9

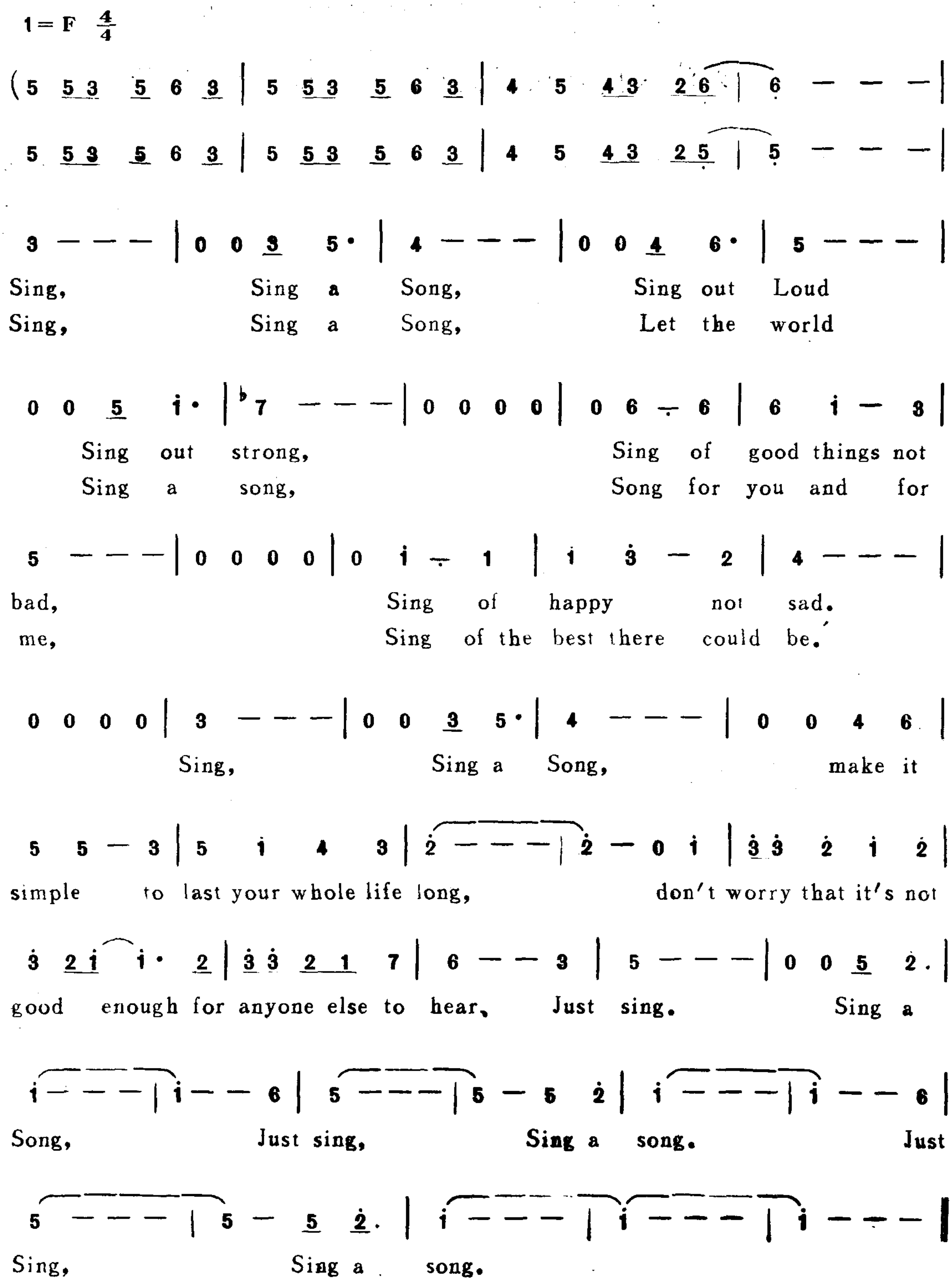
1981

高中课程辅导

GAOZHONG KECHENG FUDAO

天津人民出版社

Sing

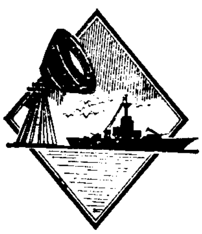

1=F 4/4
Sing, Sing a Song, Sing out Loud
Sing, Sing a Song, Let the world
Sing out strong, Sing of good things not
Sing a song, Song for you and for
bad, Sing of happy not sad.
me, Sing of the best there could be.
Sing, Sing a Song, make it
simple to last your whole life long, don't worry that it's not
good enough for anyone else to hear, Just sing. Sing a
Song, Just sing, Sing a song. Just
Sing, Sing a song.

高中课程辅导

第 九 辑

〔高二上学期〕

目 录



编辑出版　天津人民出版社

天津市赤峰道124号

印　　刷　天津新华印刷二厂

发　　行　天津市新华书店

开本787×1092毫米1/16印张4字数100,000

统一书号：7072·1233

定　　价：0.32元

一九八一年十一月出版

数学

我是这样学数学归纳法的

赵　慈　庚

有些人说数学归纳法难懂，真的难懂吗？我的老师讲数学归纳法时，让人听起来很轻松，现在看来他的讲法好象治病的偏方．偏方也罢，能治病就好，现在讲给大家，也许多少有一点启发．

按照社会的姓氏传统，如果阿强是姓王的男人，那么他的任何一个后代一定也姓王，进而断定阿强的无穷多代子孙都姓王．一个男子姓王，那么他的后代子孙代代都姓王，这是一条定理．平常人们只是把这当作一件理所当然的事情，从经验上承认它正确，我们不妨把其中的道理分析一下．首先是要

阿强姓王　　　　(1)

其次是中国的姓氏在父系亲属里有遗传性

只要有一代姓王，下一代一定也姓王．　(2)

现在把这两条结合起来用于阿强的家族．第一从假设的（1）知道

阿强姓王，

根据条件(2)　　　阿强的儿子姓王，

再根据条件(2)　　阿强的孙子姓王，

……

这样一代一代地传下去，不论哪一代总有传到的时候；那么一传到谁，谁就姓王．所以我们知道阿强的后代子孙都姓王．

这就是数学归纳法的推理．

现把上面的话说得规格一些．阿强的任何一个后代W_n，总能从阿强W_1开始，父子相连地排成一串

$$W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n.$$

从W_1挨个儿地数（shǔ）下去，总有数到W_n的时候，由于姓氏的遗传性，一数到W_n就知道W_n姓王．阿强的后代无穷无尽，我们只能说对于任何自然数n，W_n都姓王．这情况在数学里就用一句行话说“无穷多的一串人

$$W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n,\ \cdots \qquad (3)$$

都姓王”．注意这是说(3）是无穷多个有限串

$$\left.\begin{array}{l} W_1; \\ W_1,\ W_2; \\ W_1,\ W_2,\ W_3; \\ W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4; \\ \quad\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (4)$$

