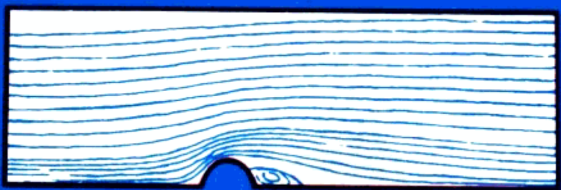
有限元素程式

—解 Navier-Stokes 方程式—

Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations

原著者：Tayllor／Hughes
譯述者：蔡武原



科技圖書股份有限公司

有限元素程式

—解 Navier-Stokes 方程式—

Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations

原著者：Tayllor／Hughes
譯述者：蔡武原

科技圖書股份有限公司

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書　　名：有限元素程式—解N-S方程式
原 著 者：Taylor/Hughes
譯 述 者：蔡　武　原
發 行 人：趙　國　華
發 行 者：科技圖書股份有限公司
台北市重慶南路一段49號四樓之一
電　話：3118308・3118794
郵政劃撥帳號 0015697-3

特價新台幣150元

原　　序

本書可提供大學部、研究所的學生，及專業工程師，欲使用有限元素法來求解無旋流動及黏性流體問題。所介紹的基本觀念，並不需預先熟悉此方法，即可勝任。各章節中並有各自獨立的已開發程式，可以計算簡單的近似解。導循此種近似，並採用工程型式表之；數學觀念及型式化的證明儘量減到最小，但是若有需要時，仍然涵蓋；以維持方法革新的連續性。

如想發展直接求解小部分問題的軟體者，則採用流行的近似法是非常有效的。本書中的各個副程式均可看成獨立的型態，因此可以參考程式而修改小部分的程式。此特性很明顯的對程式結構有益，且可以擴展整個程式。

本書中的程式可以解二維穩態不可壓縮無旋流及黏性流問題。事實上，在第九章中介紹使用此種技巧來求解擾流問題。因爲採用迭代法求解，因此可以很快的延伸到依時性（time dependency）問題及複雜型式的擾流。本書包括幾個說明性的例，且大部分可用手解題。依序介紹此方法的流程，並詳細介紹相對應的副程式；所以只要稍微用心，便可修改程式的結構。

本書中所選的內容，是從教學經驗及處理廣域的工程問題所做的研究而來。作者非常感謝在大學的討論者提供澄清本書所介紹的許多觀念。

C. Taylor
T. G. Hughes

目　　錄

第四章 組合方程式變成矩陣形式

第五章 形成矩陣方程式

第六章 方程式的解法：非對稱型矩陣

第七章 輸入／輸出-輸入時的偵錯

第八章 數值舉例

第九章 簡介有限元素法應用於擾流

附錄A 有關的矩陣理論

附錄B 使用者指導篇

第一章　數值近似簡介

1.1　控制黏性流體的一組數值方程式

早在十九世紀就被發展出來，並且表示成著名的涅維爾 - 史托克斯方程式（The Navier-Stokes equations）[1]。這些以最常見的形態表成的方程式及質量不滅方程式，一起用來互相聯絡一些用以描述黏性流體運動有關的變數[2]。甚至當擾流現象問世後，這些方程式的基本形式還被保留下來未加改變。實際上，最近在擾流問題發展方面，針對涅維爾 - 史托克斯方程式的研究具有重大進展[3]。因此，後來的研究工作已直接牽涉到方程式的解決技巧，而且這些解決方法還擴充到包括了非線性方面。這些非線性問題包括了擾流、熱傳、震波等不同領域。

求解方法的演進；如同各科學的分支，已凌越早期的近似分析法。circa 1900 除加以補充外，並且以數值方法來替代。其中，Thom 有非常重要的貢獻。迄今，一些重要的數值應用領域中依然時常使用到 Thom[4] 第一次決定性的發現。日後發展迅速的數值分析具有非常重大的影響力；在 1940 年代的晚期，電子計算器的出現，成為工程師和科學家的得力助手。這個時候伴隨著充滿新活力的數值技術以解決問題。至今，假若遇到較難處理的問題，如同以往；若出現有效的研究工具即迅速的發展成為科技的領域。在流體力學方面，重新評估用以解流動力學方程式的一些基本觀念是很重要的，目前已經採用一個非常適合的算術解，只要深入的觀察包括在方程式中的參數，並且試著重複使用這些方法即可求解。然而，最重要的尚要考慮在研究的過程中是否承繼着理論基礎。

