概率与数理统計

（上 册）

数 学 教 研 室

北 京 化 工 学 院

目　　录

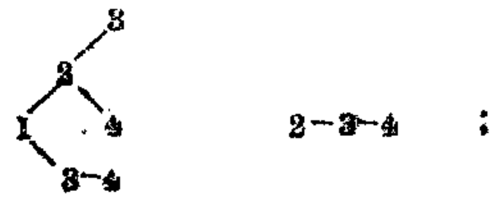
此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　予备知识

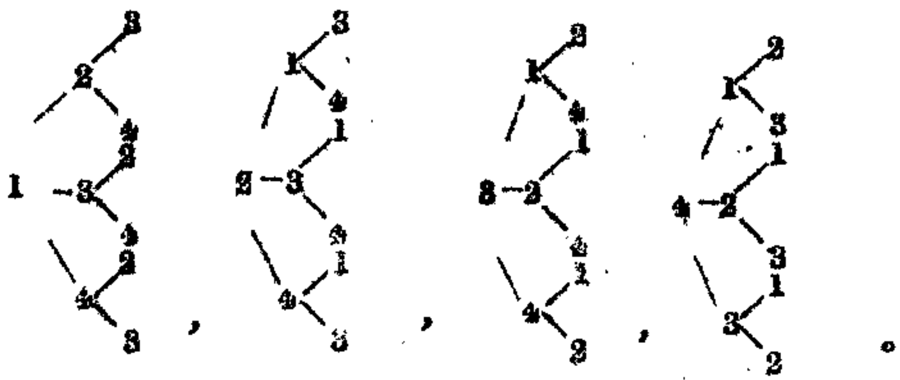
§1　排列和组合

从1、2、3、4四个数中任意取出三个不同的数。问：①可以得到多少个不同的和？②可以得到多少个不同的号码？

①　不同的和有四个：



②　不同的号码有二十四个：



它们都是从四个不同数字中任选三个不同数字，但是在①中三个数字的选取与先后顺序是无关的（$1+2+3=2+3+1=\cdots=6$），而在②中却要考虑数字选取的先后顺序（123与231是不同的号码）。前者称为组合问题，后者称为排列问题。它们之间的主要区别，就在于要不要考虑所选数字的先后顺序。它们之间有内在联系，就是：把①所写出的每一组合的三个数字再作一次排列，就可以得到②中所写出的这些排列。

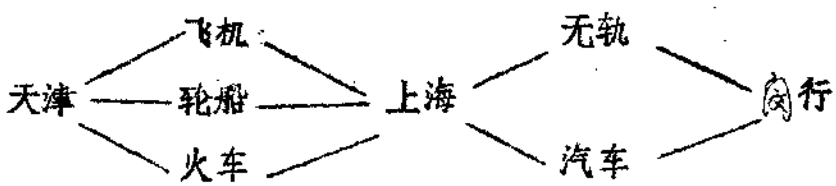
一、全排列

定义：把n个不同的元素按照一定的顺序排成一列，叫做n个不同元素的全排列。

因为排列中的第一个位置可以从n个元素中任取1个来排，共有n种取法；第二个位置只能在剩下的n－1个元素中任取一个来排，共有n－1种取法；第三个位置只能在剩下的n－2个元素中任取一个来排，共有n－2种取法；……；这样继续下去直到最后一个位置，也就是第n个位置，还剩下1个元素，只有一种取法，所以n个不同元素的所有不同的全排列的总个数

$$\underline{P_n=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!}$$

例如从天津经上海到闵行有 3 × 2 ＝ 6 种走法：



例1、有红、黄、绿三面色旗，按上、中、下三个位置挂在旗杆上表示信号。问一共可以得到几种不同的信号？

＜解＞ 把每一面色旗作为一个元素，这样问题归结为三个不同元素的全排列，于是所有不同信号的种数是

$$P_3=3\times 2\times 1=6$$

即一共可以得到6种不同的信号。

例2 用数字0，1，2，3，4可以组成多少个不同的没有重复数字的五位数？

〈解〉 首位不能取0，有4种取法。首位选定后剩下四个不同数字可以排在四个不同的位置，有P_4种排法，因此所求五位数的总个数是

$$P_5 - P_4 = 54321 - 4321 = 4\times(4321) = 96$$

$$4\times P_4 = 4\times 4! = 96 \text{（个）}$$

例3 将八本不同的书排成一列，其中指定两本书挨在一起的排法有几种？

〈解〉 将指定的两本书看作一合订本与其他六本混在一起进行全排列共有$P_7=7!$种排法，再将指定的两本左右换一个位置有2种排法，所以指定的两本书挨在一起的排法总共有

$$P_7\times 2 = 7!\times 2 = 5040 \text{（种）}。$$

二、选排列

定义：从n个不同的元素中每次取出m（$m\leq n$）个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中每次取m个不同元素的选排列。其总个数记作A_n^m。

