

森林測量教研室研究報告汇编

北京林学院科学研究部编印

1960·2

簡解求積儀

在簡上求面積是林上工作上常及遇到的问题，而且這工作量大，那麼如何提高求面積的速度是关系到我們林上工作的問題。在測量學上解決簡上求面積的方法一般有三種：最常用的是求積儀，用它求面積比較簡便，精度也相當高，可是我國目前使用的求積儀都是進口的，而且價格高昂（每架約二百元）；求面積的第二方法是解折法，它的精度在求多边形來說特別高，可是這種方法也通過繁重的計算工作，速度太慢，它不適用於林上工作；求面積的第三種方法是簡解法，其中常用的有格網法，目前我們林上工作上常用它，可是這方法精度太差（一般相對誤差上達到2%），工作效率也不快，因此有必要尋找一種較為理想的方法，這種方法既簡便，又準確。下面介紹一種新的求積儀，這種求積儀在一定程度上是符合上面的要求的。

這里介紹的求積儀基本上是用簡解的道理，因此這種新的求積儀叫做簡解求積儀。它是一塊半徑14cm的半圓賽路盤做成的，它上面刻有定角的輻射線上刻有半徑對應的面積數，使用時把它放在簡形上相對地放兩次，讀出各半徑刻在簡形邊緣上的讀數，各半徑讀數之和就是該簡形的面積。

一、簡解求積儀的原理

如圖1若求曲線 $abc d$ 所包圍的面積，如果在曲線中心或中心附近處隨便選一點 O ，以這個點為中心向外作放射線，放射線之間的夾角是一定的，設為 ϕ ，這樣把整個簡形分為 n 份，每一份以中心角的平分線交于邊緣上的長度為半徑：（如 $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots, R_n$ ）以 O 為圓心所作出的圓弧；以圓弧和各相應的放射線所包圍的面積來代替原來放射

線和圓形外圍所包圍的面積，也就是以規則的扇形面積代替不規則的扇形面積，從圖 1

看到，有些扇形中規則的扇形和不規則的扇形並沿不太吻合，但是它們又有互補的關係（如圖 2 $\Delta 1 \approx \Delta 2$ ），如果當中相當小時，由此而產生的誤差是不大的，而且這個誤差的正負還有偶然的性項，總和起來就會大大減小。

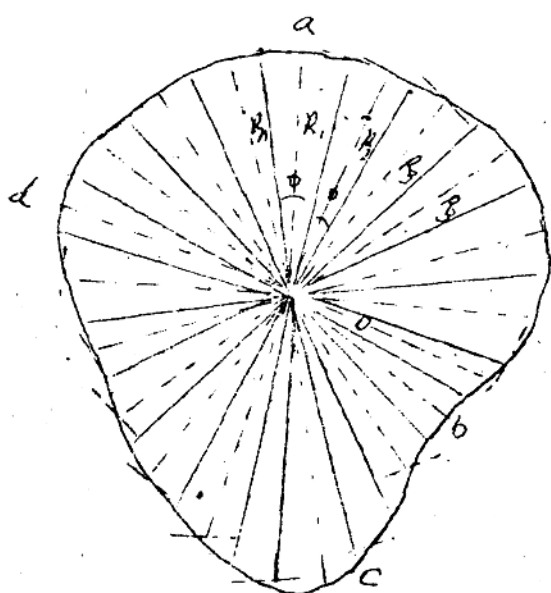


圖 1

各子規則扇形

的面積用 S_i 表示（ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ），則：

$$S_1 = \frac{1}{2} \phi R_1^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \phi R_2^2$$

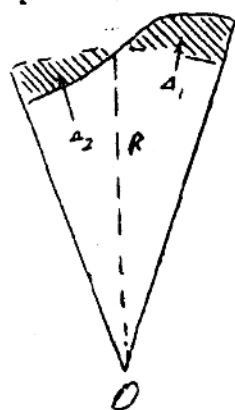
$$S_3 = \frac{1}{2} \phi R_3^2$$

$$+ S_n = \frac{1}{2} \phi R_n^2$$

$$\Sigma S = \frac{1}{2} \phi \Sigma R^2 \text{----- (1)}$$

如果知道中心角，各半徑

代入上式就能求得整個圖形的



$\Delta 2 \approx \Delta 1$

圖 2

面积。

二. 仪器的设计

根据上面所说的原理制成量解求积仪，在透明的材料（如赛璐珞、透明纸、玻璃板）上，从中心向外作等角的辐射线，为了减少计算工作，在各半径刻度上不写长度单位，而写长度所对应的扇形面积，如半径长度为 10cm ，它所对应的面积为 $\frac{1}{2} \phi \times 10^2 \text{cm}^2$ ，那就在半径为 10cm 的刻度上写 $10^2 \times \frac{\phi}{2} \text{cm}^2$ ，其中 ϕ 可以事先定好成为一个常数代入即可，这样从半径上读得的数字就是该半径长度所对应的扇形面积，各个半径读数总和就是等于整个扇形的面积，如果量的比例尺是固定的（如林业上常用量比例尺为 $1/10000$ ），则进一步把量上面积 $\frac{1}{2} \phi R^2$ 换成实地面积， $\frac{1}{2} \phi R^2 \cdot M^2$ （ M 为比例尺分母值），以这个实地面积写在半径对应的刻度上，这样各半径的读数总和就是等于实地面积，否则先求量上面积，再乘比例尺分母平方为求实地面积也行。

