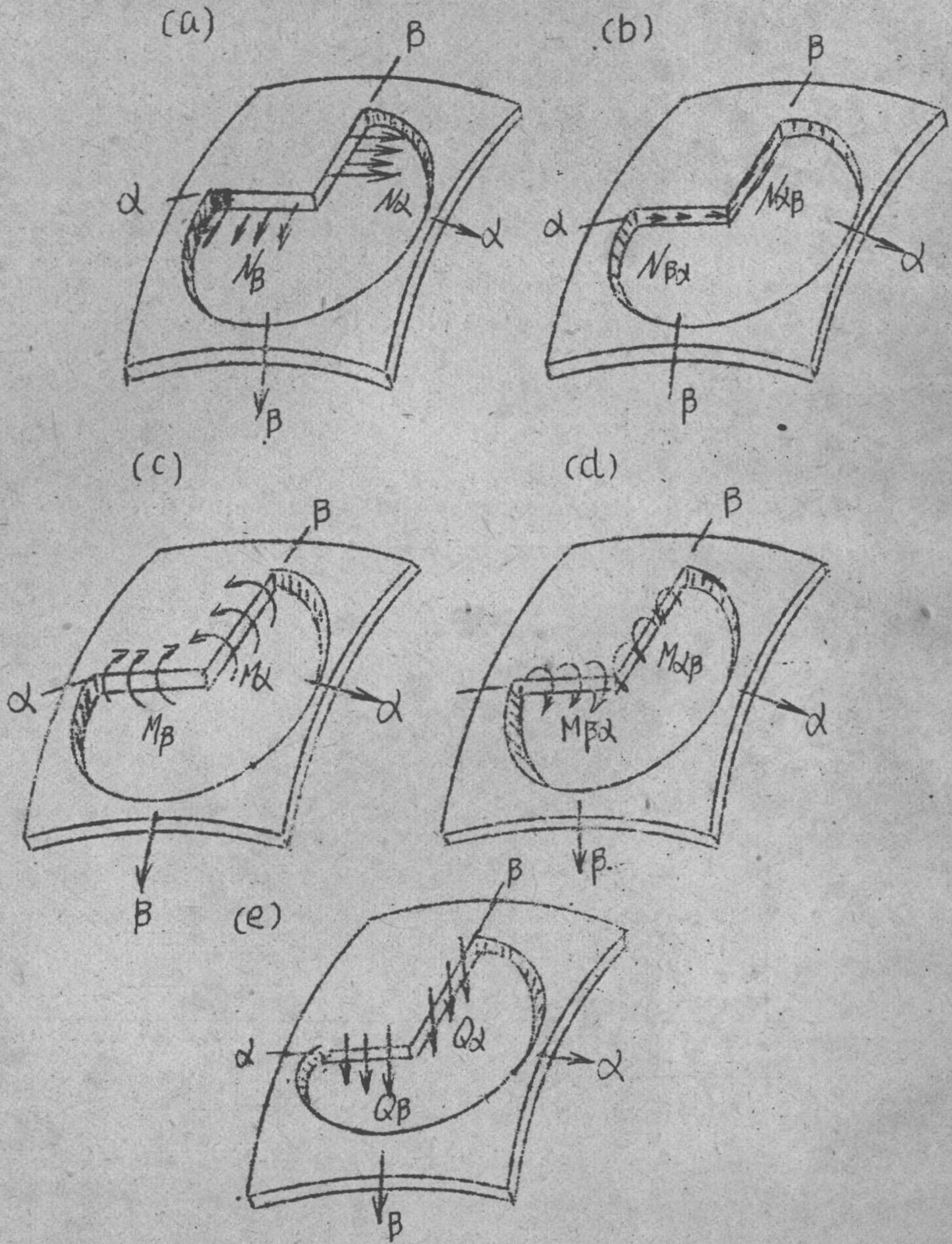


图 8.2.7

薄壳受到荷载等的作用便会发生变形。薄壳任一点与变形后的位移是  $u$ 、 $v$  及  $w$ ，这是对应于正交曲线坐标  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  切线方向的位移量。

我们如果沿着坐标线的方向切出一个体素（一个壳板）来研究它

的变形，我们将发现这个壳板体素的变形虽然比较复杂只有6个基本变形量：

$\epsilon_\alpha$  —— 沿着  $\alpha$  方向的单位长度的伸长（缩短）；

$\epsilon_\beta$  —— 沿着  $\beta$  方向的单位长度的伸长（缩短）；

$\epsilon_{\alpha\beta}$  —— 这个壳板  $\alpha - \beta$  方向的剪切角；

$\kappa_\alpha$  —— 沿着  $\alpha$  切向的曲率改变；

$\kappa_\beta$  —— 沿着  $\beta$  切向的曲率改变；

$\kappa_{\alpha\beta}$  ——  $\alpha - \beta$  方向的扭率改变。

前三种形变是薄壳体素的中面形变；后三种是弯曲形变。至于薄壳体素的横剪切形变在近似理论中是被略去的。由此可知，薄壳任意点的形变基本上是板的平面问题中的形变与板弯曲问题中的形变的叠加。但是必须考虑壳的特点。