的简写．即是说(3）里的W们都能数(shǔ)得到．

数学归纳法是证明无穷多个东西都有某种性质的一种方法．这方法的模式是，

如果无穷多事物按某种关系排成一串

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$$

（a）假设A_1有某种性质P；

（b）假若P在这串事物中有遗传性——即“当某项A_k有性质P时，下一项A_{k+1}一定也有性质P”．

那么从A_1以后的一切事物A_2，A_3，…一定都有性质P．

〔**例 1**〕试证n边形的内角和等于($n-2$)平角．

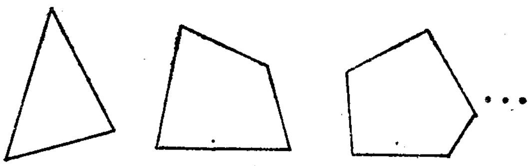


图 1

先分析问题的意义．n代表任意自然数，“n边形”三字就代表无穷多的一串图形（图1）：

三边形，四边形，五边形，… (5)

——按边数排列起来的封闭凸直线形．问题是要证明这一串图形有一个共同的性质：内角和＝$(n-2)$平角．证明分两步：

(a) 证明：三边形符合题意．

这是因为三边形内角和＝1平角＝$(3-2)$平角．

(b) 证明：假定k边形符合题意，那么$k+1$边形也符合题意．

假设$A_1A_2\cdots A_{k-1}A_kA_{k+1}$是任意$k+1$边形（图2）．线段$A_1A_R$把它分成一个三角形$A_1A_kA_{k+1}$和一个$k$边形$A_1A_2\cdots A_k$．那么根据($a$)知道

$\angle A_1A_kA_{k+1}+\angle A_kA_{k+1}A_1+\angle A_{k+1}A_1A_k=1$平角．

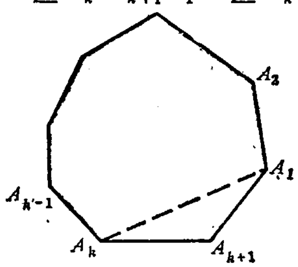


图2

又根据(b)的假设，知道

$\angle A_kA_1A_2+\angle A_2+\cdots+\angle A_{k-1}+\angle A_{k-1}A_kA_1=(k-2)$平角．

两式相加，得

$\angle A_1+\angle A_2+\cdots+\angle A_{k-1}+\angle A_k+\angle A_{k+1}=[(k+1)-2]$平角．

从(a)、(b)两步证明知道任意n边形的内角和是$(n-2)$平角．

从这例题知道数学归纳法所涉及的自然数n不一定从1开始．

〔例2〕 如果多角星形的角尖数是奇数，每个顶角内部没有其他顶点．试证顶角的和是180°．

这是要证明无穷多的一串多角星形（图3）

三角星，五角星，七角星，…，$(2n+1)$角星，… * (6)

有共同性质：内角和＝180°．

(a) 证明： 三角星各角和是180°．

三角星就是三角形（图3），内角和＝180°．

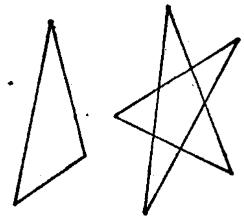


图3

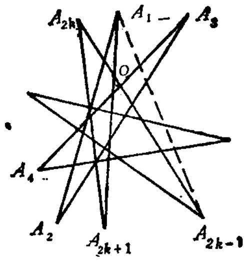


图4

(b) 证明：假定$(2k-1)$角星顶角和是180°，那么$(2k+1)$角星顶角和是180°．

设$A_1\cdots A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}$是$(2k+1)$角星形（图4）．连$A_1A_{2k-1}$，去掉$A_1A_{2k+1}$，$A_{2k+1}A_{2k}$及$A_{2k}A_{2k-1}$就成了$(2k-1)$角星形$A_1\cdots A_{2k-1}$．这时减少了$\angle A_{2k}$及$\angle A_{2k+}$两个顶角，但是原来的$\angle A_1$及$\angle A_{2k-1}$分别扩大了$\angle A_{2k+1}A_1A_{2k-1}$及$\angle A_1A_{2k-1}A_{2k}$．假设$A_1A_{2k+1}$及$A_{2k}A_{2k-1}$的交点是$O$，从三角形的外角定理知道

$$\begin{aligned}&\angle A_{2k}+\angle A_{2k+1}\\=&\angle A_1OA_{2k}\\=&\angle A_{2k+1}A_1A_{2k-1}+\angle A_1A_{2k-1}A_{2k}\end{aligned}$$

所以$(2k+1)$角星形$A_1A_2\cdots A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}$各顶角的和等于$(2k-1)$角星形$A_1A_2\cdots A_{2k-1}$各顶角的和．根据($b$)的假设这是180°．

从(a)、(b)两步证明，知道原命题成立．

这里应该说一下数学归纳法究竟有多大功能．序列（3）是（4）中无穷多个有限序列的简写．用（4）分开来写就明显地看出来，对于（3）里的每一项都能从A_1挨着个儿地数到它．能数到哪一项，性质P（姓王）就能传到哪一项．所以用数学归纳法证明的定理只能达到人们能够数得到的那样多事物．也就是证明的结论只能对一切自然数

---

* 画这种多角星的方法，先在平面上画$2n+1$（比如9）个点，使它们大致排列成一个环．随便取一点作为A_1，从这点开始按固定方向数n（比如4）个点，把这点记作A_2，连A_1A_2，再从A_2继续向前数n（4）个点记作A_3，连A_2A_3．如此继续作图．直到回于A_1为止，星形就画成了．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

成立.

〔例3〕用任何自然数n乘3，乘积$3n$的各位数码的和一定是3的倍数.

这是说无穷数列

$$3, 6, 9, 12, 15, \cdots, 3n, \cdots \quad (7)$$

中每个数的数码加在一起一定是3的倍数.

(a) 证明：当$n=1$时，命题成立. 这显然.

(b) 证明：假设$n=k$时命题成立，那么$n=k+1$时命题也成立.

这时要作一点准备工作：任何整数N加3以后各数码之和如何改变. N的个位小于7时，各数码的和增加3. N的个位是7，8，9时，加3要进位. 如果只进一次，数码的和减少6. 例如个位是8，由于进位破成十位的1和个位的1，$1+1=2$比原来的8少了6，这是3的倍数. 如果进位两次，十位原来必是9，后两位98变成了101，$1+1=2$比$9+8=17$少了15，也是少了3的倍数. 不难想到不论进位几次，数码和总是减少3的倍数. 所以

$N+3$的数码和$=N$的数码和$\pm$3的倍数. (8)

现在来看$3(k+1)=3k+3$的数码和；这里已知

$3k$的数码和$=3$的倍数.

根据(8)

$3k+3$的数码和

$=3k$的数码和$\pm$3的倍数

$=3$的倍数$\pm$3的倍数

$=3$的倍数.

从以上两步证明知道(7)中每数的码数和是3的倍数.

