算學叢書

初等算學史

卡約黎著
曹丹文譯

商務印書館發行

初等算學史

序

人羣之進化，率由野蠻而趨於文明，學科之發達，率由簡淺而趨於高深；各科皆然，算學亦何獨不然。夫人類之有算學，蓋自世界之有人類始，一若粟米布帛，與人生相終始，不能須臾離去。然皆先簡後繁，先淺後深，舉世同軌，莫之或異。若學者徒驚近世算學之新奇，而不尋流溯源，一考其隨時變遷之陳迹，又何能探索算學之本原，窺覘其推陳出新之妙用耶？鄙人不揣簡陋，爰取美國卡約黎氏"初等算學史"而譯之，以餉學者。若學者不棄而取閱之，則於初等算學變遷之大勢，或能了然於心歟！

中華民國十四年仲秋固始曹丹文誌

例　言

一，是書爲美國卡約黎氏所著。引證之書，爲數甚多。內於各國（博引遠古近今）之初等算學，原原本本，歷述其變遷之情勢，文詞鳖潔，詳簡合宜。惟譯者無文，恐失本來面目。

一，書內引述之書名，無論爲英國或他國文字，悉斟酌原義，譯成中文，俾便記憶。

一，書內引述之西曆年代，悉註以中國年代，俾便對照。

一，譯文內句讀，人名，地名，書名，及其他重要名詞，悉用新式記號及標點，以圖醒目。

一，書內小註，關係重要者，擇譯於每面之下，以資考證。

一，所譯名詞，用目今通行者，並附中外名詞對照表，以資互證。

一，鄙人學識簡陋，詞句之間，錯誤必多，深願海內外算學同志進賜教正，將不勝感謝之至。

目 錄

初等算學史

上古時代

記數法與數目字

世界記數之法，時無論古今，殆皆以五進位，以十進位，或以二十進位。此其故不難知之。小兒初習算數，往往用及手指，甚至足趾。推之有史以前，未開化之野人，其利用手指，與足趾以計數，蓋無疑義。卽今日之亞非利加人(*African*)，愛斯克毛人(*Eskimo*)，及南海之島人，亦皆實行利用其手指足趾者也。人之借助於手指，常由於手勢記數法多少之發達，若聾啞字母之類。手指記數之法，其流行之明徵，可於古時之埃及(*Egypt*)，巴比倫(*Babylonia*)，希臘(*Greek*)，羅馬(*Rome*)考得之，又可於中世紀歐洲諸國考得之；卽今日之東方諸國，亦皆可考得之也。華人之記數也，在十萬以內者，能以左手表之；其法以右手大指之指甲，遍觸左手小指之節，先起小指外邊，由下而上，次依中路，由上而下，次依內邊，由下而上，藉以表自一

至九單位之數；同式表十位之數以無名指；百位之數以中指；千位之數以食指；萬位之數以大指。若欲推此記數之法，以表更多之數；祇需推及於右手斯可矣。而商界中人，磋商價值者，嘗用袖中之手，以通彼此之意，用避旁觀之目，亦可想見其術之普通爲何如矣。

若人類手指之數，因人不同，則世界流行之記數法之進位，亦必隨在各異。設人類之一手多生一指，全數爲十二指，則文明各國記數進位之法，將不以十而以十二矣。若然，則必需特別數目字二，以代表十及十一焉。所不幸者，歷盡用算術之人類，實無第六指發生耳。然除需添二特別數目字及習乘法表必增至 12×12 外，十二進位法，實優於十進位法。何則，蓋十二含有整除數 2, 3, 4, 6, 而十祇有整除數 2 及 5。在平常事務之間，$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 爲常用之分數，進位之根數爲 2, 3, 及 4 之整倍數，便利良多。對於十二進位法，討論提倡而最具熱心者，爲瑞典(*Sweden*)國王查理第十二(*Charles XII*)，其薨時，猶希望其統轄之境，改十進爲十二進。但此改變，究未能成爲事實耳。法蘭西(*French*)之革命，一切舊時文物，推翻無餘，獨此十進位法，非特無毫髮之變動，且較往時更加鞏固，亦足見其根深難撼矣。十二進位之便利，惜古時無有知之者，迨算術發達，至今日已不可改矣。雖然，文明民族，其留有上古野蠻生活時蠢蠢之遺迹，又何止此一事耶。