所有薄壳的形变都可用薄壳的正交曲线坐标位移表达出来，这些就称为形变几何方程或形变与位移的关系式等，我们以后会论述到它们。

联系薄壳的内力与形变的方程式称为弹性关系。这在薄壳力学理论中有6个，其中三个是中面内力与中面形变的关系，另外三个是弯曲内力与弯曲形变的关系。

## 六、薄壳的静力平衡微分方程式，形变连续条件及边界条件

### 1. 静力平衡微分方程式

我们在薄壳上沿着正交曲线坐标切割出一个微小的壳板体素，我们把作用在体素上的外力分成三个坐标轴方向的分力再在截面上列出所有内力，于是我们可以列出6个静力平衡微分方程式：

$$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0, \Sigma M_\alpha=0, \Sigma M_\beta=0, \Sigma M_\gamma=0 \quad (8.2.3)$$

这些静力平衡微分方程式要比板平面问题及板弯曲问题的平衡微分方程式为复杂。因为我们要考虑到这体素上力及力矩矢量方向的变化，由于正交曲线坐标带来的线段长短及截面大小的变化等。

在这6个静力平衡微分方程式中比较主要的方程式是  $\Sigma Z=0$  而  $\Sigma M_\gamma=0$  是一个恒等式。

### 2. 形变连续条件——前面所述及的薄壳的6个形变几何方程式

中如果设法消去位移  $u$ 、 $v$ 、 $w$  则可以得到三个联系 6 个形变的方程式。这说明 6 个形变之间必须有一定的约束条件，不能够随心所欲任意设立。这三个条件称为薄壳的形变连续性条件。(8.1.2)(8.1.3) 就象弹性力学平面问题中有形变连续性条件的情况一样，但是形式要复杂得多。

3. 边界条件——线性薄壳理论中所需用的边界条件每边有 4 个。举例如下：

(1)、固定的——三个位移及一个转角为零；

(2)、简支的——三个位移为零，一个弯矩为零；

(3)、自由的——四个内力（二个薄膜的及二个弯曲内力）皆为零。

一般地说，壳板被嵌固在十分刚固的支承物体中才算是固定的，如果微有转角便可考虑是简支的。实际工程中这是弹性嵌固的边界条件这里须要知道支承物体的刚性系数即单位位移的反力等。

在薄膜理论中壳的每边只有二个边界条件。

七、如何解算薄壳的力学问题——有两条途径，一是经典理论解析法，二是数值解法。

1. 经典理论解析法可分为位移法及力法

(1)、位移法——以壳体的三个位移分量  $u$ 、 $v$ 、 $w$  作为未知量，五个有效的静力平衡微分方程式以  $\Sigma M_\alpha = \Sigma M_\beta = 0$  二个方程式代入  $\Sigma X = 0$ ， $\Sigma Y = 0$ ， $\Sigma Z = 0$  方程式中后，于是只有三个偏微分方程式。这三个偏微分方程式中的内力通过弹性关系及形变几何方程式化为以位移分量表示的形式。于是根据边界条件等在这三个偏微分方程式中解出  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 。位移分量  $u$ 、 $v$ 、 $w$  求得后即根据形变几何方程求薄壳的形变，再由弹性关系求得内力。

(2)、力法——未知量是壳体的 8 个内力 ( $N_\alpha$ ， $N_\beta$ ， $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ ， $M_\alpha$ ， $M_\beta$ ， $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ ， $Q_\alpha$  及  $Q_\beta$ )。使用的方程式是五个有效的静力平衡微分方程式及三个形变连续条件。在三个形变连续条件中须通过弹性关系把形变量化为内力量。

如果不用形变连续条件，可以将  $u$ 、 $v$ 、 $w$  亦作为未知量（未知量共 11 个），再用 6 个弹性关系（方程式也是 11 个）我们以后要使用后面一种方法。

2. 数值计算方法

(1)、差分法——以壳体的定解方程式（许多方程归并成为一个或二个偏微分方程式称之）化为差分的形式，边界条件亦化为差分的形式后，列出壳体差分网格每一交点的差分方程后，解大量线性代数方程式得到未知量，这个方法现在已很少看到。