这例题证明“遗传性”时，不象前两个那样利索. 尽管如此，耐心地分析下去，总能达到目的. 用数学归纳法证明定理时，要注意所证的结论可能表面上仅是一句话，而实际是无穷多相似的结论. 证明以前能象(4)、(5)、(6)、(7)、那样把求证的一串对象写一下，会有助于思考. 然而，并不是每题都能顺利地写出来.

〔例4〕 b是大于1的固定的正整数. 对于每个自然数n一定有非负整数q与r，满足

$$n=qb+r, \qquad (0\leqslant r<b.)$$

b不是具体的数字，要证的一串等式写起来很不方便. 这时可以这样分析：

$0<n<b$时，$n=0\cdot b+n$，$q=0$，$r=n$；

$b\leqslant n<2b$时，$n=1\cdot b+(n-b)$，$q=1$，$r=n-b$；

$2b\leqslant n<3b$时，$n=2b+(n-2b))$，$q=2$，$r=n-2b$；

……

这情形和进位法相似；试想$b=10$时，上边这些等式不就是数(shǔ)数的过程吗？从这些关系可以发现q与r的变化规律，是

q在$n=b$的倍数时进1，别时不变；

r在0，1，…，$b-1$(共b个数)上循环，$n=b$的倍数时，$r=0$.

从此知道 $k=q_1b+r_1$与$k+1=q_2b+r_2$的关系是

$k+1\neq b$的倍数时，$q_2=q_1$，
$r_2=r_1+1$，

$k+1=b$的倍数时，$q_2=q_1+1$，
$r_2=0$.

知道了这些，证明工作就不难了.

使用数学归纳法，必须注意(a)、(b)两步缺一不可. 没有(b)便只知道“1有某性质p”，自然不能说每个自然数有性质p. 没有(a)也不行. 这好比只知道姓氏在父系亲属有遗传性，而不知道阿强姓王. 就不能说阿强的后代姓王.

〔例5〕 假若$1+2+\cdots+k=\frac{1}{8}(2k+1)^2$，很容易由此证明 $1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{8}[2(k+1)+1]^2$. 但是

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{8}(2n+1)^2 \quad (9)$$

对于任何正整数n不成立. 原因是不具备数学归纳法的(a)条. 如果(a)改作不等式

$$1+2+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$$

就是正确公式了. 读者可以自己证明.

验证首项一般都很容易，麻烦或错误多半发生在“遗传性”的证明.

怎样学好数学归纳法

北京　明知白

数学归纳法是数学中一个重要的证明方法．学好它的关键是掌握好第二步归纳证明，并且了解在什么情况下使用这种方法．这里谈一下这两个问题．

为了叙述的方便，我们把关于自然数n的命题记作$P(n)$，于是数学归纳法的两步是：

(1)　验证$P(n_0)$（例如$n_0=1$或2等）正确；

(2)　由假设$P(k)(k\geqslant n_0)$正确推出$P(k+1)$正确．

根据(1)和(2)，对任意自然数$n(n\geqslant n_0)$ $P(n)$正确．

一、关于数学归纳法的第二步

用数学归纳法证题时，两步缺一不可，难点在于第二步，其关键是怎样利用$P(k)$推出$P(k+1)$．中学课本中，主要涉及四类问题：等式问题、整除性问题、几何问题与不等式问题，重点是证等式与不等式，难点是几何问题与不等式问题．这四类问题，由$P(k)$到$P(k+1)$，各有一些具体的方法与技巧，现分述如下：

（一）等式问题

本章中的有关例题习题，主要是证明一串和式的结论，等我们学过"数列"之后，我们知道，这类问题叫"数列求和"问题，那时，部分题目可用求和公式直接算出，部分题目可用其他求和方法简便得出．限于目前知识，我们用数学归纳法证，第二步一般是在$P(k)$的基础上，经"同加"与"变形"两步，便可得出$P(k+1)$来．

〔例1〕　用数学归纳法证明等式

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$$

$$=\frac{1}{3}n(4n^2-1).$$

我们来分析第二步，假设$n=k$时等式成立，就是

$$1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2$$

$$=\frac{1}{3}k(4k^2-1).\qquad(1)$$

再考虑$n=k+1$时的式子

$$1^2+3^2+\cdots(2k-1)^2+(2k+1)^2$$

新书介绍

《中学生科学的学习方法》

本书作者为日本研究学习方法的专家田崎仁。他从心理学和生理学的角度，针对中学生的年龄特点和不同人的性格特征，对中学生的学习方法提出了指导性的意见，深入浅出地讲解了怎样制订学习计划、如何充分利用时间、环境和各方面的条件进行学习，以及怎样加强记忆、提高阅读效率和应考技能等问题。本书可帮助中学同学改进学习方法，提高学习效率。

《记忆的奥秘》

怎样才能使自己的记忆力不断加强呢？这是同学们十分关心的问题。《记忆的奥秘》正是回答这一问题的。本书作者是中国科学院心理研究所助理研究员。他在书中介绍了关于记忆的基本知识、提高记忆效率的条件，科学的记忆方法以及记忆与观察、思惟、想象等能力的关系等。此书内容丰富，文字通俗，适合青少年阅读。

《历届高考文言文译解》

本书是为了帮助高中毕业生复习、巩固新学的古汉语知识，准确熟练地解答文言文试题而编辑的。书中收集了建国以来历届高考语文试卷中文言文方面的试题，并附有参考答案。书中还收有《怎样解答文言文试题》、《文言实词词类活用例释》、《常用文言虚词用法例解》、《中学语文课本文言文通假字》等文章和资料。

$$=\frac{1}{3}(k+1)[4(k+1)^2-1]. \qquad (2)$$

这是待证的等式，比较两式左边，(2)式比(1)式多出一项$(2k+1)^2$，于是我们在(1)式的两边"同加"一项$(2k+1)^2$，得

$$1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2. \qquad (3)$$

我们的任务归结为证明(2)式与(3)式的右边相等，这可通过适当的"变形"得到.

$$\because\ \frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2$$

$$=\frac{1}{3}(2k+1)[k(2k-1)+3(2k+1)]$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3).$$

$$\text{又}\ \frac{1}{3}(k+1)[4(k+1)^2-1]$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3).$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)[4(k+1)^2-1].$$

分析成功，在书写证明时，可按书上格式简明写出，此处从略.

例1的分析具有一般性，课本上这类题目几乎都是这样的考虑，由$P(k)$到$P(k+1)$，一般是两步，一是"同加"，二是"变形"，为使同加与变形这两步目标明确，初学者可先将$P(k)$与$P(k+1)$两式统统写出，以利推证．作了这个总结，"数列求和"问题就容易解决了，再看一例.

〔例2〕 求证：

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

仍分析第二步，设$n=k$时等式成立，就是

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\cdots+\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

两边同加$\sin(k+1)\alpha$，得

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\cdots+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\sin(k+1)\alpha.$$

往下应是"变形"，其目标是$n=k+1$时，原等式右边的式子变成

$$\frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{(k+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

只要我们一边变形，一边瞧准目标，总是可以达到目的，留给同学们去作.