早在 1960 年代後期大部分利用計算機求解此類型問題，普遍根

據的數值方法有：特徵法（Method of Characteristics）[5,6] 和有限差分近似法（Finite Difference Approach）[8]，這兩種方法都是以近似的方法來模擬控制方程式求解。而控制方程式乃是以矩陣方式儲存在計算器中。在科技圈中，愈好的近似方法愈能被採用。在大部分領域中，非線性比較能夠適合實際問題，且已經用來解決普遍的工程問題[7,8]。這種技術的改善，經過幾年後已產生出高度複雜的模擬方法；特別是當有限差分法被採用時。這種方法在教科書中很普遍，若有興趣的讀者可隨時利用。

在 1960 年代晚期，有限元素法很快地應用在固態力學領域[9]；早先的努力促使這種非常有效力的分析技巧在結構力學領域得到很大的功效，並能夠再度地在流力方面迅速發展，且證明這種方法有很明顯的優點。事實上，這種方法已經被證明在分析某些工程問題上有顯著的效用，使得某些研究領域上有重大的發展。因此，有限元素法在發展複雜的流體問題之數值方法中，其眞正的地位越趨明顯。

讀者所遇的流體力學問題範圍是如此地廣，以致於作者抱持審愼的態度來寫此書，本書雖僅提供一種方法解 Navier-stokes equations，但讀者可依此方程式發展所需的計算機程式及求解的技巧。在求解過程中原始變數——速度和壓力以相關變數來看待，如此便可得到一個基本的假設，可供讀者更深入的發展。事實上，最後一章中便列出解擾流問題所用的進階程式。

1.2 基本觀念

應用 *F.E.M.* 來解流體力學問題的基本觀念歸納成理想化的區段圖 1.1，吾人所介紹的控制方程式（或方程式組）的基本流程只作觀念性的直述。包含於區段(3)—(5)流程中的觀念可以定義流域（domain）的幾何形狀和空間變數，若讀者已精通有限差分法將有助於熟練此方法，爲了使本書更完美所以在本書中亦介紹處理矩陣形式的方法及求解的技巧。關於有限元素的程式在以下的幾章中有詳細的說明，並且簡述導出基本定義所須步驟，以及副程式用何種方法來近似等。

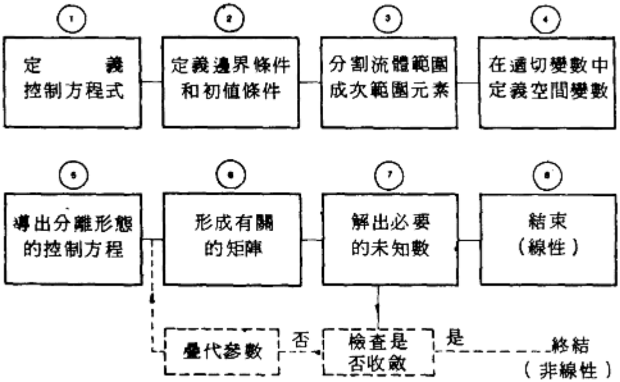


圖 1.1

這些控制方程式通常用最小化（minimisation）的副程式來求解，下面的流程只適用於本書的副程式——噶拉金加權剩餘法或餘數法（Galerkin Weighted Residuals Approach）[10]，其他的方法；例如：函數法（functional）、集合法（collocation）、最小平方法（least squares），在標準教科書[11,12,13]中均已詳細介紹。在噶拉金近似法中，使用一些不連續的加權函數於基本方程式中，稱爲“加權”；且在相關流域內的最終方程式等於 0。例如；如果拉氏方程式控制流體的流動時，則：

