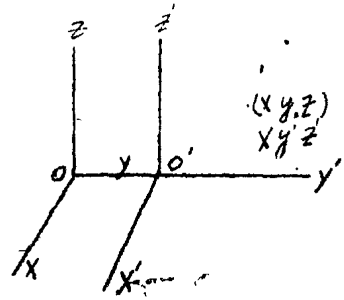
質點動力學

I 質点運動方程式

甲.在　知力下運動的決定



慣性系統 ，如有力$\vec{F}$作用於質量為m的質点，观察的结果我們知道如以太陽系之中心為我們的參考坐標系統，則質点之加速度$\vec{a}$可由牛頓之第二運動定律求出　即

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z})$$

如 $\vec{F} = \hat{i}X + \hat{j}Y + \hat{k}Z$

$$X = m\ddot{x}$$
$$Y = m\ddot{y}$$
$$Z = m\ddot{z}$$

牛頓之第二定律在任何以等速作直線運動之坐標系統中仍是成立的，如OXYZ為以太陽系之中心為原点的坐標系統；O'X'Y'Z'為以速度$\hat{j}v_y$而移動之坐標系，(x,y,z)及(x',y',z')為質点對兩個坐標系之坐標，由圖得：

$$x = x', \quad y = (y' + v_y t) \quad z = z' \qquad (\text{如當}t=0\text{時}O\text{與}O'\text{重合})$$

則　$\ddot{x} = \ddot{x}' \quad \ddot{y} = \ddot{y}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}'$

所以在O'X'Y'Z'坐標系中，牛頓的運動定律仍能成立。對於某一系統如牛頓之第二定律可以成立，我們稱這系統叫做慣性系統。任何對於太陽系之中心做等速運動之系統皆為慣性系統

在慣性系統中如力為已知，則質点之加速度可以求出$\vec{F} = m\vec{a}$，即為質点之運動方程式，$\vec{F}$為作用於質点之力的合力

(i)直角坐標的運動方程式

$$\vec{F} = \hat{i}X + \hat{j}Y + \hat{k}Z \qquad \vec{a} = (\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z})$$

$$X = m\ddot{x}, \quad Y = m\ddot{y}, \quad Z = m\ddot{z},$$

(ii)圓柱坐標系統中的運動方程式　（參看質点運動學之筆記）

$$\vec{F} = \hat{i}F_R + \hat{j}F_\varphi + \hat{k}F_z$$

則 $F_R = m(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)$

$F_\phi = m\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi})$

$F_z = m\ddot{z}$

(iii)球面坐標系統之運動方程式

$$\vec{F} = \hat{i}F_r + \hat{j}F_\theta + \hat{k}F_\phi$$

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

$$F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)$$

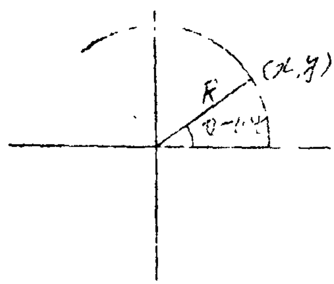
$$F_\phi = m\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi})$$

我們希望可由運動方程式的積分而求出質点的速度與位置.

乙.在已知運動下力的決定

如已知質点運動時其位置與時間的關係，則我們可求出作用於質点的力，今舉数例以示之

(i)圓周運動



$x = R\cos\omega t$， $y = R\sin\omega t$

$\dot{x} = R\omega\sin\omega t$

$\dot{y} = R\omega\cos\omega t$

$\ddot{x} = -R\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x$

$\ddot{y} = R\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y$

$\vec{F} = m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y}) = -m\omega^2(\hat{i}x + \hat{j}y) = -m\omega^2\vec{r}$

如 $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$

即質点作圓周運動乃由向下力$\vec{F}$所引起的.

(ii)橢圓運動

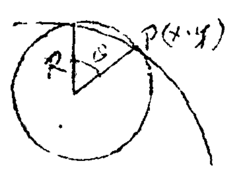
$x = a\cos\omega t$　　$y = b\sin\omega t$

$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t$　　則 $\ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x$

$\dot{y} = b\omega\cos\omega t$　　$\ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y$

$\vec{F} = +m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y}) = -m\omega^2\vec{r}$.

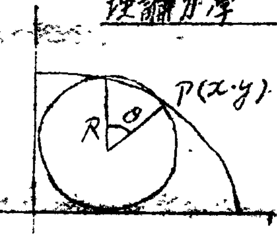
(iii)運動軌跡為一擺線，



$\theta = \omega t$

$x = R(\theta + \sin\theta) = R(\omega t + \sin\omega t)$

$y = R(1+\cos\theta) = R(1+\cos\omega t)$



我們知道擺線為在直線上滾動之圓上一点的軌跡，R 為此圓的半徑

$$\vec{F} = \hat{i}(\ddot{x}) + \hat{j}\,\ddot{y} = -m\omega^2[\hat{i}R\sin\omega t + \hat{j}R\cos\omega t]$$
$$= -m\omega^2 \vec{r}$$