(二) 整除性问题

这类题从课本上的题目来看，第二步主要是对$P(k+1)$（一般是二项式或多项式）的各项，或减项加项，或拆项分离，或展开重新组合，将原式分成两大部分，使其中一部分可以利用归纳假设，而另一部分的整除性又显然可得，于是推出$P(k+1)$正确.（例题略）

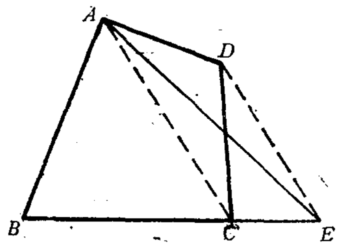
(三) 几何问题

几何问题的第二步一般没有一定之规，有的题目难度也大，但有一个基本原则，就

是要注意利用图形的特点，把握由k到$k+1$时图形的变化，以利用归纳假设．有时由于由k到$k+1$比较抽象，思考困难，我们在第一步验证了$P(n_0)$之后，不妨再验证$P(n_0+1)$，以利寻求由$P(k)$到$P(k+1)$的解题规律．

〔例4〕 求证：任意凸n边形都可以变成一个和它等积的三角形．

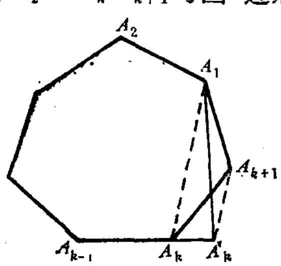
〔证明〕 当$n=3$时，命题显然成立．按理可以进入第二步了，但我们不妨看看$n=4$的情况．



图一

当$n=4$时，有任意凸四边形$ABCD$（图一），连结AC，由D作$DE \parallel AC$交BC延长线于E，连AE，因为$\triangle ACE$和$\triangle ACD$等积，所以$\triangle ABE$即为所求三角形．

假设$n=k$时，命题正确，即任意凸k边形都可以变成和它等积的三角形．对于凸$k+1$多边形$A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$（图二），连结A_1A_k，由A_{k+1}作$A_{k+1}A'_k \parallel A_1A_k$，交$A_{k-1}A_k$延长线于$A'_k$．连$A_1A'_k$，由$\triangle A_1A_kA'_k$与$\triangle A_1A_kA_{k+1}$等积，所以凸$k+1$多边形$A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$与凸$k$边形$A_1A_2\cdots A_{k-1}A'_k$等积，根据归纳假设，这个凸$k$边形与一个三角形等积，于是凸$k+1$多边形与这个三角形等积．



图二

由上可知，对任意自然数$n(n\geqslant 3)$，命题正确．

（四）不等式问题

用数学归纳法证明不等式，一般说来难度较高，其原因是由$P(k)$到$P(k+1)$，常常要对不等式的一边采用“放大或缩小”的方法，而这一方法，在中学阶段训练较少，同学们感到陌生，同时，它的技巧性高，灵活多变．因此这类问题成为这一章学习的难点．什么是“放大缩小法”？就是在不等式的推导中，通过“舍掉一些正（负）项”或“增加一些负（正）项”，而使不等式的各项之和变小（大）；在分式不等式中，通过“放大或缩小分式的分子或分母”而使分式放大或缩小．这就是“放大缩小法”．我们通过例题来说明．

〔例5〕求证：$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个}}<\sqrt{a}+1$，$(a>0)$．

我们只证第二步，假设$n=k$时不等式成立，就是

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k\text{个}}<\sqrt{a}+1.$$

那么当$n=k+1$时，

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k+1\text{个}}$$

$$=\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}_{k\text{个}}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}.$$

这一步用到归纳假设，再往下，由$a>0$得

$$\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1.$$

就运用了“放大”，而放大的结果，恰好是所需要的式子$\sqrt{a}+1$，由不等式的传递性得

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k+1\text{个}}<\sqrt{a}+1.$$

这说明$n=k+1$时，不等式成立．

有些题目，“放大或缩小”的途径不十分明显，则可采用分析法，以求得第二步的迅速解决．

〔例6〕求证：$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$，$(n>1)$

现在分析第二步，设$n=k$时不等式成立，就是

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k},\ (k\geqslant 2)$$

两边同加$\frac{1}{\sqrt{k+1}}$，得

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

下面应对式子$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$进行"缩小"，但途径不明，我们采用分析法，只要证

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}},$$

而$\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$是显然的，由此可得

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}.$$

此即$n=k+1$时不等式成立.

用数学归纳法证明不等式；第二步的思考程序大体如下（就课本中题目而言）：

设$P(k)$是$A>B$，$P(k+1)$是$C>D$.我们的任务是由$A>B$推出$C>D$来.多数题目是从$A>B$入手，两边"同加"或"同乘"一个式子，得到$C>D_1$（或$D<C_1$），然后对D_1（或C_1)进行"缩小"（或"放大"）：$D_1>D_2>\cdots>D$（或$C_1<C_2<\cdots<C$），从而得出$C>D$来.必要时，可将问题转化为只要证$D_1>D$（或$C_1<C$），这样目标明确，路子也广了，在"不等式的性质和证明"一章中所学的各种方法，如比较法、分析法、综合法与反证法等等，都可选用.

有的题目不便对$P(k)$采用两边"同加"或"同乘"的方法，而是直接从$P(k+1)$的一边入手，在推导中，利用$P(k)$而推出$P(k+1)$的另一边来．如证明不等式：

$$|\sin n\theta|\leqslant n|\sin\theta|$$

就是这样的题目，再看一例.

〔例7〕求证：$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>n!.\ (n\geqslant 2)$

〔证明〕（1）$n=2$时，左$=2\frac{1}{4}$，右$=2$，所以左>右，不等式成立.

（2）设$n=k$时不等式成立，就是

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^k>k!\ .$$

于是$n=k+1$时有

$$\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}=\left(\frac{k+1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}+(k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$

$$>\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}+\frac{k+1}{2}\cdot\left(\frac{k+1}{2}\right)^k\text{（舍掉一些正项而得）}$$

$$=(k+1)\cdot\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$$

$$>(k+1)\cdot k!\text{（依归纳假设）}$$

$$=(k+1)!\ .$$

这就是说，$n=k+1$时，不等式成立.

根据(1)和(2)，对任意自然数$n(n\geqslant 2)$，原不等式成立.