在选排列中，由于第一个位置可以从n个元素中任取一个来排，有n种取法；第二个位置在剩下的$n-1$个元素中任取一个来排，有$n-1$种取法；……，这样继续下去到第m个位置时，就只能在剩下的$n-m+1$个元素中任取一个来排，有$n-m+1$种取法。到此已经选够了m个元素，不再往下选，于是所有不同的选排列的总个数

$$A_n^m = \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)}^{m次}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}$$

例4　用五面不同颜色的旗，按不同的次序挂在旗杆上表示信号，如果可以单用一面，或二面、三面共用，那么一共可以得到多少种不同的信号？

＜解＞　用一面旗做信号有A_5^1种，用二面旗做信号有A_5^2种，用三面旗做信号有A_5^3种，于是所求信号的总数是

$$A_5^1+A_5^2+A_5^3=5+5\times4+5\times4\times3=85 \text{（种）}$$

例5、从数字0，1，2，3，4，5中每次取出三个不同的数字来排列，问：

① 可以得到多少个不同的号码？

② 可以得到多少个不同的三位数？

③ 百位数是4的三位数有多少个？

④ 能被5整除的三位数有多少个？

＜解＞　① 不同的号码有$A_6^3=6\times5\times4=120$（个）；

② 第一数字不能选0，有5种选法，后二个数字可在剩下的5个数字中任选2个来排，有A_5^2种选法，所以不同数字的三位数共有

$$5\times A_5^2=100 \text{（个）}。$$

③ 百位数是4只有一种选法，后二个数字有A_5^2种选法，所以百位数是4的不同数字的三位数共有

$$1\times A_5^2=20 \text{（个）}。$$

④ 能被5整除的三位数，就是个位数是0或是5的三位数。

个位数是0的三位数有$A_5^2=20$个。

个位数是5的三位数有$4\times4=16$个

所以能被5整除的不同数字的三位数共有36个。

例6　用1，2，3，4，5，6六个数字，不许重复组成五位数，其中有多少个大于23400的数？

<解>　万位数字大于2的五位数有$4\times A_5^4$个；万位数字为2，千位数字大于3的五位数有$3\times A_4^3$个；万位数字为2，千位数字为3，百位数字是4、5或6的五位数有$3\times A_3^2$个；所以大于23400的不同数字的五位数共有

$$4\times A_5^4+3\times A_4^3+3\times A_3^2=570\ (个)$$

三、可以重复的排列

定义：从n个不同的元素中每次取出m个元素，按照一定的顺序排成一列，但每个元素可以重复出现，叫做从n个不同元素中每次取m个元素可以重复的排列。

由于排列中每一个位置都可以从n个元素中任取一个来排，有n种取法，因此所有不同的可以重复的排列的总个数是$\boxed{n^m}$。

例7　以46为首的六位电话号码最多可以有几个？

<解>　前二位已定，后四位有10^4种排法，因此以46为首的六位电话号码最多可以有10^4个。

例8，不同的信6封，随意投入3个不同的信箱，有几种投法？

<解>　每一封信有3种投法，6封信配合起来有3^6种投法。

例9　将七个品种不同的水果随意分给甲乙两人，每人至少得一个，有几种给法？

<解>　每一水果有二种给法，七个水果有2^7种给法。两人中有一个没有分到水果的给法有二种方法，因此每人至少得一个水果的给法有

$$2^7-2=126(种)$$

四、组合

定义：从n个不同元素中每次取出m（$m\leq n$）个不同的元素，不讲顺序拼成一组，叫做从n个不同元素中每次取m个不同元素的组合。其总个数记为C_n^m或$\binom{n}{m}$。