∴質点所受之力乃向圓之中心，

丙 運動方程式的積分

如質点之運動方程式為

$$X = m\ddot{x}$$
$$Y = m\ddot{y}$$
$$Z = m\ddot{z}$$

我們要証明：如質点之初速度和原位置為已知，則質点的運動可以求出

如質点之初速為已知 $(\dot{x})_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = V_{0x}$

同理 $(\dot{y})_0 = V_{0y}$　　$\dot{z}_0 = V_{0z}$

質点之原位置為 (x_0, y_0, z_0)

假定力為位置，速度与時間的函数

$$X = X(x, y, z, V_x, V_y, V_z, t)$$
$$Y = Y(x, y, z, V_x, V_y, V_z, t)$$
$$Z = Z(x, y, z, V_x, V_y, V_z, t)$$

因為 $\ddot{x} = \frac{X}{m}$

則當 $t = t_0$ 時 $\ddot{x}_0 = \frac{X(x_0, y_0, z_0, V_{x0}, V_{y0}, V_{z0})}{m}$

如原位置与初速為已知，則 $\ddot{x}_0$ 可求出，同理我們可以求出 $\ddot{x}_0$ $\ddot{y}_0$ $\ddot{z}_0$ $\dddot{y}_0$, $\dddot{z}_0$ ---- ---- 等高級導函数在 $t = t_0$ 時之值，我們可將 x, y, z 以泰來級数展開.

令 $t_0 = 0$

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2}\ddot{x}_0 t^2 + \frac{1}{3!}\dddot{x}_0 t^3 + \cdots$$
$$y = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{1}{2}\ddot{y}_0 t^2 + \frac{1}{3!}\dddot{y}_0 t^3 + \cdots$$
$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{1}{2}\ddot{z}_0 t^2 + \frac{1}{3!}\dddot{z}_0 t^3 + \cdots$$

因 x_0, y_0, z_0, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ---- 等皆為已知，所以 x, y, z 可求出，嚴格說來我們仍應証明上面之級数為收斂的，但在物理的觀点來看這

証明不是必要的，在我們要討論的題目中，級数都是收斂的，所以如質点在某時刻之位置与速度為已知，在理論上我們可以求出運動方程式的解答，但我們會說可以由直接積分而求得答案的問題並不多，在比較複雜的問題中，我們要用数字積分的方法去求得答案。現在舉幾個簡單的例子來説明如何求運動方程式的解答：

1) 力為常数 $X=$ 常数

$$m\ddot{x}=X$$

$$m\frac{dv_x}{dt}=X$$

如 $t=t_0$ 　 $v_x=v_0$

$$m(v_x-v_0)=X(t-t_0) \qquad \text{因} \; v_x=\frac{dx}{dt}$$

或 $\frac{dx}{dt}=v_0+\frac{X}{m}(t-t_0)$

当 $t=t_0$ 　 $x=x_0$

$$x=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{X}{2m}(t-t_0)^2$$

2) 力為時間之函数 $X=X(t)$

$$m\ddot{x}=X(t)$$

$$v_x=v_0+\int_{t_0}^{t}\frac{X(t)}{m}dt$$

$$\frac{dx}{dt}=v_0+\int_{t_0}^{t}\frac{X(t)}{m}dt$$

$$x=x_0+v_0(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t}\frac{X(t)}{m}dt$$

3) 力為時間，位置与速度之函数 $X=-ax-b\frac{dx}{dt}+F(t)$

a，b 為常数.

則運動方程式為

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+ax=F(t)$$

此為常係数之直線微分方程式，如 $F(t)$ 為簡単之時間的函数，這個運動方程式的解答可以求得.

丁. 動能与位能

動能之定義 如一質点運動之速度為 $\vec{v}$，則其動能 $T=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$ $=\frac{1}{2}mv^2$；$\vec{v}=\hat{i}\dot{x}+\hat{j}\dot{y}+\hat{k}\dot{z}$，則 $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

質点的運動方程式

$$m\ddot{x}=X \quad (1)$$

$$m\ddot{y}=Y \quad (2)$$

$$m\ddot{z}=Z \quad (3)$$

將(1)(2)(3)式各乘以dx, dy, dz而相加，我們得

$$m\ddot{x}dx+m\ddot{y}dy+m\ddot{z}dz=Xdx+Ydy+Zdz \quad (4)$$

即 $$d\tfrac{1}{2}(m\dot{x}^2+m\dot{y}^2+m\dot{z}^2)=\vec{F}\cdot\vec{ds} \quad (4')$$

如 $\vec{F}=\hat{i}X+\hat{j}Y+\hat{k}Z$, $\vec{ds}=\hat{i}dx+\hat{j}dy+\hat{k}dz$

將(4)式積分

$$\int_{v_0}^{v}d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=\int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z}Xdx+Ydy+Zdz$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0y_0z_0}^{x,y,z}Xdx+Ydy+Zdz \quad (5)$$

由方程式(5)，我們知道当質点由$(x_0y_0z_0)$運動至(x,y,z)時，其動能的增加為作用於質点的力所作的功.