人類依肢體之關係而創設之記數法，其五進位法及二十進位法常見於智識卑陋之種族，至智識較高之人民，則以前者進位之根太

小，後者進位之根太大，俱避而不用，特擇其適中之十進位法而用焉。各族之人民，並非一致膠執於任何一種進位法。在五進位法中，5,25,125,625等數，應爲相連各位之單位，但如此五進位法所得之數，並未見諸實用。及其增至更多之數，每每變爲十進，或變爲二十進。亞美利加洲(*America*)者，五進位法或二十兼五進位法之安宅也。其法實流行於其北方之愛斯克毛種族，流行於北美洲印第安(*Indian*)種族之一大部分，且更流行於中美及南美焉。此等進位法，北西伯利亞人(*Siberian*)及非洲之多數種族亦用之。其遺迹也，並可於現用十進位法諸種族之文字中考得之；在詩人荷馬立克(*Homeric*)之希臘文中，可見其例。而羅馬之記數法，如I, II, …V, VI, …X, XI, …XV，等等，亦表顯其遺迹者也。

所可異者，五進位之法，往往與二十進位之法相混合；蓋未開化之人，初以一手之指數爲其較高之單位，不足則繼以手指足趾之全數，爲其更高之單位。二十進位之法，其普通較遜於五進位之法，然二者不能純粹獨立則一也。在此法中，20,400,8000,160,000，爲初進四位之單位，並於猶戛旦(*Yucatan*)之馬亞人(*Mayas*)得確實考見其特別字體用以代表此等數者焉。阿茲忒克人(*Aztec*)之進位法，即表示五進位法及二十進位法之遞嬗，次第列之，即 1, 2, 3, 4, 5, 5+1…10, 10+1,…10+5, 10+5+1,…20, 20+1,…20+10, 20+10+1,…40，等等。有特別字體以表顯 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40, 等數。二十進位之法，盛行於美洲新大陸，但罕見於舊世界之歐洲。

歐洲古族遺迹之此一端，可於法蘭西文字中見之，如 *quatre-vingts* 者，卽表 4×20 或 80 也，*six-vingts* 者，卽表 6×20 或 120 也，*quinze-vingts* 者，卽表 15×20 或 300 也。更考之於英文中之 *score* (二十)一字，在 *three-score years and ten* 句內者，亦有二十進位之意焉。

在人類所設之三個進位法中，要以十進位法爲最盛行，其盛行之程度，據古之傳說，實舉世界之種族而皆用之。僅至近數世紀中，始知其他二個進位法有前人所未及知之種族曾採用之。十進位法，亦嘗用於北美印第安種之多數部落，但罕用於南美耳。

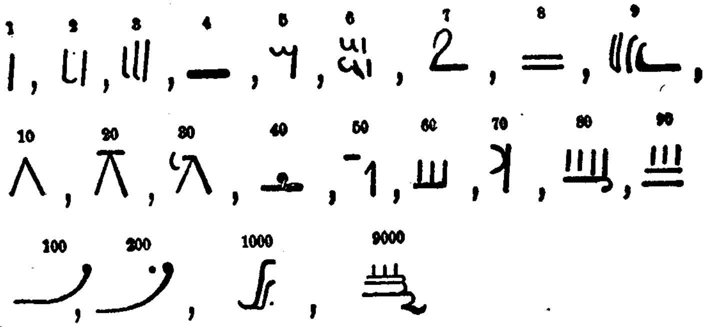
十進法之組成，蓋原於一手十指，數至十而暫停，因以爲第一次較高之單位。在 10 及 100 間之數，可以 $b(10)+a(1)$ 表之，a 及 b 爲小於 10 之整數。但 110 可以兩式表之，一爲 $10\times10+10$，二爲 11×10。然後式亦非勉強。而何以人之稱數，不仿效稱八十，九十等例，而稱一百一十以十一個十耶？於此 $10\times10+10$ 及 11×10 選擇之間，組成進位系統之樞紐，卽在是矣。所幸者，世界各國表顯十進位之法，皆依前式；而表 100 以內之數，10 之一字，與最初之單位 1 受同等之待遇。數在 100 及 1000 之間者表之以 $c(10)^2+b(10)+a$，a, b, c 爲小於 10 之整數。仿此，數在 10,000 以下者，表之以 $d(10)^3+c(10)^2+b(10)^1+a(10)^0$；並依法可表更大之數。