二、什么情况下用数学归纳法

这个问题很难确切的回答，有关自然数n的命题，有些可以用数学归纳法，但不一定都用数学归纳法证，要视具体情况而定，如果能直接计算或证明时，当然不一定用数学归纳法，如前面提到的数列求和问题，今后可用求和公式计算，再如证明：

$$\frac{a}{b}<\frac{a+n}{b+n},\text{（其中}b>a>0,n\text{是自然数）}.$$

当然可对n进行归纳，但不如直接证明好，它是"不等式的性质和证明"一章中一个例题的特例．又如组合总数公式

$$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1,$$

可利用$(1+x)^n$的展开式得到，不必用数学归纳法了．再如前面所举的例7，我们还可

以利用“n个不等的正数的算术平均值大于它们的几何平均值”，非常简捷地证出.

$$\because \sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$$

$$<\frac{1+2+\cdots+n}{n},$$

又 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

于是 $\sqrt[n]{n!}<\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$

$\therefore \left(\frac{n+1}{2}\right)^n>n!$.（证毕）

一类关于整除性命题的证法技巧

北京 徐望根 高存明

一类关于整除性的命题$N|f(n)$，（即对任何自然数n，$f(n)$能被自然数N整除.）用数学归纳法证明第二步时，要把$f(k+1)$变形，表示成关于$f(k)$的关系式，以利用归纳法证明.但在变形过程中，常见学生有拼凑现象.为了避免这种现象，应从$f(k+1)$中，准确迅速地分离出二部分，一部分有$f(k)$的因子，另一部分具有明显的命题的性质.用式子表示，就是

$$f(k+1)=A(k)f(k)\pm B(k).$$

〔$A(k)$,$B(k)$或为常数，或为k的函数〕由归纳假设：$N|f(k)$，而$B(k)$具有明显的命题性质，即$N|B(k)$.这样从$N|f(k)$，$N|B(k)$就转化到$N|f(k+1)$，完成了归纳法第二步的证明，再和第一步合在一起，使原命题得证.

上述把$f(k+1)$分离出二部分的方法常采用下面三种：析拆法、代入法、除法.举例说明如下：

〔例〕当n是正整数时，$3^{2n+2}-8n-9$能被64整除.（课本第三册P147习题九，2（4）.）

〔证一〕：（析拆法）

$$3^{2(k+1)+2}-8(k+1)-9$$
$$=3^2(3^{2k+2}-8k-9)+3^2\cdot 8k+3^2\cdot 9-8(k+1)-9$$
$$=3^2(3^{2k+2}-8k-9)+64(k+1).$$

（仅写出转化过程，其它步骤略去，下同.）

〔证二〕（代入法）

由归纳假设，设$3^{2k+2}-8k-9=64M$，（M为大于等于1的自然数）

$\therefore 3^{2k+2}=64M+8k+9$

把它代入到$f(k+1)$中，即

$3^{2(k+1)+2}-8(k+1)-9=3^2(64M+8k+9)-8(k+1)-9=3^2(64M)+64(k+1)$.

〔证三〕（除法）

$$\begin{array}{l|l} 3^{2(k+1)+2}-8k\quad -17 & 3^{2k+2}-8k-9 \\ \underline{3^{2(k+1)+2}-3^2\cdot 8k-3^2\cdot 9} & 3^2 \\ \qquad\qquad 64k\quad +64 & \end{array}$$

即$3^{2(k+1)+2}-8k-17=3^2(3^{2k+2}-8k-9)+64(k+1)$.

这三种解法，实质都一样.但从式子变形来说，用析拆法有迅速、方便、清楚的优点.

运用析拆法的步骤是：

(1)先迅速析出$f(k)$，即写出第一项$A(k)f(k)$，$A(k)$的确定方法是：在$A(k)f(k)$中正好包含$f(k+1)$中的高次项或幂指数的最高一项.（若次数或指数相等，就取包含较为复杂的一项；若又有幂形式又有多项式，可先取包含幂形式这一项.如上例中，第一项$3^2(3^{2k+2}-8k-9)$中包含为$3^{2(k+1)+2}$项.）

(2)确定$A(k)f(k)$这第一项后，为了使两边恒等，用多减少加的办法往下进行，并与$f(k+1)$的其余项合在一起作为第二项$\pm B(k)$（如上例第二项是$3^2\cdot 8k+3^2\cdot 9-8(k+1)-9$.）

(3)化简$\pm B(k)$，使具有命题性质（如

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

上例$B(k)=64(k+1)$.

这里的"析"就是在第一项中析出$f(k)$，这里的"拆"就是把$f(k+1)$拆成上述所说的第一、二项，先"析"后"拆"．当$f(k+1)$较为复杂时，先"析"后"拆"比先"拆"后"析"方便.

〔例2〕$4^{2n+1}+3^{n+2}$能被13整除（课本第三册$P158$复习题四，14(1).）

〔证〕（析拆法）

$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}$

$=4^2(4^{2k+1}+3^{k+2})-4^2\cdot 3^{k+2}+3^{(k+1)+2}$

$=4^2(4^{2k+1}+3^{k+2})-13\cdot 3^{k+2}$.

〔例3〕当n为正奇数时，x^n+y^n能被$x+y$整除（课本第三册$P147$习题九2(2)）

〔证〕（析拆法）设$n=2k-1$（k为自然数），对k进行归纳

$x^{2k+1}+y^{2k+1}$

$=x^2(x^{2k-1}+y^{2k-1})-x^2y^{2k-1}+y^{2k+1}$

$=x^2(x^{2k-1}+y^{2k-1})-y^{2k-1}(x+y)(x-y)$.

下面用析拆法另举两例，其证法完整写出，以见其一般.

〔例4〕不论自然数s和n为何值，

$(S+1)^{2n+1}+S^{n+2}$可被S^2+S+1除尽.

〔证明〕(1) 当$n=1$时，$(S+1)^3+S^3=(2S+1)(S^2+S+1)$结论成立.

(2) 若当$n=k$时，命题成立，欲证$n=k+1$时，命题亦成立．事实上

$(S+1)^{2(k+1)+1}+S^{(k+1)+2}$

$=(S+1)^2[(S+1)^{2k+1}+S^{k+2}]-(S+1)^2S^{k+2}+S^{(k+1)+2}$

$=(S+1)^2[(S+1)^{2k+1}+S^{k+2}]-S^{k+2}(S^2+S+1)$,

第二项明显能被S^2+S+1整除，第一项由归纳假设亦能被S^2+S+1整除，故$(S+1)^{2(k+1)+1}+S^{(k+1)+2}$能被$S^2+S+1$整除，即$n=k+1$时，命题亦成立.

因此，不论自然数S和n为何值，原命题成立.

〔例5〕对任何自然数n,a,b,

$(a+b)^{6n-1}-a^{6n-1}-b^{6n-1}$能被$a^2+ab+b^2$整除.

〔证明〕(1) 当$n=1$时，

$(a+b)^5-a^5-b^5$

$=(a+b)^5-(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$=(a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4-a^4+a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4)$

$=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$命题成立.

(2) 若当$n=k$时，命题成立，欲证$n=k+1$时，命题亦成立．事实上

$(a+b)^{6(k+1)-1}-a^{6(k+1)-1}-b^{6(k+1)-1}$

$=(a+b)^6[(a+b)^{6k-1}-a^{6k-1}-b^{6k-1}]+(a+b)^6a^{6k-1}+(a+b)^6b^{6k-1}-a^{6(k+1)-1}-b^{6(k+1)-1}$

$=(a+b)^6[(a+b)^{6k-1}-a^{6k-1}-b^{6k-1}]+a^{6k-1}[(a+b)^6-a^6]+b^{6k-1}[(a+b)^6-b^6]$.