如質点係在保守力場中運動，則X, Y, Z可由其位能$V(x,y,z)$之導函數求得，即$X=-\frac{\partial V}{\partial x}$, $Y=-\frac{\partial V}{\partial y}$, $Z=-\frac{\partial V}{\partial z}$

則(5)式可寫為

$$\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2=-\int_{x_0y_0z_0}^{x,y,z}dV=V(x_0y_0z_0)-V(x,y,z)$$

即 $$\tfrac{1}{2}mv^2+V(x,y,z)=V(x_0,y_0,z_0)+\tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad (6)$$

此為力學中的能量不滅定律，当質点在保守力場中運動時其動能与位能之和恒不变.

令 $E=T+V$

方程式(6)可寫為 $E=$常數，E為質点之總能量

下面習題中所求的多為簡單的質点運動，我們用牠做為對簡單動力學之複習及做為討論較複雜的運動時之準備.

(C)力量与動量矩

動量之定義 質量為m之質点以速度$\vec{v}$運動時，其動量為$m\vec{v}$，因

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

為 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ 則牛頓第二定律可以寫為

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

即動量的變化率等於作用於質點的力

動量矩　因為動量是向量，則其對一點之向量矩為動量矩 $\vec{H}$

$$\vec{H}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

動量矩之變化率 $\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{r}}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\dot{\vec{v}}$

$$=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=\vec{C}=\text{力矩}$$

作用於質點之力矩等於動量矩之變化率，

如作用於質點之力為<u>中心力</u>，即 $\vec{F}$ 與 $\vec{r}$ 之方向相同，

則 $\vec{r}\times\vec{F}=0$　　　　則 $\dot{\vec{H}}=0$

即

$$\vec{H}=\text{常數}=\hat{i}C_1+\hat{j}C_2+\hat{k}C_3$$

$$\vec{r}\times m\vec{v}=\hat{i}C_1+\hat{j}C_2+\hat{k}C_3$$

因 $\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z$

$\vec{v}=\hat{i}\dot{x}+\hat{j}\dot{y}+\hat{k}\dot{z}$

$$m\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}=\hat{i}C_1+\hat{j}C_2+\hat{k}C_3$$

即 $m(y\dot{z}-z\dot{y})=C_1$　　(1)

$m(\dot{x}z-x\dot{z})=C_2$　　(2)

$m(x\dot{y}-y\dot{x})=C_3$　　(3)

以 x 乘(1)式，y 乘(2)式，z 乘(3)式再將三式相加，則得

$$C_1x+C_2y+C_3z=0$$

所以我們得到下面之結論；

受中心力作用的質點其動量矩（又名角動量）為常數。

質點的軌跡乃在通過原點之平面上

II　重力質點在真空中及具有阻力的介質中運動

甲　重力質點在真空中上升及下降

質點在真空中所受之重力為 $-\hat{k}mg$，所以運動方程式為

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0 & (1) \\ m\ddot{y}=0 & (2) \\ m\ddot{z}=-mg & (3) \end{cases}$$

初條件為當 $t=0$ 時，$x=0,\ y=0\ z=0,\ \dot{x}=0,\ \dot{y}=0,\ \dot{z}=v_0$

則方程式(1)(2)(3)之積分為

$$x=0,\quad y=0$$

$$\dot{z}=v=v_0-gt \quad (4)$$

$$z=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

質點所達之高度與速度的關係：由方程式(3)，$2\dot{z}\ddot{z}=-2g\dot{z}$ 我們可得 $v^2-v_0^2=-2gz$，当速度為零時質點所達之高度為 $z=\frac{v_0^2}{2g}$，由方程式(4)我們得到質點達此高度所需的時間 $t=\frac{v_0}{g}$。

同理我們可得在真空中下降之質點其速度與距離的關係為

$$\begin{cases} v=v_0+gt \\ z=z_0\pm v_0t\pm\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

乙、重力質點在具有阻力的介質中運動。

如空氣的阻力只為速度的函数，即 $R=mg\phi(v)$，令 $\phi(\lambda)=1$ 則当質點降落時，其運動方程式 $m\frac{dv}{dt}=mg-mg\phi(v)$

即 $\frac{dv}{dt}=g[\phi(\lambda)-\phi(v)]$

$$\int_0^t dt=\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\phi(\lambda)-\phi(v)}$$

当 $v\to\lambda$ 時 t 為無限大，即 λ 為質點運動時速度之極限。

当質點上升時其運動方程式為

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-mg\phi(v)$$

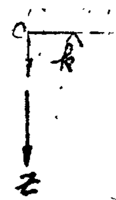
$$\frac{dv}{dt}=-g[\phi(\lambda)+\phi(v)]$$

$$t=-\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\phi(\lambda)+\phi(v)}$$