進而解明各種記數之法，吾人端自巴比倫始。尖形字體，及附屬之記數法，殆爲古之蘇買兒人(*Sumerian*)所發明。用豎尖劈 ▼ 以

表1,而用及以表10及100焉。數之小於100者,則各種記號之價值,依加法之例用之。如表23,表30是也。若然,則表大數者之記號,常置於表小數者之左。但表百之倍數,則置表小數者於表100之前,用以乘100。如表10×100或1000是也。取此以爲新單位,則者,依例解之,並非表20×100,實表10×1000者也。此記數法之原理,乃利用加法及乘法而成。因此法所計之數,未見有過百萬者。此外,巴比倫尚有六十進位之一法,當於以後詳之。

埃及之記數法也,由善波力温氏(*Champollion*),楊氏(*Young*),及其他學者解釋其象形文字而得之。其數目字,用以表1,以表10,以表100,以表1000,以表10,000,以表100,000,以表1,000,000,及以表10,000,000。考其數目字之形似,表1者狀若竪桿;表10,000者,若手指;表100,000者,若鳥;表1,000,000者,若受驚之人。至其他數目字所表之狀,則莫得而知。此等數目字,與其他象形文字同,皆顯然爲埃及人習見之動物及物件,蓋默示於人而取其形象焉。即視爲圖畫之優美標本也可。其記數之理,全基於加法而成,如用以表顯111者是也。

象形文字可於記念碑,方尖碑,及廟壁間見之。除此之外,埃及尚有宗教及人民兩類字體,諒皆爲象形文字之變格,似由於使用久遠及希圖速寫之故而來者。今將宗教數目字列之以見其例:



因宗教一類數目之字多於象形一類數目之字，故凡數皆可由前一類之字以簡明之式表之。至其利用加法之理，則二者皆同，且表大數之字常居於表小數者之前焉。

約當梭倫(*Solon*)時代，希臘人嘗用指示數量形容字之起首字母以代表各種數目。此等記號稱爲"赫洛德(*Herodianic*)記號"，〔蓋爲紀元後二百年，(約後漢獻帝建安五年)拜占庭(*Byzantium*)文士赫洛德所考定者也。〕亦稱爲雅典(*Attic*)記號，因其常見於雅典(*Athens*)文字中也。腓尼基人(*Phœnicians*)，敍利亞人(*Syria*)，及希伯來人(*Hebrews*)，是時已有字母，敍人與希伯來人則已用字母以表數。希臘人於紀元前五百年，(約東周敬王二十年)始採用同式之步驟。希臘各字母，與古時之三字母 ς, ϙ, ϡ, 及 *M* 字，皆用以表數，若 1 至 9，以 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, ς, ζ, η, θ 表之；十之倍數 10 至 90，以 $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi$, ϙ 表之；百之倍數 100 至 900，以 $\rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$, ϡ 表之；其餘表千之倍數以 ͵α, ͵β, ͵γ, ͵δ, ͵ε 等；表 10,000 以 M；表

20,000 以 $\overset{\beta}{M}$；表 30,000 以 $\overset{\gamma}{M}$ 等等是也。夫由雅典記數法而變爲字母記數法，實見其變本加厲，蓋前法究較爲易記耳。吾人讀希臘文法，見其言表數目之字母，上加短撇，以別於尋常之字，但此並非通例；若加一平線於字母之上，亦常具同等之意義，至字母上加撇，乃用以表單位之分數，如 $\delta'=\frac{1}{4}$ 是也。希臘人之記數，利用加法之理，及觀其用 $\overset{\epsilon}{M}$ 以表 50,000，則亦利用乘法之理矣。