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{1.1}$$

φ 表速度位。應用噶拉金近似則得到，

$$\int_\Omega W_k(\nabla^2\varphi)\,d\Omega=0 \qquad k=1,2,3\ \ m \tag{1.2}$$

W_k 代表在流域（domain）中與不連續的點 k 相關的加權函數（weighting function），而 m 爲不連續點的數目，加權函數通常只是一個

空間的函數。

必須先定義完 φ 的空間變數才能解（1.2）式。第一個步驟是如圖1.2(a)中將流域分爲許多的次流域稱爲元素，每一個元素均擁有對應的元素邊界內或邊界上的不連續節點（node）。用節點值來定義元素內 φ 的空間變數。例如，有一個8節點元素具有對應的 φ_1，φ_2，φ_3，… φ_8 值，則元素內的 φ 可以寫爲：

$$\varphi = N_i \varphi_i \qquad i = 1,2,3\ldots 8 \tag{1.3}$$

N是用節點座標表成的函數。這個多項式稱爲形狀函數，第三章中導出所有的形狀函數。

分割流域，並且指定適當的形狀函數，接着下一個步驟就是將每個元素積分後相加，即可積分（1.2）式。這個步驟通常利用某些形

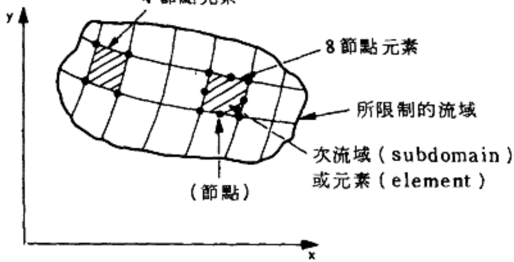


圖1.2(a)　流域分割成元素

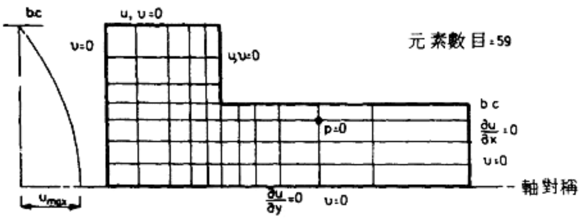


圖1.2(b)　軸對稱擴展層流典型的元素分佈及邊界條件

態的數值積分來完成，並且可以用矩陣表成單一元素內的分佈。

$$[\mathbf{h}]\cdot\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \cdot\\ \\ \cdot\\ \varphi_8\end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

所有如上式的元素內的分佈相加，可得到一個最終的矩陣方程式

$$[\mathbf{H}]\cdot\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_n\end{Bmatrix}=0 \tag{1.5}$$

（1.5）式中 n 是流域內的節點數目。藉由適當的邊界條件和節點的變數值即可求解此矩陣，以上所介紹的流程所導出的方程式如果很複雜，則必須先作修正才能求得外顯解（explicit solution）。考慮二維穩態熱傳問題的簡單形式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0 \tag{1.6}$$

若材料為二維相關性的，則區域的傳導係數為：

$$\begin{aligned}K_x&=f_{\mathrm{I}}(x,y,\varphi)\\ K_y&=f_{\mathrm{II}}(x,y,\varphi)\end{aligned} \tag{1.7}$$

藉着已介紹的拉氏方程式依（1.6）式組合成為矩陣形式。然而由於傳導係數 K 為未知的，所以必須使用迭代法來求解。而（1.6）式可以寫成：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x^{k-1}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y^{k-1}\frac{\partial\varphi^k}{\partial y}\right)=0 \tag{1.8}$$

k代表目前的迭代次數，參考圖1.1中的迴路，當計算出傳導係數而φ值尚無法在所給的容忍值內（$\varphi^k-\varphi^{k-1}$）收斂時，則必須重新計算矩陣，並尋求新解以求出溫度分佈φ。由這個例子的方程式中，很明顯的可以看出此方程式可以描述的層流問題太簡陋，但是解一個非線性方程式所用到的基本觀念及必要的流程也只不過如此而已。