質點上升至最高點所需之時間為 $t=\frac{1}{g}\int_0^{v_0}\frac{dv}{\phi(\lambda)+\phi(v)}$

現在我們舉二例來表示動質点在在阻力的介質中降落的情形

(1) 阻力與速度成正比　　$R=mkv$　即 $\phi(v)=\frac{k}{g}v$



則質点之極限速度為 $\lambda = \frac{g}{k}$
運動方程式為

$$\frac{dv}{dt} = g - kv \qquad (1)$$

即 $v = C_1 e^{-kt} + \frac{g}{k}$

当 $t=0$ $v=v_0$，$\therefore C_1 = v_0 - \frac{g}{k}$，$v = v_0 e^{-kt} + \frac{g}{k}(1-e^{-kt})$ (2)

当 $t\to\infty$ 其為質点漸趨其極限速度 $\frac{g}{k}$。

由(2) $\frac{dz}{dt} = v_0 e^{-kt} + \frac{g}{k}(1-e^{-kt})$

$$z = z_0 + \left(\frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2}\right)(1-e^{-kt}) + \frac{g}{k}t$$

(ii)阻力与速度的平方成正比 $R = mgk^2v^2$ $\phi(v) = k^2 v^2$，

$v = \frac{1}{k}$ 時 $\phi(\frac{1}{k})=1$，則質点之極限速度為 $\lambda = \frac{1}{k}$.

運動方程式為 $\frac{dv}{dt} = g(1-k^2v^2)$ 如当 $t=0$，$v=0$ (1)

$$\int_0^t dt = \frac{1}{g}\int_0^v \frac{dv}{(1-k^2v^2)} = \frac{1}{kg}\tanh^{-1} kv$$

$$v = \frac{1}{k}\tanh kgt \qquad (2)$$

当 t 漸增大時 $\tanh kgt \to 1$，$v \to \frac{1}{k}$ 質点乃以等速降落

将方程式(2)積分

$$z - z_0 = \frac{1}{k^2 g}\log\cosh kgt$$

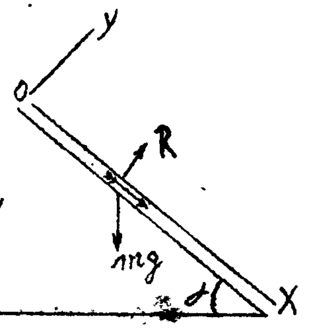
丙 質点由光滑的斜面上滑下　斜面之傾角為 α

$\ddot{x} = g\sin\alpha$　当 $t=0$ 時 $v=v_0$　$x=x_0$

則 $v = v_0 + g\sin\alpha\, t$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2$$

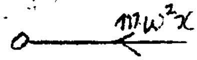
$$v^2 = v_0^2 + 2g\sin\alpha(s-s_0)$$



丁 質点在大小与位移成正比的力作用之下振盪，

甲，簡諧振子

簡諧振子為可在直線上運動之質点，其所受之力的大小与位移 $x\hat{i}$ 成正比，但方向与之相反，即 $\hat{i}X = -\hat{i}m\omega^2 x$ 質点的運動方程式為　$m\ddot{x} = -m\omega^2 x$



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

此方程式之解答為 $x=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ (2)
即質點運動乃為有週期性的諧和振盪，令 $a=\sqrt{A^2+B^2}$，
$\cos\epsilon=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$， $\sin\epsilon=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$，則方程式可寫為

$$x=a\cos(\omega t+\epsilon)$$

簡諧振子的振幅： 質點振盪之最大位移稱為振盪之振幅，因正弦之值乃在 $+1$ 與 -1 之間，所以質點之振幅為 a
簡諧振子的週期 振盪一週所需的時間為振盪之週期 τ.
即 $x=a\cos(\omega t+\epsilon)=a\cos[\omega(t+\tau)+\epsilon]$

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}$$

簡諧振子的頻率 每秒振盪之週數 ν 稱為頻率 $\nu=\frac{\omega}{2\pi}$
當 $t=0$ 時 $x=a\cos\epsilon$， ϵ 為質點之初相.

例＝單擺

單擺為一懸於輕繩上之重的質點，輕繩之他端固定於一點，質點所受之力為重力 mg 及繩之張力 T.
令 $AB=l$ $\angle OBA=\theta$， $\cos\theta=\frac{l-y}{l}$，$\sin\theta=\frac{x}{l}$，
運動的方程式為

$$m\ddot{x}=-T\sin\theta \quad (1)$$

$$m\ddot{y}=T\cos\theta-mg \quad (2)$$

如 θ 角為甚小 $\sin\theta=\theta$ $\cos\theta=1$

$$T=mg$$

則(1)為 $ml\ddot{\theta}+mg\theta=0$
令 $\omega^2=\frac{g}{l}$

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

$$\theta=a\cos(\omega t+\epsilon) \quad (3)$$

單擺之週期為 $\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
質點之速度 $\dot{\theta}=-a\omega\sin(\omega t+\epsilon)$ (4)
由(3)與(4)我們得 $\frac{\theta^2}{a^2}+\frac{\dot{\theta}^2}{a^2\omega^2}=1$
即當位移為最大時速度乃為零，速度為最大時，位移為零.