半径上刻度不写长度单位，改写对应的面积单位，可以这样求得：

$$\text{因为： } S = \frac{\phi}{2} R^2$$

$$\text{如设： } \phi = 18^\circ$$

$$\text{代入： } S = \frac{R^2}{2} \times \frac{18^\circ}{9} = \frac{R^2}{2} \times \frac{18^\circ}{57.2957} = 0.15705 R^2$$

$$\text{或： } R = 2.523 \sqrt{S} \text{ ----- (2)}$$

设半径上每一刻度对应的面积为 0.5cm^2 ，以 S 等于 0.5cm^2 的数值代入 (2) 式得表一：

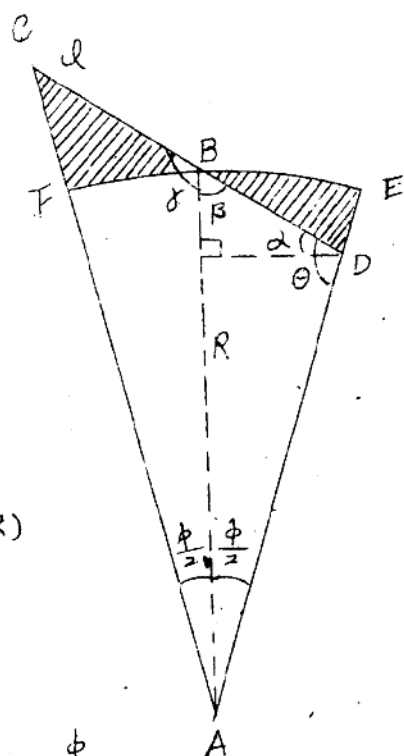
S (mm)	R (mm)	S	R	S	R	S	R	S	R
0.5	1.784	8.5	7.555	16.5	10.268	24.5	12.486	32.5	14.384
1.0	2.523	9.0	7.569	17.0	10.402	25.0	12.615	33.0	14.492
1.5	3.078	9.5	7.816	17.5	10.554	25.5	12.738	33.5	14.603
2.0	3.568	10	7.978	18.0	10.702	26.0	12.865	34.0	14.709
2.5	3.986	10.5	8.174	18.5	10.851	26.5	12.985	34.5	14.820
3.0	4.369	11.0	8.366	19.0	11.000	27.0	13.110	35.0	14.926
3.5	4.718	11.5	8.555	19.5	11.141	27.5	13.231		
4.0	5.046	12.0	8.740	20.0	11.282	28.0	13.349		
4.5	5.378	12.5	8.918	20.5	11.424	28.5	13.468		
5.0	5.641	13.0	9.100	21.0	11.560	29.0	13.586		
5.5	5.916	13.5	9.270	21.5	11.696	29.5	13.702		
6.0	6.178	14.0	9.438	22.0	11.832	30.0	13.818		
6.5	6.431	14.5	9.605	22.5	11.966	30.5	13.932		
7.0	6.673	15.0	9.709	23.0	12.098	31.0	14.046		
7.5	6.908	15.5	9.933	23.5	12.232	31.5	14.159		
8.0	7.135	16.0	10.092	24.0	12.358	32.0	14.270		

制造仪器方法：为了提高刻度精度可先把一直半径长度放大3—5倍用目内尺尺线画，然后再以制画一次缩小，以此样额制钢模，再用通孔的，伸进较小的量块逐次制，厚度1mm，刻度线应面贴正曲线，以减少误差。

三、仪器的精度

仪器产生误差来源主要为以因热代替曲线不完全吻合；其

次是誤差。下面首先討論
 一下頭一種誤差，如圖3設CD
 如所求面積的扇形曲線上一段，
 因為它很短，可以看成直線，
 如果以扇形AFBE代替扇
 形ACBD面積，產生誤差多
 少則看 $\triangle CFB$ 和 $\triangle BDE$ 之
 差來決定箇中：



$$\begin{aligned} \nabla AFB &= \frac{1}{2} R^2 \times \frac{\phi}{2} = \\ &= \frac{\phi}{4} R^2 \quad (\triangle \text{ 表示扇形面積}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla ABE &= \frac{1}{2} R^2 \times \frac{\phi}{2} = \\ &= \frac{\phi}{4} R^2 \end{aligned}$$

$$\nabla ABC = \frac{1}{2} R^2 \frac{\sin \gamma}{\sin \phi} \sin \frac{\phi}{2}$$

$$\Delta ABD = \frac{1}{2} R^2 \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \sin \frac{\phi}{2} \quad \text{圖 3}$$

設： $\triangle BDE = \Delta_1$ ， $\triangle CFB = \Delta_2$

$$\delta = \Delta_2 - \Delta_1$$

則： $\Delta_1 = \nabla ABE - \Delta ABD$ ， $\Delta_2 = \nabla ACB - \nabla AFB$

$$\text{代入：} \Delta_1 = \frac{\phi}{4} R^2 - \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \sin \frac{\phi}{2}$$