1.3 一般程式結構

圖1.3中所示的程式一般結構，最好在組合流體矩陣的程式中使用助憶性的指示；主區段(master segment)*FLUID* 依序叫用所需的相關矩陣，在此列出簡單的描述幫助讀者熟悉本書中用到的所有副程式。

1.3.1 副程式

[1] DIMENS

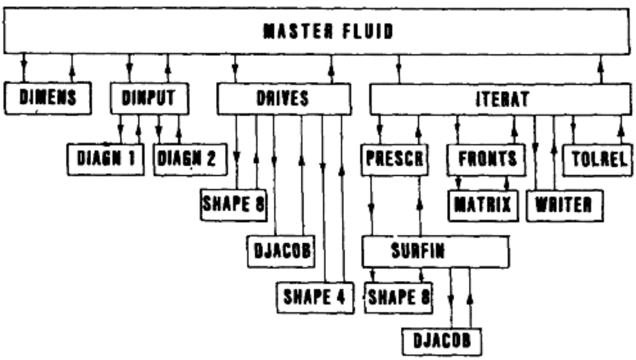


圖1.3 程式的一般結構

在求解過程中需用到的矩陣所牽涉的管家（house-keeping）流程中使用的某些向量和陣列，副程式DIMENS設定這些向量成陣列其貯存空間的大小，如此則具有動態的貯存空間；因爲對於某一個特殊問題而言，此副程式可以斟量的增減貯存空間。

[2]　DINPUT

此副程式可供輸入數據之用，包括節點位置的座標、元素的編號、組成元素的節點、流體的物理性質、邊界條件及初值條件。當數據輸入之後，有兩個可呼叫的副程式DIAGN 1 和DIAGN 2，可以將輸入的數據作某些簡單的檢查。

(a) 副程式DIAGN 1　此副程式檢查所有的控制參數。例如；節點編號、元素編號、問題所用的邊界條件、及初值條件等。
(b) 副程式DIAGN 2　總合以上的數據以確定輸入用來描述幾何的數據是否遵循某些規定。

如果上述的檢查有任何錯誤時，則這些數據在尚未進入演算之前即全部的列印出來。

[3]　副程式DRIVES

設定有關方程式其數值積分的積分常數DRIVES叫用副程式SHAPE 8，SHAPE 4，DJCOB。

(a) 副程式SHAPE 8　此副程式定義一個8節點元素的獨立變數以計算形狀函數N。
(b) 副程式SHAPE 4　此副程式計算四節點的形狀函數，如圖1.2(a)，這兩個形狀函數將用於以後的程式內。因爲在Navier stokes方程式中其壓力和速度項必須分別使用4節點元素和8節點元素來估算，所以必須要如此處理才可。理由將於第四章中介紹或者可以參閱參考資料14，15，16。
(c) 副程式DJACOB 此副程式計算形狀函數對所選擇座標系統的微

分值，即求$\frac{\partial\varphi}{\varphi x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$等項。例如：定義

$$\varphi=[N_1,N_2,N_3 \quad N_8]\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \\ \\ \varphi_8\end{Bmatrix} \tag{1 9}$$

則一次微分可表成下面的形式：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left[\frac{\partial N_1}{\partial x},\frac{\partial N_2}{\partial x},\frac{\partial N_3}{\partial x}. \quad \frac{\partial N_8}{\partial x}\right]\cdot\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \\ \varphi_8\end{Bmatrix} \tag{1 10}$$

N是空間座標 x，y 的函數 。

[4] 副程式ITERAT

此副程式叫用所需的副程式以解矩陣方程式，轉換邊界條件成爲可和矩陣方程式合併的型式，輸出結果若須經迭代法求解時，亦可檢查是否在設定的容忍內收斂 。

(a) 副程式PRESCR　此副程式用於當邊界條件不是定值而是梯度邊界條件，如$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，則爲了處理上述的邊界條件所以必須叫用三個副程式SURFIN，SHAPE 8，DJACOB。

(b) 副程式SURFIN　此副程式計算梯度型邊界條件所需用到的積分常數。