(ii)擾動振盪.

如質点所受之力除 $-\hat{i}\,m\omega^2 x$ 外尚有一力 $mX\hat{i}$

a. X 為任意常數.

$$m\ddot{x}\hat{i}=-m\omega^2 x\hat{i}+mX\hat{i}$$

$$\ddot{x}+\omega^2 x=X \qquad (1)$$

此方程式之解答可寫為

$$x=\frac{X}{\omega^2}+a\cos(\omega t+\epsilon) \quad (2)$$

方程式(2)代表一個中心移至 $x=\frac{X}{\omega^2}$ 之振盪，如振盪之頻率大，則 ω 為相当大之值，振盪中心的移動並不大，

b X 為簡諧函數.

$$X=k\cos ct$$

運動方程式為

$$m\ddot{x}\hat{i}=-m\omega^2 x\hat{i}+mk\cos ct\,\hat{i}$$

当 $c\neq\omega$ 時 方程式之解答為

$$x=a\cos(\omega t+\epsilon)+\frac{k}{(\omega^2-c^2)}\cos ct$$

a 与 ϵ 為可由原始條件決定之任意常數，此時質点除作簡諧運動外还加上一週期与擾動力 X 之週期相同的振盪，此外加振盪之振幅為 $\frac{k}{\omega^2-c^2}$ 如自由振子与擾動力之頻率相同時，則振盪的振幅加大，這種現象稱為共振 我們在以後还要再討論共振的現象.

(iii)阻尼振盪

如自由振盪之簡和振子受一外加的阻尼力，這個阻尼力与速度成正比 即阻尼力 $=-2mu\dot{x}\hat{i}$ u 為大於零之常數

$$m\ddot{x}\hat{i}=-m\omega^2 x\hat{i}-2mu\dot{x}\hat{i}$$

$$\ddot{x}+2u\dot{x}+\omega^2 x=0 \qquad (1)$$

此微分方程式之解答為

$$x=C_1 e^{m_1 t}+C_2 e^{m_2 t}$$

m_1 与 m_2 為二次方程式

$m^2+2um+\omega^2=0$ 之根

令 $l=\sqrt{\omega^2-u^2}>0$ 我們將討論不同情形下之振盪

a. $u<\omega$ 即阻尼甚小時之情形

$$m_1=-u+il \qquad m_2=-u-il$$

$$x=C_1e^{(-u+il)t}+C_2e^{(-u-il)t}$$

$$=e^{-ut}(A\cos lt+B\sin lt) \qquad (2)$$

只取值為實數之 A 与 B 方程式可寫為

$$x=ae^{-ut}\cos(lt+\epsilon) \qquad (3)$$

当 $t\to\infty$ x 乃漸趨於零. 方程式(3)代表一個振幅漸減的諧和振盪.

如最原條件 $t=0$ $x=a$, 則方程式(3)改為

$$x=ae^{-ut}\cos lt$$

欲求振盪之最大值与最小值時, 可令 $\dot{x}$

$$\dot{x}=0$$

$$-aue^{-ut}\cos lt-ale^{-ut}\sin lt=0$$

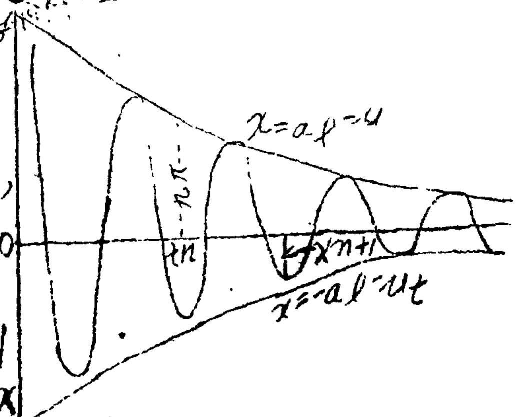
$$\tan lt=-\frac{u}{l}$$

令 $\tan\alpha=\frac{u}{l}$

則 t 之普通解為

$$lt_n=n\pi-\alpha \qquad (4)$$

由此可知最大值与最小值之間隔為 $\frac{\pi}{l}$



將(4)代入(3) 我們得到

$$x_n=(-1)^nae^{-ut_n}\cos\alpha$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=-e^{-u(t_{n+1}-t_n)}=-e^{-\pi u/l}$$

或 $$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=e^{-\pi u/l} \qquad (5)$$

通常我們稱 $\log_e\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{\pi u}{l}\log_{10}e$ 為阻尼振盪之對數減縮

b. $u>\omega$ 即阻尼甚大時的情形

$$m_1=-u+l, \qquad m_2=-u-l$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$\therefore x = e^{-ut}(Ae^{lt} + Be^{-lt})$

求此振盪之最大值或最小值.

