

马克思 恩格斯 列 宁 斯大林

论 数 学

一九七四年十一月

马克思 恩格斯 列宁 斯大林

论 数 学

复旦大学数学系编

在制定政治经济学原理时，计算的错误大大地阻碍了我，失望之余，只好重新坐下来把代数迅速地温习一遍。算术我一向很差。不过间接地用代数方法，我很快又会计算正确的。

马克思：《马克思致恩格斯》（一八五八年一月十一日），《马克思恩格斯全集》第二十九卷第 247 页。

我在闲暇时弄微分和积分。附带地说！关于这一项的著作我过多了，你如愿意干这一门的话，当送你一部分。我以为这对你的军事研究几乎是必要的。加以这是数学中比较容易得多的一部分（仅就技术方面讲），例如比起代数学较高的部分来，就是如此。除要知道通常的代数和三角的项目外，除要一般地认识圆锥所成的曲线外，并不需要预先的研究。

马克思：《马克思致恩格斯》（一八六三年七月六日），《马克思恩格斯通信集》第三卷，三联书店一九五八年版第 169 页。

在你的夫蓝刻 (Francoeur) 中，我对算术加以深入的研究，按照数字中有很多没有改正的排印错误判断，你对于这一道似乎比较生疏。单个的地方很优美，但算术的**实践**方面处理得很不好，而且肤浅，在每个德意志的学校中，有较此为好的。像根数、幂、级数和对数等等这些东西，只是初步的，**仅**用数字（没有一切代数学的帮助，而且在事实上没有代数学初步知识的前提）予以讨论，是否切于实用，我也有些怀疑。如用数字的例子作说明，我觉得这里在数字的限制上，没有代数学用 $A + B$ 的处理那样显明，正因为代数学的形态中的一般术语较为简单而明了，没有一般的术语，这里也不行。然这本是在职业数学家的尊严以下的一个部分。

恩格斯：《恩格斯致马克思》（一八六四年五月三十日）《马克思恩格斯通信集》第三卷，三联书店一九五八年版第198—199页。

我不能不提一下您所说的关于老黑格尔

缺乏较深的数学和自然科学素养的意见。黑格尔的数学知识极为丰富，甚至他的任何一个学生都没有能力把他遗留下来的大量数学手稿整理出版。据我所知，对数学和哲学了解到足以胜任这一工作的唯一的人，就是马克思。

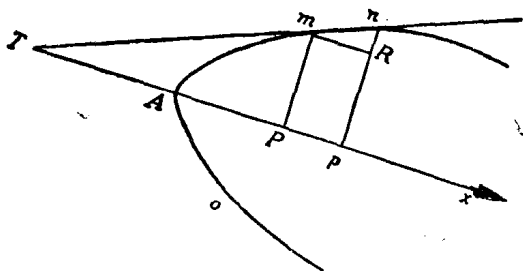
恩格斯：《恩格斯致弗·阿·朗格》（一八六五年三月二十九日），《马克思恩格斯全集》第三十一卷第 471 页。

其次，假如我说一夸特小麦按一定的比例与铁相交换，或者说一夸特小麦的价值表现为一定数量的铁，那我也就是说，小麦的价值和它那个表现为铁的等价物等于既不是小麦又不是铁的**某个第三种东西**，因为我的出发点是：小麦和铁以两种不同的形态来表现同一的数量。所以，这两种商品中的每一种，不论是小麦或铁，都一定能不依赖于另一种而化成这个第三种东西，即化成作为它们的共同尺度的东西。

我要用一个十分简单的几何学的例子来说明这一点。当我们要比较形状不同和大小不同的三角形面积，或是比较三角形面积与矩形或其他某种直线形面积时，我们是怎样着手的呢？这时，我们就把任何一个三角形的面积还原为全然不同于它的外形的一种表现形式。既然我们根据三角形的特性知道三角形的面积等于它的底乘高的一半，于是我们就能把各种三角形的大小以及一切直线形的大小相互加以比较，因为每一种直线形都可以分解为一定数量的三角形。

马克思：《工资、价格和利润》（一八六五年），
人民出版社一九六四年版第 24—25 页。

我上次在曼彻斯特的时候你有一次曾经要我谈谈微分学。从下面这个例子中你可以完全弄清楚这个问题。全部微分学本来就是求任意一条曲线上的任何一点的**切线**。我想就用这个例子来给你说明问题的实质。



假设 mAo 是任意一条曲线，其性质（是不是抛物线、椭圆，等等）我们**并不知道**，在 m 这个点上要求作它的一条切线。

Ax 是轴。我们对横座标 Ax 作一条垂直线 mP （纵座标）。现在假设， n 是曲线上无限地**接近于** m 的一个点。如果我对轴作一条垂直线 np ，那末 p 就应该是无限地接近于 P 的一点，而 np 就应该是无限地接近于 mP 的一条平行线。现在你再对 np 作一条无限小的垂直线 mR 。现在你如果假设横座标 AP 为 x ，纵座标 mP 为 y ，那末 $np = mP$ （或 Rp ）加一段无限小的增量 $[nR]$ ，或者 $[nR] = dy$ （ y 的微分），而 $mR = (Pp) = dx$ 。既然切线的这一段 mn 是无