其中: $\varepsilon = 180^\circ - (\beta + \frac{\phi}{2})$, $\varphi = 180^\circ - (\gamma + \frac{\phi}{2})$

代入: $\delta = \frac{R^2}{2} \sin \frac{\phi}{2} \left(\frac{\sin \gamma}{\sin(\delta + \frac{\phi}{2})} + \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \frac{\phi}{2})} \right) - \frac{R^2}{2} \phi$

$$\delta = \frac{R^2}{2} \sin \frac{\phi}{2} \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \gamma \cos \frac{\phi}{2} + \cos \gamma \sin \frac{\phi}{2}} + \frac{\sin \beta}{\sin \beta \cos \frac{\phi}{2} + \cos \beta \sin \frac{\phi}{2}} \right) - \frac{R^2}{2} \phi \quad \text{--- (3)}$$

在一般情况下设: $\alpha = 30^\circ$

则, $\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$,

$\varepsilon = 180^\circ - (\beta + \frac{\phi}{2}) = 180^\circ - (\frac{\phi}{2} + 60^\circ) \quad \text{--- (a)}$

$\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\varphi = 180^\circ - (\gamma + \frac{\phi}{2}) = 180^\circ - (120^\circ + \frac{\phi}{2}) \quad \text{--- (b)}$

以 (a), (b) 代入 (3) 得

$$\delta = \frac{R^2}{2} \sin \frac{\phi}{2} \left(\frac{\sin 120^\circ}{\sin 120^\circ \cos \frac{\phi}{2} + \cos 120^\circ \sin \frac{\phi}{2}} + \frac{\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos 60^\circ} \right) - \frac{R^2}{2} \phi$$

$\therefore \cos 120^\circ \approx \frac{1}{2} \sin 120^\circ$, $\cos 60^\circ \approx \frac{1}{2} \sin 60^\circ$

$$\therefore \delta = \frac{R^2}{2} \sin \frac{\phi}{2} \left(\frac{\sin 120^\circ}{\sin 120^\circ \cos \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2} \sin 120^\circ \sin \frac{\phi}{2}} + \frac{\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ \cos \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\phi}{2} \sin 60^\circ} \right) - \frac{R^2}{2} \phi$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{R^2}{2} \sin \frac{\phi}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\phi}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\phi}{2}} \right) - \frac{R^2}{2} \phi \\
 &= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\sin \phi}{\cos^2 \frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right) - \frac{R^2}{2} \phi
 \end{aligned}$$

以 $\cos^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1+\cos \phi}{2}$, $\sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos \phi}{2}$ 代入上式

$$\delta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\sin \phi}{\frac{1+\cos \phi}{2} - \frac{1-\cos \phi}{2}} \right) - \frac{R^2}{2} \phi$$

$$\delta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\sin \phi}{3+5 \cos \phi} \right) - \frac{R^2}{2} \phi$$

$$\delta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{8 \sin \phi}{3+5 \cos \phi} - \phi \right)$$

设面积的相对误差为 K , 则

$$K = \frac{\delta}{S} = \frac{\frac{R^2}{2} \left(\frac{8 \sin \phi}{3+5 \cos \phi} - \phi \right)}{\frac{1}{2} R^2 \phi} = \frac{\frac{8 \sin \phi}{3+5 \cos \phi} - \phi}{\phi}$$

如 $\phi = 18^\circ$ 则

$$K = \frac{\frac{8 \times \sin 18^\circ}{3+5 \cos 18^\circ} - (18 \times 0.01745)}{(18 \times 0.01745)} \approx \frac{1}{100}$$

上面所求得的相对误差是假设扇形上曲线 $\widehat{CD}$ 如直线, 这是圆弧和曲线吻合最不利情况求得的, 也说明这种仪器起码保证的精度是 $1/100$, 在一般情况下求面积的曲线往往不是圆弧状, 因此实际上精度 还会超过 $1/100$ 。

产生误差的另一来源是读数误差，这种误差可以提高刻度精度和两个位置求消除。

作业的几点注意事项：

- (1) 如要提高精度可在不同位置求面积多次，取平均值。
- (2) 此求积仪求近似圆形图形精度较好，最不利的还是求多边形面积。

(3) 求面积时可用称量配合秤称，不用记录各半径读数，直接往称盘上打，这样可以提高速度。

下面附有仪器的模型（图4），此仪器读数的单位是平方公分（盘上面积），如求图5上一块面积，从0.0'半径起往顺时针方向读得各半径读数为：9.2, 9.1, 9.3, 7.5, 7.1, 7.0, 7.4, 7.3, 6.0, 6.5, 11.7, 11.5, 11.3, 11.5, 11.7, 11.8, 12.2, 12.2, 11.6, 9.7。各数总和得 $S = 191.6 \text{ cm}^2$ （盘上面积）

上面介绍的盘解求积仪只是从理论上得到一些结论，至于实际使用情形和精度如何还没有做过试验，这有待今后作进一步的研究。

测量教研室

阮老斌