羅馬之記數法，除加法之外，尙利用減法之理。若有二字母於此，前者表小數，後者表大數，則爲後者減去前者之意。如 IV＝4，與 VI＝6 是也。雖此理不見於他種記數法，然有時見於他種數量文字。如拉丁(*Latin*)字 *duodeviginti* ＝20 減 2 或 18 是也。羅馬數目文字殆以伊特拉司坎(*Etruscan*)字爲其根源。

若巴比倫，埃及，希臘，羅馬，及其他上古時之十進位記數法者，皆用少數記號以表數，此等記號或僅利用加法之理，或兼及於乘法或減法之理。但無一及於定位法緊要之理，如吾人今日之所用者。失此一端，古人卽失零號之用，故其距意想之記數法尙甚遠也。就此點言之，卽希臘羅馬人亦始終未能成就，若近百年來始與歐人通聞問之亞洲一遠國所成就之偉績，卽印度(*India*)是也。未論印度之前，吾人須再論巴比倫之記數法，其進位之可異者，非五，非十，亦非二十，其用意甚近於意想原則爲其他種人所缺乏者，卽六十進位之記數法是也。

此法也，巴比倫人大半用之以組成重量及度量之數。其先之蘇買

兒人，無論於整數分數，此六十進位法俱稱發達，實顯其數學之優異焉。此法得之於巴比倫之二册葉。第一册葉之紀年，殆爲紀元前一千六百年（商太戊三十八年），或紀元前二千三百年（唐堯五十八年），載自 1 至 60 平方之數。其最初七數，卽 1, 4, 9, 16,25,36,49 也。其次則 $1\cdot 4=8^2$, $1\cdot 21=9^2$, $1\cdot 40=10^2$, $2\cdot 1=11^2$等等也。此式非依六十進位法，不能解之，因 $1\cdot 4=60+4$ $1\cdot 21=60+21$ 等等也。第二册葉記錄太陰自生魄至望每日光體之大小，令其全體爲 240 分焉。起首五日之光體，爲 5,10,20,40, $1\cdot 20(=80)$ 之級數。其六十進位之法，於此可見，且可知其具有幾何級數之智識。後此則變爲算術級數，如五日至十五日之數爲 $1\cdot 20$, $1\cdot 36$, $1\cdot 52$, $2\cdot 8$, $2\cdot 24$, $2\cdot 40$, $2\cdot 56$, $3\cdot 12$, $3\cdot 28$, $3\cdot 44$, 4. 是也。在此六十進位法之中，吾人得定位之理焉。如 $1\cdot 4(=64)$ 一式，1 者，所以表 60 者也，對於 4 具位置之關係，而表其高一位之單位也。巴比倫利用定位之理，其先於印度者殆二千年之久，其時羅莫耶與立麻兄弟以及阿齊來，買尼勞，及海倫猶未見於歷史及詩歌中也。但欲定位之理完全發達，必須一記號以表零。約紀元前二百年（漢高帝七年）之巴比倫記錄，卽有表零之記號，其意指空一位，但未顯然作術算之用耳。其記號維何，卽 ⋞ 是也。約紀元一百三十年（約後漢順帝永建五年），托勒密（*Ptolemy*）嘗用六十進位之分數，並用希臘字母"o"以表其空位。此 o 之一字，並非用作正式之零。故巴比倫者，雖知定位之理，且有零之記號以表空位，但未用之以入算耳。其六十進位之分數法，後卽流傳

於印度。

果何事以促醒巴比倫人而用六十爲進位之根乎? 坎桃 (*Cantor*) 及其他學者,則爲之解答如下:巴比倫人蓋最初以三百六十日爲一年。由此分圓周爲三百六十度,每度表太陽繞地之假定年周一日之數。用半徑作弦於圓內連續六次,圓周適盡,彼等或早知此理。故每弧得六十度,若然,則平分六十,以爲進位之根,由此起矣。更進則每度再分爲六十等份,命之曰分。至分一日爲二十四時,依六十進位法,再分爲分爲秒,亦始於巴比倫。外此,六十進位命分之例,如此後之希臘人,亞拉伯人(*Arabs*),中古時之學者,及近時之學者,皆採用之。