限小的，所以它同曲线本身相应的部分是吻合的。因此我可以把 mnR 看做是 $\triangle$ (三角形)，把 $\triangle mnR$ 和 $\triangle mTP$ 看做是相似三角形。所以：

$dy (= nR) : dx (= mR) = y (= mP) : PT$ (它对切线 Tn 说来是次切线)。所以次切线 $PT = y \frac{dx}{dy}$ 。这就是

所有的曲线的各个切点的一般的微分方程。

如果我现在需要进一步解这个方程，并利用它来确定次切线 PT 的长度 (如果后者已经有了，我只要用一条直线把 T 和 m 这两个点连接起来，就可得出切线)，那末我必须知道曲线的**特性**是什么。按照它的性质 (例如抛物线、椭圆、蔓叶线等等)，它有对于每个点的纵座标和横座标的**确定的一般的方程**，这种方程来自代数几何学。例如，如果曲线 mAo 是一根抛物线，那末我就知道 y^2 (y 是每个任意一点的纵座标) $= ax$ ，在这里 a 是抛物线的参数，而 x 是相当于纵座标 y 的横座标。

要是我把 y 的这个数值代入方程 $PT = y \frac{dx}{dy}$ ，那末我就应该首先找出 dy ，也就是说，

求出 y 的微分(这是当 y 无限小地增长时附加于 y 的部分)。如果 $y^2 = ax$, 那末我根据微分学知道, $d(y^2) = d(ax)$ (当然我应该求出方程两边的微分), 结果是 $2ydy = adx$ (d 到处总是表示微分)。因此 $dx = \frac{2ydy}{a}$ 。如果我把 dx 的这个数值代入公式 $PT = \frac{ydx}{dy}$, 那末就得出 $PT = \frac{2y^2dy}{ady} = \frac{2y^2}{a}$
 $=$ (因为 $y^2 = ax$) $= \frac{2ax}{a} = 2x$ 。或者: 抛物线的每一点 m 的次切线等于同一点的双倍的横座标。微分的量在运算中消失了。

马克思:《马克思致恩格斯》(一八六五年底——一八六六年初),《马克思恩格斯全集》第三十一卷第 168—169 页。

价格形式不仅可能引起价值量和价格之间即价值量和它的货币表现之间的量的不一致, 而且能够包藏一个质的矛盾, 以致货币虽然只是商品的价值形式, 但价格可以完全不是价值的表现。有些东西本身并不是商品, 例如良心、名誉等等, 但是也可以被它们的所有者出卖以换取金钱, 并通过它们的

价格，取得商品形式。因此，没有价值的东西在形式上可以具有价格。在这里，价格表现是虚幻的，就象数学中的某些数量一样。

马克思：《资本论》第一卷（一八六七年），
《马克思恩格斯全集》第二十三卷第
120—121 页。

我们看到，商品的交换过程包含着矛盾的和互相排斥的关系。商品的发展并没有扬弃这些矛盾，而是创造这些矛盾能在其中运动的形式。一般说来，这就是解决实际矛盾的方法。例如，一个物体不断落向另一个物体而又不断离开这一物体，这是一个矛盾。椭圆便是这个矛盾借以实现和解决的运动形式之一。

马克思：《资本论》第一卷（一八六七年），《马克思恩格斯全集》第二十三卷第 122 页。

这一规律同一切以表面现象为根据的经验显然是矛盾的。每个人都知道，就所使用的总资本两个部分各占的百分比来说，纺纱

厂主使用的不变资本较多，可变资本较少，面包房老板使用的可变资本较多，不变资本较少，但前者获得的利润或剩余价值并不因此就比后者少。要解决这个表面上的矛盾，还需要许多中项，就象从初等代数的角度来看，要了解 $\frac{0}{0}$ 可以代表一个真实的量需要很多中项一样。

马克思：《资本论》第一卷（一八六七年），《马克思恩格斯全集》第二十三卷第 340 页。

物化为价值的劳动，是社会平均性质的劳动，也就是平均劳动力的表现。但是平均量始终只是同种的许多不同的个别量的平均数。在每个产业部门，个别工人，彼得或保罗，都同平均工人多少相偏离。这种在数学上叫做“误差”的个人偏离，只要把较多的工人聚集在一起，就会互相抵销，归于消失。

马克思：《资本论》第一卷（一八六七年），《马克思恩格斯全集》第二十三卷第 359 页。

机器在十七世纪的间或应用是极其重要

的，因为它为当时的大数学家创立现代力学提供了实际的支点和刺激。

马克思：《资本论》第一卷（一八六七年），

《马克思恩格斯全集》第二十三卷第 386

—387 页。

我们已经看到，甚至在简单再生产的情况下，全部预付资本，不管它的来源如何，都转化为积累资本或资本化的剩余价值。但在生产的巨流中，全部原预付资本，与直接积累的资本即重新转化为资本（不论它是在积累者手中，还是在别人手中执行职能）的剩余价值或剩余产品比较起来，总是一个近于消失的量（数学意义上的无限小的量）。