考虑$(a+b)^6-a^6=$

$[(a+b)^3-a^3][(a+b)^3+a^3]$

$=b(3a^2+3ab+b^2)(2a+b)(a^2+ab+b^2)$,

所以$(a+b)^6-a^6$能被a^2+ab+b^2整除.

同理$(a+b)^6-b^6$能被a^2+ab+b^2整除.

又根据归纳假设$(a+b)^{6k-1}-a^{6k-1}-b^{6k-1}$能被$a^2+ab+b^2$整除，故$(a+b)^{6(k+1)-1}-a^{6(k+1)-1}-b^{6(k+1)-1}$能被$a^2+ab+b^2$整除．所以$n=k+1$时，命题亦成立.

因此，对任何自然数n,a,b原命题成立.

谈谈排列组合与二项式定理

北　京　　张国栋

一　排列组合问题

在学习排列组合问题，尤其是解应用题时，由于它的内容比较抽象、方法性强、解得结果形式不一，答数较大不易检验，要学好这部分内容应注意从基本原理出发去思考问题，总结解题规律，切忌死套公式．

（一）学会判断是排列还是组合问题，用加法还是用乘法原理

〔例1〕、①从九本不同书中选出6本借给6个学生，有几种借法？②人民币纸币七种，每次每种纸币只取一张可以组成多少种不同金额？

首先注意问题中给出的元素的集合，按要求每次所选择的结果是否与顺序有关，在①中若交换两个元素的顺序，结果属于不同借法．而②中则无影响．故前者是排列问题，后者是组合问题．答案分别为P_9^6和$C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$．

〔例2〕兰球队16名队员中，中锋3人，边锋和后卫各为7人和6人，问能组成多少种不同阵容？

与例1②比较从七种纸币中取出1种或2种……或7种均可组成一种币值，因此它们可用加法原理．而例2中选取中锋有C_3^1种可能，边峰有C_7^2种选法，后卫尚有C_6^2种选法，而每一个中锋，两个边锋和两个后卫便可组成一种阵容，故共有$C_3^1\cdot C_7^2\cdot C_6^2$种不同阵容．其结果是三种组合数的乘积．

解题中需用加法还是乘法原理是重要而又难于掌握的问题，应细心琢磨这两个基本原理的建立过程，学会这种朴素的基本思想逐步掌握正确运用它们．

（二）有附加条件的排列组合问题

所说的附加条件是指问题中明显或隐含指出的某些元素必须如何或不准如何．

〔例3〕8人站成一排，若某两人必须在两端有几种排法？若某两人不许相邻有几种排法？

此两人在两端有P_2^2种排法，它们排完后，其余6人还有P_6^6种排法，故共有$P_2^2\cdot P_6^6$种排法．另外，若某两人必须相邻的话，这两人可看成只占一个位置，这样共有P_7^7种排法，但他们两人还有P_2^2种不同排法，因此两人必相邻有$P_7^7\cdot P_2^2$种排法．依题意此两人不许相邻，应有$P_8^8-P_7^7P_2^2$种排法．这里与第一问作题方法不同，不是直接求出此两人不相邻的排列种数．它称为间接法．

〔例4〕平面上五个点A,B,C,D,E其中任三点不共线，而A,B,C,D共圆其余任四点都不共圆．问过此五个点可作成多少个不同的圆？

过A,B,C,D只能作成C_4^4即1个圆，其它的圆必过E点．因此其它的圆只能含有A,B,C,D中的两个点及E点，所以共可作$1+C_4^2\cdot C_1^1$个圆．

对于有附加条件的排列问题应抓住元素位置的“在或不在”．而组合问题要抓住元素的“含或不含”．这样它们可转化成一些无附加条件的排列组合问题，然后运用加法、乘法原理而求得结果．这一点应通过作题自觉地领会、着重训练．

（三）排列组合综合题

对于综合题往往可以化成若干个较简单的排列组合问题，也可化成若干个步骤，每个步骤可由较简单的排列组合问题去解决．

〔例5〕从1，3，5，7中取出3个数字从2，4，6，8中取出2个数字组成没有重复的五位数共可组成多少？

同学往往认为答案是$P_5^3\cdot P_4^2$．这是不对

的．事实上，从五个奇数中取出3个从四个偶数中取出2个，各有C_5^3，C_4^2种方法，而对于每次取出的五个数字均可组成P_5^5个五位数．通过这两个步骤可得$C_5^3\cdot C_4^2\cdot P_5^5$．

〔**例6**〕有运动员5男6女它们之间进行乒乓球混合双打比赛，共有几种比赛方法？

首先男女运动员搭配方案共有$C_5^1\cdot C_6^1=30$种，第二步，若第一对运动员选定后其余运动员搭配方案有$C_4^1\cdot C_5^1=20$种．第三步，每对运动员与其它运动员对垒只须出现一次，故比赛方法有$\frac{1}{2}C_{30}^1\cdot C_{20}^1=300$种．（此问题后面还要谈到）

在解决较复杂的问题时，应认真理解题意，问题要考虑全面，情况既不重复也不遗漏．

（四）善于分析，抓住问题的实质

〔**例7**〕6个人站队．①站成一排；②站成相同人数前后两排；③站成三排，人数分别为3人、1人、2人．问有几种站法？答案是①P_6^6；②$C_6^3P_3^3C_3^3P_3^3$或$P_6^3P_3^3$；③$C_6^3P_3^3\cdot C_3^1P_1^1\cdot C_2^2P_2^2$或$P_6^3P_3^1P_2^2$．注意各题得数都是6!种．这并非偶然，细分析它们实质上都是6个人站在6个位置上的全排列问题．因此对于：48人分坐6排每排8人，若某3人必须坐在第一排，另外5人必须坐在第5排有几种排法？这是一个有附加条件的全排列问题应有$P_8^3P_8^5P_{40}^{40}$种．这种解法形式较简也便于思考．

（五）注意特殊与一般的关系

对于较难理解的题目，可以把数字变小情况简化，经过分析、归纳得到解题途径再推广到一般情形甚至更复杂的情形．这是一种重要的思考问题的方法．例如前述例6若改编成男2人A，B，女3人甲，乙，丙．这样可排出具体情况：A甲，A乙，A丙，B甲，B乙，B丙（$C_2^1\cdot C_3^1=6$种）第一对选手选定后如A甲，对手仅有B乙，B丙（$C_1^1C_2^1=2$种）进行比赛只可能A甲对B乙或B丙，A乙对B甲或B丙（再写便将重复共有$\frac{1}{2}C_6^1\cdot C_2^1=6$种．）一般地，对于男$m$人，女$n$人则不难得到解答为$\frac{1}{2}C_{mn}^1\cdot C_{(m-1)(n-1)}^1$。