我们知道排列与组合的区别在于排列有顺序的要求，而组合没有顺序的要求，因此如果先从n个不同元素中每次取出m个不同的元素，不讲顺序拼成一组，然后再把组合里的m个不同的元素作全排列，这样就得到从n个不同元素中每次取m个不同元素的选排列，所以

$$A_n^m=C_n^m\cdot P_m$$

这样

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

例10　八个人参加劳动，问：

① 分配二人运土有多少种方案？

② 分配六人挖土有多少种方案？

<解>　分配二人运土的方案有

$$C_8^2=\frac{8\times7}{1\times2}=28\text{（种）；}$$

分配六人挖土的方案有

$$C_8^6=\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=\frac{8\times7}{1\times2}=28\text{（种）}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

分配二人运土，余下六人就去挖土，分配六人挖土，余下二人就去运土。这两种分配方案的个数是相等的，即

$$C_8^2=C_8^6$$

容易证明：对于任何整数 n，m（$0\leq m\leq n$），都有

$$C_n^m=C_n^{n-m}$$

例11 从15人中选出正付组长各一人，问共有几种选法？

＜解＞ 先选两人，再指定正付：

$$C_{15}^2\times C_2^1=210\ （种）；$$

先选一正的，再选一付的：

$$C_{15}^1\times C_{14}^1=210\ （种）。$$

例12 平面上有十个点，其中四个点在一条直线上，此外再没有三个点在一条直线上，联结这些点，问：

① 能够得到多少条直线？

② 以这些点为顶点的三角形有多少个？

＜解＞ ① 直线数：

$$C_{10}^2-C_4^2+1=40\ （条），$$

② 三角形数：

$$C_{10}^3-C_4^3=116\ （个）。$$

§2 集合

一、集合的概念

具有某种共同性质的一些对象所组成的全体称为集合。组成集合的的那些对象称为这个集合的元素。

8001班全体学生是一个集合，班上的学生是这个集合的元素。

一克水中所含有的氧原子组成一个集合。

一个已知方程的所有根组成一个集合。

正切为$\sqrt{3}$的所有的角组成一个集合。

习惯上用大写字母A、B、C…表示集合，用小写字母a、b、c，…表示集合的元素。

如果a是集合A的元素，就记作

$a \in A$，　读作"a属于A"。

如果a不是集合A的元素，就记作

$a \bar{\in} A$　读作"a不属于A"。

如果集合S只包含1，2，3，4这四个元素，就可记作

$S=\{1,2,3,4\}$。

如果集合S是具有性质T的元素组成的，就可记作

$S=\{X \mid X\text{具有性质}T\}$。

例如所有实系数二次多项式组成的集合P可记作

$P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\text{为实数},\ a\neq 0\}$。

例如所有满足不等式$-1<x\leq 2$的一切实数组成的集合A，可记作

$$A=\{x \mid -1<x\leq 2\}=(-1,2]$$

只含一个元素的集合叫做单元集。

不含任何元素的集合叫做空集，记作ϕ。

例如方程$x^2+1=0$的实数解的集合是一个空集。

二、子集

如果集合A的每一个元素都属于B，便称A为B的子集，记作

$A \subset B$　　读作“A包含于B”，

或　$B \supset A$　　读作“B包含A”。

任何一个集合的本身是它自己的子集。

空集是任何一个集合的子集。

设有集合A与B，如果$A \subset B$且$B \subset A$，便称A与B相等，记作$A = B$。

很明显，含有相同元素的两个集合相等。

例如$A = \{2, 3\}$，B为方程$x^2-5x+6=0$的根所组成的集合，则$A = B$。

我们知道实数对于不等号具有这样的性质：若$a < b$，$b < c$，则$a < c$，其中，a，b，c是三个实数。集合对于包含关系具有类似的性质：若$A \subset B$，$B \subset C$，则$A \subset C$。其中A，B，C为三个集合。事实上，设任意一个$\omega \in A$，因为$A \subset B$，所以$\omega \in B$，又因为$B \subset C$，所以$\omega \in C$，这样$A \subset C$。

例如某系某班全体学生所组成的集合包含于该系全体学生所组成的集合，后者又包含于全校学生所组成的集合，因此某班全体学生的集合包含于全校学生的集合。

在考虑某集合S的一切子集时，要注意把S本身及空集ϕ都算在内。例如集合$S = \{0, 1, 2\}$的一切子集是：

ϕ，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0, 1\}$，$\{0, 2\}$，$\{1, 2\}$，