$\dot{x} = 0$

即 $e^{-ut}[A(l-u)e^{lt} - B(l+u)e^{-lt}] = 0$

$$e^{2lt} = \frac{B(l+u)}{A(l-u)} \qquad (6)$$

因 e^{2lt} 為逐漸增加函數，所以方程式(6)最多只有一解，即質點運動非為振盪的．當 $t \to \infty$，$x \to 0$

c. $u = \omega$ 臨界阻尼

此時 $m_1 = m_2 = -u$，則微分方程之解答為

$$x = e^{-ut}(At + B)$$

質點之運動也不是振盪的.

(iv) 強迫振盪，此時質點所受之力為 $-\hat{i}m\omega^2 - \hat{i}2mu\dot{x} - \hat{i}mk\cos ct$

運動方程式可寫為

$$\ddot{x} + 2u\dot{x} + \omega^2 x = k\cos ct \qquad (1)$$

$$x = x_1 + x_2$$

x_1 為微分方程

$\ddot{x} + 2u\dot{x} + \omega^2 x = 0$ 之解

x_2 則為方程式(1)之特殊解，即 x_2 滿足

$$\ddot{x}_2 + 2u\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = k\cos ct \qquad (2)$$

x_2 不含有任意常數.

令 $x_2 = E\cos ct + F\sin ct$，代入(2)式後，我們可求得

$$E = \frac{k(\omega^2 - c^2)}{(\omega^2 - c^2)^2 + (2uc)^2}, \quad F = \frac{2uck}{(\omega^2 - c^2)^2 + (2uc)^2}$$

令 $b = \dfrac{k}{\sqrt{(\omega^2 - c^2)^2 + (2uc)^2}}$，

$$\cos\eta = \frac{\omega^2 - c^2}{\sqrt{(\omega^2 - c^2)^2 + (2uc)^2}}, \quad \sin\eta = \frac{-2uc}{\sqrt{(\omega^2 - c^2)^2 + (2uc)^2}}$$

則 $x_2 = b\cos(ct + \eta)$

x_1 之解與上節所講之同，即

$x = x_1 + x_2 = e^{-\mu t}(A\cos lt + B\sin lt) + b\cos(ct+n)$

当 $t\to\infty$ $x_1 \to 0$，則質點之運動乃趨為

$$x = b\cos(ct+n)$$

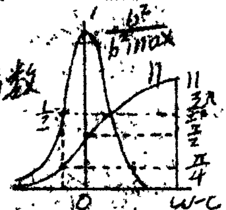
此振盪之週期與擾動力之週期相同，其振幅為 b，当 $c=w$ 時

則 $b = \frac{k}{2\mu w}$ 為最大 $\cos n = 0$ 即 $n = -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore x = \frac{k}{2\mu w}\cos(wt - \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{k}{2\mu w}\sin wt$$

此時之擾動力為 $mk\cos wt$，質點振盪之相與擾動力的相 相差 $\frac{\pi}{2}$

下面表示 $\frac{b^2}{b^2_{max}}$ 與 n 為 $w-c$ 之函數



III 抛射線

甲 質點運動之本質方程式

質點在空間作曲線運動時，其運動的方向可以沿切線、主法線與副法線三方向之坐標而表之，如沿各坐標軸之單位向量為 $\hat{i}, \hat{j}$ 及 $\hat{k}$

加速度 $\vec{a} = \ddot{s}\hat{i} + \frac{(\dot{s})^2}{\rho}\hat{j}$

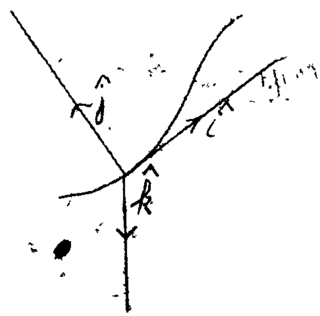
s 為沿運動路徑的弧長，ρ 為曲度半徑，如作用於質點的力為

$$\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$$

則質點運動之本質方程式為

$$\frac{m(\dot{s})^2}{\rho} = F_2$$

$$m\ddot{s} = F_1 \quad 及 \quad F_3 = 0$$



乙 真空中之抛射線

如一質點以初速度 $\hat{i}v_0\cos\alpha + \hat{j}v_0\sin\alpha$ 在真空中開始運動，則其運動方程式為

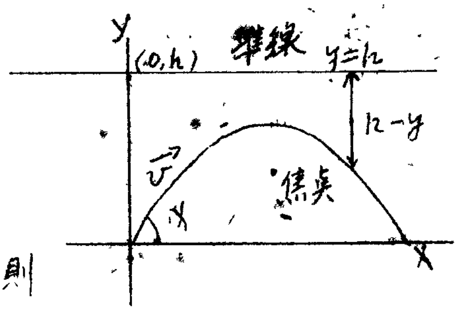
$m\ddot{x} = 0$ (1)

$m\ddot{y} = -mg$ (2)