巴比倫之科學,已深留印象於近世之文化。測量家錄儀器之弧度,近世人記晝夜之時刻,皆不知不覺而端然效法彼幼發拉底(*Euphrates*)河岸已往之天文家矣。

吾人十進位記數法之完全發達,蓋屬於比較近世之時代。夫十進位法之簡明便利,乃在利用定位之理,然未知此法以前,十進法之行用蓋已數千年矣。吾人之有零號之用,定位之理,實受印度人之賜,彼等於紀元後五世紀,或六世紀(俱約南北朝時),久已通行。於數學諸凡發明之中,其能助普通之進步誠無有勝於此者。至於舊式之記數法,只可記錄演算後之答案,而印度之記數法(嘗誤稱爲亞拉伯記數法),在演算其數時,實具可驚之助力焉。欲證此理,試以723乘364,而先以羅馬記數法表之,如 *DCCXXIII* 乘 *CCCLXIV*

是。然如此記數，實難佈算，故羅馬人對此等運算，遂彼迫而不得不乞助於算盤焉。

印度(*Hindu*)記數法發展之情狀，可得而知者甚鮮。其信而有徵者，當紀元後二世紀時(後漢時)，印度之記數法，尚無零號，亦無定位之理。在錫蘭 (*Ceylon*) 島間，有一類似印度而無零號之記數法，迄今尚保存無恙。蓋印度之佛教及其文化，約紀元後三世紀時(約後漢及晉時)，流傳於彼土，巍然而無所變遷者也。則錫蘭記數法者，或誠爲印度不完全之古法歟。除 1 至 9 數目字之外，錫蘭尚有字以表 10 之倍數，並有字以表 100 及 1000。如 7685 一數，將用六字以表之，卽用一字以表 7，用一字以表 1000，又各用一字以表 6，表 100，表 80 及 5 是也。然此等所稱爲錫蘭語之記號者，殆先爲相當數目形容字之起首字母，若古印度之數目字然。且印度古語之數目形容字，其 1 至 9 之字，異於英語，其起首之字母各不相同，故無混亂之事。夫經時代之變遷，印度字母之體，亦隨而改易，但其狀極似波伊悉阿斯(*Boethius*)氏及西亞拉伯之數目字者(當見之於後)，則其紀元後二世紀時(後漢時)之字母也。

印度最初表零之記號，爲一小點，無論刻字及抄錄，皆用之以記空位，此誠類似更古之巴比倫人及托勒密氏所用表零之記號。至若吾人表零之號，紀元後五世紀時(東晉及南北朝時)，阿雅巴塔氏(*Aryabhatta*) 或已知之。至在印度，則其最初之確然見諸實用者，係在紀元後八百七十六年也(唐僖宗乾符三年)。

印度人有各種不同之記數法。有時因便利故，而用標識之意義以記數，如 1 可以月或地球表之，2 可以眼目表之之類。在印度某天文書之中，1577917828 一數，由單位起表法如後：如，偉蘇（八神團體）——二——八——山（比喻之七山脈）——某物狀（可表 1 者）——數目字（九數目字）——七——山——太陰日（陰曆半月有十五日）是也。此記數法實屬有趣。似爲記錄之用而以之記日及數者。擇同義之字，以易其暗昧之辭；使強記之事歸於簡易。此其用意，教師或可於課室中仿行之。

印度之記數法，本其已發達狀態，在十二世紀時（宋時）流傳於歐洲。其流傳於西方也，經過亞拉伯，所以有亞拉伯記數法之稱焉。但冒此僞名，並非亞拉伯之咎，因其固嘗自認此記數法爲印度之遺產也。在紀元後一千二百年（南宋寧宗慶元六年）前之一千年間，印度數目字與記數法，及其發展之順序，挨次流傳於各國。至究其流傳之眞相如何，則實爲極端之難題。雖久尼阿司（*Junius*）尺牘一書著者之問題，且未引起如許之聚訟。惟其事實，猶可解釋而條貫之如次：

1. 十二世紀之末，學者漸知吾人之數目字非屬於亞拉伯，實以印度爲其源，同時亞印二國之數字適具同形之說，宣傳亦廣。所最可奇者，當亞拉伯有一種數目字，所謂“孤巴（*Gubar*）數字”者，發現之時，其中有大多數字，對於近時印度字之所謂“德溫拿加利（*Devanagari*）數字”者，乃絕無形似之處。