另外，我们发现$\frac{1}{2}C_{mn}^1\cdot C_{(m-1)(n-1)}^1$

$$=\frac{1}{2}mn(m-1)(n-1)$$

$$=2\cdot\frac{m(m-1)}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{2!}$$

$$=2C_m^2\cdot C_n^2.$$

此即男女各选2人进行比赛有$C_m^2\cdot C_n^2$种选法，但交换两男（或女）队员将组成不相同的代表队故再乘2，这种解法更易想到．改编题目化为特殊情形再推广到一般．及“一题多解”和“多题同解”可以开阔思路、提高解题能力．

二　二项式定理

这部分内容中，重点是掌握二项展开式$(a+b)^n$的构成规律，由它可以得到二项展开式的性质．课本指出杨辉三角（如图）当n较小时便于由之计算二项展开式的系数．事实上它反映了二项展开式的绝大部分性质而且包含了组合数的二个性质，认真研究它的构成规律可以避免死记一些公式，便于掌握和应用．

$(a+b)^1$	1 1	$C_1^0C_1^1$
$(a+b)^2$	1 2 1	$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$
	……	……
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$C_5^0C_5^1C_5^2C_5^3C_5^4C_5^5$
	……	……
$(a+b)^n$	$C_n^0C_n^1\cdots C_n^r\cdots C_n^n$	$C_n^0C_n^1\cdots C_n^r\cdots C_n^n$

由杨辉三角不难看出$(a+b)^n$展开式的性质：①共有$n+1$项；②第$r+1$项系数C_n^r；③首末两端等距离两项系数相等；④中间一（或二）项系数最大；⑤各项系数和为2^n等等．展开式的一般项$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$且有$C_n^r=C_n^{n-r}$（即③）及$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$（即杨辉三角中除两端外每个数等于其肩上两数之和）。这样便可以直接用它作题．

〔**例1**〕　求出使$(1+x)^{99}$的展开式中含有两个相等相邻项的条件．（其中$x\neq0$）

$(1+x)^{99}$的展开式通项$T_{r+1}=C_n^rx^r$，欲使$T_r=T_{r+1}$即$C_{99}^{r-1}x^{r-1}=C_{99}^rx^r$，

$$\frac{99!}{(99-r+1)!\ (r-1)!}=\frac{99!\,x}{(99-r)!\ r!},$$

解得$r=\dfrac{100}{1+\dfrac{1}{x}}$.即当$1+\dfrac{1}{x}$能整除100时即可.

〔例2〕证明$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$.（$n$为自然数）

首先不难证明$\frac{k}{n}C_n^k=C_{n-1}^{k-1}$，这是因为

$$\frac{k}{n}C_n^k=\frac{k}{n}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$=\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}=C_{n-1}^{k-1}.$$

故有：

原式左

$$=n\left(1+\frac{2}{n}C_n^2+\frac{3}{n}C_n^3+\cdots\cdots+C_n^n\right)$$

$$=n(1+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots\cdots+C_{n-1}^{n-1})$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}.$$

〔例3〕n为自然数，证明：①n为奇数时，2^n+1是3的倍数；②n为偶数时，2^n+1被3除余2.

证明①令$n=2k+1$,

则 $2^n+1=2^{2k+1}+1=2\times 2^{2k}+1$

$=2(3+1)^k+1=2\ (3^k+C_k^1 3^{k-1}+\cdots+1)+1$

$=2[3(3^{k-1}+C_k^1 3^{k-2}+\cdots+1)+1]+1$

$=6(3^{k-1}+C_k^1 3^{k-1}+\cdots+1)+3$

故可被3整除.

②令$n=2k$

则 $2^n+1=2^{2k}+1=(3+1)^k+1$

$=(3^k+C_k^1 3^{k-1}+\cdots+1)+1$

$=3(3^{k-1}+C_k^1 3^{k-2}+\cdots+1)+2$

即被3除余2.

一般地这部分的题目入手方法较死，下手以后往往转而用其它知识解题（如例1）而例2，例3则需要一些技巧，尤其例3应想到能应用二项式定理解题.

怎样分析排列组合问题

天津　刘玉翘

在学习“排列组合”问题时，令人感到困难的是对实际问题的分析，主要是对用加法、还是用乘法，是排列问题、还是组合问题分辨不清．因此，如何分析排列组合问题，掌握其解题规律，是学好这一内容的关键．下面谈点个人看法：

一、基本原理是依据

加法原理和乘法原理是推导排列数、组合数公式，以及解有关排列组合的各种问题的主要依据．必须真正理解这两个基本原理的实质才能较顺利地分析排列组合问题．

我们可以借助于生活中常见的现象来阐明道理，搞清这两个基本原理的实质．

如甲、乙、丙三村，乙村在甲、丙两村之间，若从甲村到丙村必须绕道乙村南北，设从其南方绕道而去有两种走法，从其北方绕道而去有三种走法（如图１），则从甲村到丙村共有五种走法．又若从甲村到丙村必须穿过乙村，设甲村到乙村有三种走法，乙村到丙村有二种走法（如图２），则从甲村到丙村共有六种走法．这是因为甲村到乙村三种走法中的每一种都可分别通过乙村到丙村的二种走法的缘故．

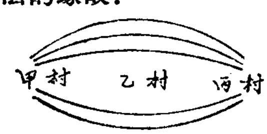


图１

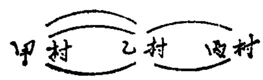


图２

容易看出，第一种情况甲村到丙村的走法总数为南路及北路走法数之和，而第二种情况则为各段走法数之积．由此，可以总结为：(1)做一件事，无须分段而可以直接完成的，则完成此事物的总方法数为所有直接完成的方法数之和；(2)做一件事，需要依次分段完成的，则完成此事物的总方法数为完成各段的方法数之积．这两点的一般情况就是书中的加法原理和乘法原理．这两个原理都是计算完成一件事的不同方法的种数．在加法原理中，要特别注意“可以”两字，在乘法原理中，要特别注意“需要”两字，前者是“或者这样，或者那样”，后者是“必须完成这一步，也必须完成那一步”．

〔例1〕有1克、2克、5克、10克、20克、50克的砝码各一个，问可做出多少种不同的重量？

〔分析〕从这六个砝码中每次取一个可得C_6^1种不同重量，每次取二个可得C_6^2种不同重量，…每次取六个可得C_6^6种不同重量．即做出所有的不同的重量这件事可以有6类办法，完成这件事，共有这六类的和$N=C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^6=63$种不同的方法．这是用加法原理解的．

此题还可以从另一个角度进行分析：我们可以把6个砝码中每次取1个，2个，…6个的做法视为分6个步骤（或分六段依次完成），即对1克砝码可以取也可以不取，有两种方法；对2克砝码仍然可以取也可以不取，又有两种方法；对其他砝码也同样．由乘法原理可得2^6种方法，但当6个砝码都不取时不符合题意，于是只能做出$2^6-1=63$种不同的重量．