積分後 $\dot{x} = v_0\cos\alpha$

$\dot{y} = v_0\sin\alpha - gt$

如当 $t=0$ $x=0$ $y=0$ 則



$$x = v_0 \cos\alpha \, t \qquad (3)$$

$$y = v_0 \sin\alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

由(3)及(4)中消去 t，我們得到

$$y = \tan\alpha \, x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \qquad (5)$$

方程式(5)為一拋物線的方程式，我們可將之寫為

$$\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\left(y - \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\right) = -\left(x - \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 \qquad (6)$$

由方程式(6)我們求得拋射線之性質：

(i) 拋射線之射程　令方程式(6)中 $y=0$，我們求出

$x=0$ 及 $x = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$，後者即為拋射線之射程

當 $\alpha = 45^\circ$ 時，x 為最大值

(ii) 拋射線之頂點

頂點之坐標為 $x = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$　$y = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

頂點之軌跡為

$x^2 + \left(2y - \dfrac{v_0^2}{2g}\right)^2 = \left(\dfrac{v_0^2}{2g}\right)^2$　此方程式代表一個通過原點之橢圓。

(iii) 拋射線之焦點　由方程式(6)中可求得焦點的坐標，

$x_f = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$　　$y_f = -\dfrac{v_0^2 \cos 2\alpha}{2g}$

其軌跡　$x_f^2 + y_f^2 = \left(\dfrac{v_0^2}{2g}\right)^2$　令 $\dfrac{v_0^2}{2g} = h$，h 為重力質點在真空中垂直上升時可達之高度，上式可寫為 $x_f^2 + y_f^2 = h^2$

(iv) 拋射線之準線　準線之方程式為 $y = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \dfrac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2g}$

即 $y = \dfrac{v_0^2}{2g} = h$　以任何拋射角 α 射出之拋射線其準線皆相同

(v) 質點在拋射線上任意點速度之大小

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha - 2v_0\sin\alpha \, g t + g^2 t^2 = 2g(h-y)$$

即速度之大小與一重力質點以初速為零由準線落至該點時所得之速度

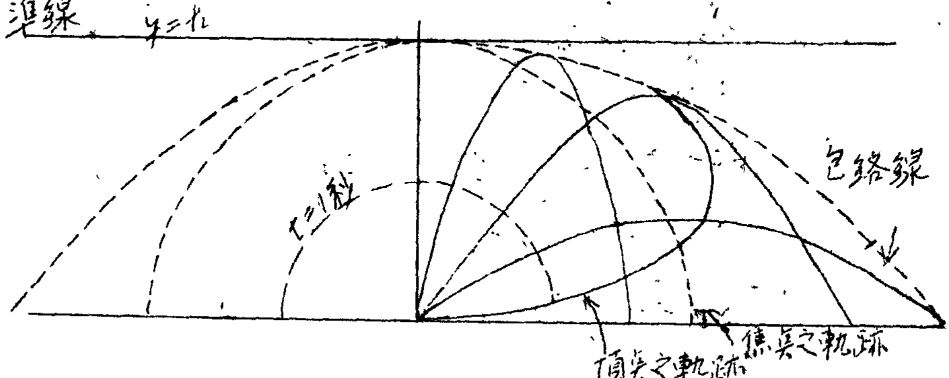
(vi) 拋射線之包絡線

方程式(6)可寫為 $F(x, y, \alpha)=0$ 含 α 為一參數，則由 $\frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}=0$

及 $F(x, y, \alpha)=0$ 消去 α，我們求得方程式(6)之包絡線，包絡線下之面積即為初速為 v_0 之質點，当拋射角不同時可到達之處，包絡線之方程式為 $x^2=-4$

如拋射角不同之拋射線由原點同時射出，則由方程式(3)与(4)消去 α 我們得到 $x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=v_0^2t^2$

即在每個時刻各質點同在一半徑為 v_0t 之圓周上



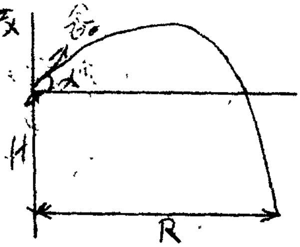
例題 如一拋射線由高為 H 之山上射出，求証其射程 R 滿足方程式 $R^2-2hR\sin 2\alpha-4hH\cos^2\alpha=0$

拋射線之方程式為 $y=\tan\alpha\cdot x-\frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}$

当 $x=R$，$y=-H$

代入上式化簡後得

$$R^2-2hR\sin 2\alpha-4hH\cos^2\alpha=0$$



丙 在有阻力的介質中之拋射線

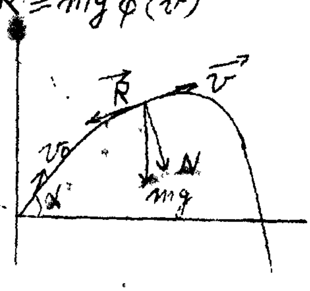
如阻力只是速度的函數，我們可將之寫為 $R=mg\phi(v)$

則運動方程式為 $m\ddot{x}=-R\cos\theta$

$$m\ddot{y}=-R\sin\theta-mg$$

θ 為 v 与 OX 軸所成之角

如以切線与法線方向之力 $\vec{F}_t$ 与 $\vec{F}_N$ 表示之，則運動的本程方程式為



彈輪力學

$$\begin{cases} m\dot{v} = F_t = -mg\sin\theta - R & (1) \\ \dfrac{mv^2}{\rho} = mg\cos\theta & (2) \end{cases}$$