(2)、有限单元法——有位移法及混合法等，有限元法分析薄壳强度问题象平面问题及板弯曲问题一样先把薄壳划分成较多单元，若是位移法则先列出每个单元的刚度（即单位位移的内力）列成矩阵。壳体的刚度矩阵一般是板平面问题及板弯曲问题刚度矩阵的叠加。有秩序地叠加所有单元的刚度元素即得到壳体的刚度矩阵。由于单元在空间方向不一致还须考虑单元的方位问题，把所有的量都化为大坐标的量。最后列出定解方程引入边界条件载荷量等求解未知量（位移，转角或其他）。根据求得的未知量可求内力及应力等。有限单元混合法中则同时以单元的内力及位移作为未知量。

有限单元法解壳体问题所用的单元有平板的，有曲板的，有三角形的，有矩形，有四边形的……种类较多。这个方法突出的优点是方法通用可解任意荷载作用任意几何形状，边界条件，弹性性质及弹塑性的复杂壳体强度问题。使用电子计算机时需要计算机的贮存量较大，程序也较复杂。能解经典薄壳理论无法解决的问题是这个方法突出的优点。

八、其他薄壳力学问题——薄壳力学问题中有时屈曲问题远较强度为重要。所以考虑薄壳力学问题时不能单纯地只考虑强度问题。在薄壳设计时须同时考虑薄壳强度及薄壳屈曲问题，才不致出重大差错。考虑薄壳屈曲问题时须使用薄壳的大挠度理论及求特征值法的数学工具。当前，薄壳的强度及屈曲问题科研工作做得已较多，大多数问题只须查表求解。

薄壳的其他力学问题如振动，冲击，热应力，弹塑性强度问题，非线性问题，应力集中问题，蠕变，疲劳，安定，应力波传播，断裂力学等问题。这些薄壳力学问题也有经典解法也有数值解法。有些现在已有解有些国内外正在研究探索之中。用有限单元法或其他数值解法利用电子计算机技术等上列一般问题都能获解。实际上，电子计算



机技术使得薄壳力学计算方法发生了重大的技术革命。

### § 8.3 薄壳力学发展简史

薄壳力学理论的发展较薄板力学理论的发展为迟。如果以1820年，即纳维埃提出薄板弯曲问题完善理论的一年作为薄板理论奠定理论基础之年则提出薄壳弯曲理论要迟五十多年。

于1870年以后，由于薄壁结构〔8.3.1〕应用较多，薄壳力学理论引起许多研究者的注意。薄壳的薄膜理论，如旋转薄壳，球形与圆柱形壳体的薄膜理论早已被解决。在薄壳的弯曲理论方面首先于1874年由德国的H.阿龙(H. Aron)提出来的〔8.3.2〕，可是阿龙的薄壳理论有些重要的缺点，这些缺点后来由英国A.勒夫(A. Lore)所纠正〔8.3.3〕。勒夫并导出与薄板理论相似的薄壳理论。这个理论在他后来的著作〔8.3.4〕中又作了进一步的修正。

勒夫的理论中采用了薄板理论中的基本假设(直法线假设)，在这一点上可以看出薄壳理论的发展是受到薄板理论的影响的，这也是必然的。可是薄壳理论中采用了直法线假设等并不如薄板理论那样单纯。例如，有些理论式中的微量舍弃不一，就导致一些内力和方程的写法也不能肯定下来。这方面的工作，按诺沃日洛夫(В.В. Новожилов)的说法是由苏联B.Г.伽辽金(В.Г. Галеркин)加以纠正的〔8.3.5〕。不过，诺氏在他著作中确实对于壳体方程中的微量注意区别，并且曾经证明采用直法线假设等所导出的薄壳理论的误差为壳厚 $t$ 与曲率半径 $R$ 之比( $t/R$ )，以此也证明了采用直法线假设来建立薄壳理论是允许的。

E. E西喜勒〔8.3.6〕曾统计了从1886年到1960年有关壳体分析，设计及破坏的论文。1884—1890有43篇，1896—1900只有9篇，1905年约10篇，1910—1925平均每年约10篇不足，1930年30篇，1935年40篇，1937年61篇，1940年跌到约36篇，1945年约38篇，1948年103篇，1955年约191篇。与当时工业发展情况对照：1900以前是锅炉设计，管道设计，车胎制造，炼乳的真空容器，压力锅，罐头，1900年以后是蒸汽机汽缸，灯泡工业，潜水艇造船工业，建筑上的圆顶壳体，大钟的制造工业，隧道工程，蓄水塔，金属壳体的飞机，各种壳体的稳定问