马克思：《资本论》第一卷（一八六七年），《马

克思恩格斯全集》第二十三卷第 644 页。

但是，假如工人能靠空气过活，那用任何价格也不能购买他们了。因此，工人不费分文是一个数学意义上的极限：虽然可以逐渐接近，但永远无法达到。资本的不断趋势

是使工人降到这种不费分文的地步。

马克思：《资本论》第一卷（一八六七年），《马

克思恩格斯全集》第二十三卷第 658 页。

工资第一次被描写为隐藏在它后面的一种关系的不合理的表现形式，这一点通过工资的两种形式即计时工资和计件工资得到了确切的说明。（在高等数学中常常可以找到这样的公式，这对我很有帮助。）

马克思：《马克思致恩格斯》（一八六八年一

月八日），《马克思恩格斯选集》第四卷，

人民出版社一九七二年版第 365 页。

到上一世纪末，甚至到 1830 年，自然科学家和旧的形而上学还相处得相当不错，因为真正的科学当时还没有超出力学——地球上的和宇宙的力学的范围。虽然如此，高等数学已经引起了混乱，因为高等数学把初等数学的永恒真理看作已经被克服的观点，常常作出相反的判断，提出一些在初等数学家看来完全是胡说八道的命题。固定的范畴在

这里消失了；数学走到了这样一个领域，在那里即使很简单的关系，如单纯的抽象的量之间的关系、恶无限性，都采取了完全辩证的形式，迫使数学家们既不自愿又不自觉地成为辩证的数学家。数学家们为了解决这种矛盾，为了调和高等数学和初等数学，为了弄清楚在他们看来是不可否认的结果的那些东西并不是纯粹荒诞无稽的东西，以及为了合理地说明那研究无限的数学的出发点、方法和结果所采用的牵强说法、无聊诡计和应急方法，是最滑稽可笑不过的了。

恩格斯：《自然辩证法》（一八七三年），人民出版社一九七一年版第 181 页。

莱布尼茨——研究无限的数学的创始人，……

恩格斯：《自然辩证法》（一八七三年），人民出版社一九七一年版第 182 页。

正如傅立叶是 a mathematical poem [一首数学的诗] 而且还没有失去意义，黑格尔是

a dialectical poem〔一首辩证法的诗〕。

恩格斯：《自然辩证法》（一八七三年），人民

出版社一九七一年版第 183 页。

但是，就是在无机界中，抽象的同一性实际上也是不存在的。每一个物体都不断地受到机械的、物理的、化学的作用，这些作用经常在改变它，在修改它的同一性。只是在数学——一种研究思想事物（虽然它们是现实的摹写）的抽象的科学——中，才有抽象的同一性及其与差异的对立，而且甚至在这里也在不断地被扬弃（黑格尔《全书》第 1 部第 235 页）。

恩格斯：《自然辩证法》（一八七四年），人民

出版社一九七一年版第 192 页。

正和负。也可以反过来叫：在电学等等中；北和南也一样。如果把这颠倒过来，并且把其余的名称相应地加以改变，那末一切仍然是正确的。这样，我们就可以称西为东，称东为西。太阳从西边出来，行星从东向西

旋转等等，这只是名称上的变更而已。此外，地磁的北极所吸引的磁石的真正南极，我们在物理学中把它叫做**北极**，这是一点妨碍也没有的。

恩格斯：《自然辩证法》（一八七四年），人民出版社一九七一年版第 194 页。

数学上的所谓公理，是数学需要用作自己的出发点的少数思想上的规定。数学是数量的科学；它从数量这个概念出发。它给这个概念下一个不充分的定义，然后再把未包含在定义中的数量所具有的其他基本规定性，当作公理从外部补充进去，这时，这些规定性就表现为未加证明的东西，自然也就表现为**数学上**无法证明的东西。对数量的分析会得出这一切公理式的规定，即数量的必然的规定。斯宾塞说得对：我们所认为的这些公理的**自明性**是**承继下来的**。这些公理只要不是纯粹的同义反复，就是可以辩证地证明的。

恩格斯：《自然辩证法》（一八七四年），人民

出版社一九七一年版第 235 页。

如果说，黑格尔把力和它的表现、原因和结果理解为同一的东西，那末，这从物质的形式变换中得到了证明，在那里等价性是用数学来证明的。这种等价性在量度中早已被承认了：力以它的表现来量度，原因以结果来量度。

恩格斯：《自然辩证法》（一八七四年），人民出版社一九七一年版第 257 页。

我在这里向穆尔讲了一件我私下为之忙了好久的事情。然而，他认为这个问题无法解决，或者由于涉及这一问题的因素很多，而大部分还有待于发现，所以问题至少暂时无法解决。事情是这样的：你知道那些统计表，在表上，价格、贴现率等等在一年内的变动是以上升和下降的曲线来表示的。为了分析危机，我不止一次地想计算出这些作为不规则曲线的升和降，并曾想用数学方式从中得出危机的主要规律（而且现在我还认为，如