〔例2〕6人排成一排，其中某人不在排头，也不在排尾，共有多少种排法？

〔分析〕(1)先从除某人外其余5人中选出一人站在排头，有P_5^1种方法；

(2)再从其余四人中选出一人站在排尾，有P_4^1种方法；

(3)现在剩下四人（包括某人），把他们排在中间，有P_4^4种方法；

(4)由乘法原理得$P_5^1\cdot P_4^1\cdot P_4^4=480$种排法．

二、排列组合要分清

如何区分是排列问题、还是组合问题，关键是看各元素间有没有顺序关系．有顺序关系的是排列问题，没有顺序关系的是组合问题．例如

(1) 五位同学假期互相通信一次，打电话一次，问共写信多少封？通电话多少次？

(2) 在40人的一班里，选出正、付班长、学习委员、生活委员、文体委员各一人，有多少种不同的选法？如果在这个班里选出五个代表又有多少种不同的选法？

上面这两个问题中的前一问皆为排列问题，后一问皆为组合问题．从分析这些问题中我们可以得到：在一个问题所给的一群元素里按照问题的要求确定一个选择的结果，然后交换这个选择结果中任意两个元素的位置，如果没有因此而使结果发生新的变化，说明选择结果与顺序无关，因而是一个组合问题；如果交换使结果发生了新的变化，说明选择结果与顺序有关，是排列问题．

〔例3〕有黑棋子m个，白棋子n个（$m>n$），把它们摆成一排，限定每两个白棋子不得相邻，问有多少种排列方法？

〔分析〕这个问题从表面上看好象是排列问题，但实际上是组合问题．我们先把黑棋子摆成一排，这样在每两个黑棋子间，连同第一个黑棋子的前边和第m个黑棋子的后边，共有$m+1$个位置，我们从这$m+1$个空档里任意选择n个，每个空档放进一个白棋子，这样每两个白棋子就不会相邻了．所以，这个问题是从$m+1$个位置任意选出n个来摆白棋子的问题，没有顺序关系．故C_{m+1}^n就是所求的排列方法数．

三、不重不漏合条件

在解题过程中，应重视已知条件，使所求的排列数或组合数一定要合乎题设条件．

〔例4〕用0，2，4，6，8五个数字组成没有重复的四位数，有多少个？

〔分析〕

因为首位不能是0，故首位有P_4^1种，从剩下的四个数字中再定后三位，有P_4^3种．由乘法原理得$P_4^1\cdot P_4^3\cdot=4\cdot4\cdot3\cdot2=96$个．

此题也可以列为$P_5^4-P_4^3=96$个．

所求得的排列种数或组合种数必须是没有重复（即对于每一种符合条件的情况只能

计算一次)和没有遗漏(即不许丢掉某一种合条件的情况).

〔**例5**〕平面上有七个点,其中有并且只有三个点是在一直线上,问可以连成多少条直线?

〔**分析**〕这样考虑:在一直线上的三个点(如A、B、C)可以连成一条直线,这三点和另外四点(如D、E、F、G)之间可以连成$C_3^1\cdot C_4^1=12$条,所以共连成$12+1=13$条.另外四点(D、E、F、G)之间还可连成$C_4^2=6$条直线.

解答是$C_4^1\cdot C_3^1+C_4^2+1=12+6+1=19$条或$C_7^2-C_3^2+1=21-3+1=19$条(如图3)

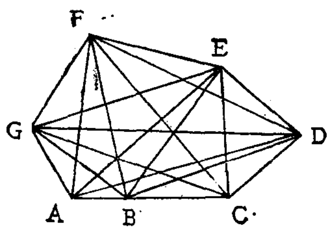


图 3

四　正反两面想问题

一个排列组合问题往往可以有多种解法,只要思路正确,都能得出同一结果.这一般可从正反两面考虑问题.多种解法既可印证答案是否正确,又可培养思维能力.

〔**例6**〕某兰球队从十二个运动员中选出五人上场,其中有A,B二人不能同时上场,有多少种选法?

〔**分析**〕从正面考虑:限制A,B不能同时上场,则有三种情况:A上B不上;A不上B上;A,B都不上.若A上,B不上,则从除A,B以外的十人中选出四人,然后把A加进去,则得含A而不含B的五人组合C_{10}^4个;若A不上B上,也有C_{10}^4种选法;若A,B都不上,就从除A,B而外的十人中选出五人,得C_{10}^5种选法.由加法原理得$2C_{10}^4+C_{10}^5=672$种选法.

从反面考虑:从十二个人中任选五人,有C_{12}^5种选法.这些组合中包括四种情况:A,B都上;A上、B不上;A不上,B上;A,B都不上.根据题意,限制A,B不同时上,所以应从总数C_{12}^5中减去A、B都上的组合数C_{10}^3,得　$C_{12}^5-C_{10}^3=792-120=672$种选法.

五、先作组合后排列

凡属于排列组合的混合问题,做题顺序一般是先解决组合问题,后解决排列问题.

〔**例7**〕为某班排功课表,从代数、几何中选一门,从物理、化学、生物中选一门,从语文、外语、政治中选二门,排成四节课的课表,问可以排成多少种?

〔**分析**〕这个问题分四步来解:(1)先从代数、几何中选出一门得C_2^1种方法;(2)再从物理、化学、生物中选出一门得C_3^1种方法;(3)再从语文、外语、政治中选出二门得C_3^2种方法,这样就组成了包括四门课的组合$C_2^1\cdot C_3^1\cdot C_3^2$种;(4)每组四门课再作全排列,得

$$C_2^1\cdot C_3^1\cdot C_3^2\cdot P_4^4=3\cdot2\cdot3\cdot24=432$$

种排列方法.

六、元素不离当一体

在排列问题中有时限定把某几个元素排在一起,这时就把它们看成一个整体,先作这个整体与其他元素之间的排列,再作这个整体内部元素之间的排列.

〔**例8**〕男运动员6人,女运动员4人,站成一横排参加入场式,男、女运动员各站在一起,问有多少种不同的站法?

〔**分析**〕根据题意,男女运动员各排在一起,所以我们先把他们看成两个整体,它们之间的排列有P_2^2种.然后在男运动员的集体中再作排列有P_6^6种,在女运动员的集体中作排列有P_4^4种,由乘法原理$P_2^2\cdot P_6^6\cdot P_4^4=34560$种不同的排列方法.

七、包含某元素,总选各减1
不含某元素,总数减去1

无论排列或组合问题,有时指定必须包含某元素,这时从总数m和所选的个数n里都减去1,求从$m-1$个元素每次选$n-1$个的排列(或组合);如果指定不包含某元素,只在总数里减去1,求从$m-1$个元素每次选n个元素的排列(或组合).

〔**例9**〕从十人中选出一些人组成一组,现知含某人的组数等于不含此人的组数,问选出多少人组成一组?　(下转16页)

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com