$\rho = -\dfrac{ds}{d\theta}$ （因当 s 漸增時，θ 乃漸減）

$= -\dfrac{ds}{dt}\dfrac{dt}{d\theta} = -\dfrac{v}{\dot{\theta}}$

(1) 与 (2) 可寫為

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -g[\sin\theta + \phi(v)] & (3) \\ v\dot{\theta} = -g\cos\theta & (4) \end{cases}$$

(3) ÷ (4) 得 $\dfrac{1}{v}\dfrac{dv}{d\theta} = \tan\theta + \phi(v)\sec\theta$ (5)

如方程式(5)之解為 $v = f(\theta)$ 則(4)可寫為

$dt = -\frac{1}{g} f(\theta)\sec\theta\, d\theta$. 如 $t = 0$, $\theta = \theta_0$

$t = -\frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\sec\theta\, d\theta$

$\dot{x} = \dfrac{dx}{ds}\dot{s} = v\cos\theta$, $\dot{y} = v\sin\theta$

$\therefore x = -\frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\theta} f^2(\theta)\, d\theta$

$y = -\frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\theta} f^2(\theta)\tan\theta\, d\theta$

如 $f(\theta)$ 可求出，則質点之運動即可決定。

<u>Legendre 之可積分的情形：</u> Legendre 指出 如

$\phi(v) = \frac{1}{n}(a + bv^n)$ 則方程式(6)可積分

令 $\sin\theta = \tanh w$

則方程式(5)變為 $\frac{1}{v}\dfrac{dv}{dw} = \phi(v) + \tanh w$

如 $\phi(v) = \frac{1}{n}(a + bv^n)$

則 $\frac{n}{v}\dfrac{dv}{dw} = a + bv^n + n\tanh w$

令 $v^n = \frac{1}{u}$

$\dfrac{du}{dw} + (a + n\tanh w)u = -b$ (6)

$e^{\int(a + n\tanh w)} = e^{aw}\cosh^n w$

方程式(6)之解為

$u = -e^{-\int(a+n\tanh w)dw}\int_{w_0}^{w} be^{\int(a+n\tanh w)dw}\, dw$

$$= -e^{-aw}\operatorname{sech}^n w\int_{w_0}^{w} b e^{aw}\cosh^n w\,dw \qquad (7)$$

当θ漸減小而趨於極限$-\frac{\pi}{2}$時，w則趨於$-\infty$

$$\lim_{w\to-\infty}\tanh w = -1$$

$$\lim_{w\to-\infty}\operatorname{sech} w = 0$$

$$u = -be^{-aw}\operatorname{sech}^n w\int e^{aw}\cosh^n w\,dw = \frac{b}{n^2-a^2}(a-n\tanh$$

$$-\frac{bn(n-1)}{n^2-a^2}e^{-aw}\operatorname{sech}^n w\int e^{aw}\cosh^{n-2} w\,dw$$

当$w\to-\infty$ 上式之第二項$\to 0$

即$\lim_{w\to-\infty} u = \frac{b}{n-a}$

即$\lim_{w\to-\infty} v^n = \frac{n-a}{b}$

即速度漸趨一定值 当$v^n = \frac{n-a}{b}$

$\phi(v) = \frac{1}{n}(a+n-a) = 1 = \phi(\lambda)$, $\lambda = \left(\frac{n-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$為

質点之極限速度

今舉二例以示之

(i) 阻力與速度的平方成正比.

如 $\phi(v) = bv^2$

$$u = \frac{1}{v^2} = \operatorname{sech}^2 w\times 2\int_{w_0}^{w} -b\cosh^2 w\,dw$$

$$= 2b\cos^2\theta\left[-\frac{\sinh 2w}{4}+\frac{\sinh 2w_0}{4}-\frac{\tanh^{-1}(\sin\theta)}{2}+\frac{\tanh^{-1}}{2}(\sin\theta_0)\right]$$

$$= -b\cos^2\theta\tanh^{-1}(\sin\theta) - b\sin\theta + A\cos^2\theta$$

A為由初條件決定之常數

$$f(\theta) = \{\cos^2\theta A - b\cos^2\theta\tanh^{-1}(\sin\theta) - b\sin\theta\}^{-1/2}$$

v求出後，x, y, t 也可求出

(ii) 阻力與速度成正比. $\phi(v) = bv$

運動方程式為 $m\ddot{x} = -mgbv\cos\theta$

$m\ddot{y} = -mg - mgbv\sin\theta$

此二式可直接積出；令 $\nu(v) = \frac{R}{mv} = gb$ = 常数