$\{0, 1, 2\}$。

这里要注意0是一个数，所以$\{0\}$是单元素集，而不是空集Φ，不能把$\{0\}$和Φ混为一谈。

三、集合的运算

1.集合的并

定义：把集合A的元素与集合B的元素全部集中起来所组成的集合，叫做A与B的并集，记作$A \cup B$，即

$$A \cup B=\{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

例如$\{1, 3, 2\} \cup \{6, 3, 4, 2\}=\{1, 2, 3, 4, 6\}$，

$\{a, b, c, d\} \cup \{c, e, f, g\}=\{a, b, c, d, e, f, g\}$。

$(-1, 3] \cup [3, 4]=(-1, 4]$。

并的概念可以推广到n个集合上去。

很明显$(A \cup B) \supseteq A$，$(A \cup B) \supseteq B$。

2.集合的交

定义：把既属于A又属于B的元素全部集中起来所组成的集合，叫做A与B的交集，记作$A \cap B$或$A B$，即

$$A \cap B=\{\omega \mid \omega \in A \text{ 同时 } \omega \in B\}$$

如果$A \cap B=\Phi$，就说A与B不相交。

例如$\{1, 3, 2\} \cap \{2, 4, 6, 1\}=\{1, 2\}$。

$\{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 8\}=\Phi$

$(-1, 2) \cap (0, 1]=(0, 1]$。

交的概念也可以推广到n个集合上去。

很明显$(A \cap B) \subseteq A$，$(A \cap B) \subseteq B$。

3.集合的差

定义：由属于A但不属于B的所有元素所组成的集合叫做A与B的差集，记作A－B，即

$$A-B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 但 } \omega\bar{\in} B\}$$

注意在差集的定义中并不要求$B\subset A$。

例如$\{1,2,4,5\}-\{3,4,5,7,9\}=\{1,2\}$。

$[0,2]-[1,3]=[0,1)$。

⑷并与交的一些基本性质

集合的并与交具有许多初等代数里加法与乘法相似的性质：

① 可交换性： $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

② 可结合性： $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $=A\cup B\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ $=A\cap B\cap C$

③ 可分配性： $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

性质①、②成立是明显的，现就③证明如下：

<证> 设$\omega\in A\cap(B\cup C)$，则$\omega\in A$且$\omega\in(B\cup C)$，因此$\omega\in A$且$\omega\in B$，或$\omega\in A$且$\omega\in C$，即$\omega\in(A\cap B)$，或$\omega\in(A\cap C)$，即$\omega\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，所以

$$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

另一方面，设$\omega\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则$\omega\in(A\cap B)$，或$\omega\in(A\cap C)$，即$\omega\in A$且$\omega\in B$，或$\omega\in A$且$\omega\in C$，因此$\omega\in A$且$\omega\in(B\cup C)$，即$\omega\in A\cap(B\cup C)$。所以

$$A\cap(B\cup C)\supset(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

故

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

余集

定义：设 $B \subset S$，称 $S-B$ 为 B 在 S 内的余集，记作 $\overline{B}$。

例如 S 为整个数轴，区间 $(-\infty, a)$ 在 S 内的余集为 $[a, +\infty)$。

余集的性质：

① $\overline{\overline{A}}=A$；

② 如果 $A \subset B$，那末 $\overline{A} \supset \overline{B}$，

③ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$， $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

性质①，②是明显的。下面证明③的第一个等式。

<证> 设 $\omega\in\overline{A\cup B}$，则 $\omega\bar{\in}A\cup B$，所以 $\omega\bar{\in}A$ 且 $\omega\bar{\in}B$，因此 $\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$，故 $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$，从而

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$$

反之，设 $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$，则 $\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$，所以 $\omega\bar{\in}A$ 且 $\omega\bar{\in}B$，因此 $\omega\bar{\in}A\cup B$，故 $\omega\in\overline{A\cup B}$，从而

$$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cap\overline{B}$$

这样

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$。

习 题 一

1. 有五道工序分配给五个工人做，其中一个工人不会做其中的两道工序，问有几种分配法？

2. 八个人排成一排，其中某两个人不挨在一起的排法有多少种？

3. 将五个不同的半导体收音机和四个不同的电视机排成一列，使两个电视机不挨在一起，问有多少种排法？

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com