数学系函授本科用

平面几何習題解答

几何基礎教研室
平面几何教学小組　編

东北师范大学函授教育处

1956.12. 出版

第一章　推証通法

1. 在$\triangle ABC$的AB，AC二边上向形外各作正方形$ABEF$，$ACGH$，又作$AD\perp BC$。DA的延長綫交FH于M求証$FM=MH$。

証明：

1）过H及F向DA作垂綫交DA于P，Q

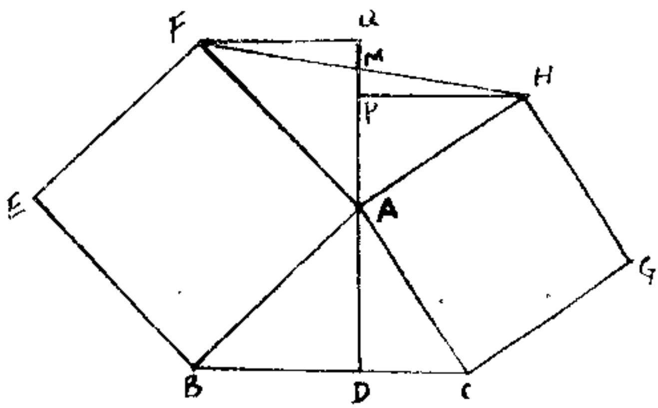

圖　1

2）$\angle FAQ=\angle ABD$（$\because$ 均与$\angle BAD$互补）

3）$AF=AB$

4）$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AQF=\mathrm{Rt}\triangle BDA$

5）$\therefore$　$FQ=DA$……………………………（1）

6）同理可証 $\mathrm{Rt}\triangle APH\cong\mathrm{Rt}\triangle CDA$

7）$\therefore$　$HP=DA$……………………………（2）

8）由（1）式与（2）式，顯然$HP=FQ$

9）$\therefore\triangle MFQ\cong\triangle MHP$

10）$\therefore FM=MH$

2. 从三角形外接圆上的任意点作三边的垂綫，则三垂足共綫（这条直綫叫 Simson 綫）。

分析:

設 D, E, F 分别为过$\overset{\frown}{BC}$上任意点 P 向 AB, BC, AC, 所作垂綫的垂足

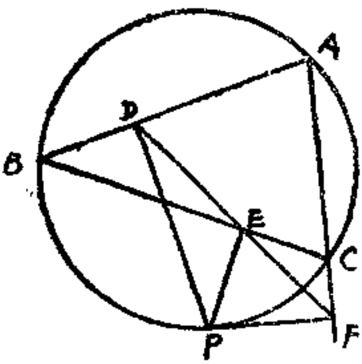

圖 2

1）連接 DE 与 EF，若能証得$\angle DEB=\angle CEF$ 时，則 DEF 在一直綫上。

2）为了証明 $\angle DEB=\angle CEF$ 只要証 $\angle CPF=\angle DPB$（$\because DBPE$ 共圓，$CEPF$ 亦共圓）

3）为了証明 $\angle CPF=\angle DPB$ 只要証 $\angle DBP=\angle FCP$，顯然該兩角是相等的，这样就找到了証明的途徑。

証明:

1）$\angle DBP=\angle FCP$（$\because$ 圓內接四边形的外角等于它的內对角）。

2）$\therefore \angle DPB=\angle CPF$（$\because$分别与$\angle DBP$及$\angle FCP$互补）

3）$\angle DPB=\angle DEB$（$DBPE$ 四点共圓）。

4）$\angle CPF=\angle CEF$（$CEPF$ 四点共圓）。

5）$\therefore \angle DEB=\angle CEF$ 而 BEC 在一直綫上。

6）$\therefore$ D, E, F 三点共綫。

3. 假設圓 O 与圓 O' 相切于 P，同向且平行綫段 AB, CD 各是这兩圓的直徑，求証当兩圓外切时 AD, BC 相交于P 点。

証明:

只要証明 AD 通过 P 則同理即可証得 BC 亦通过 P，則AD,

BC相交于 P 点即得証明:

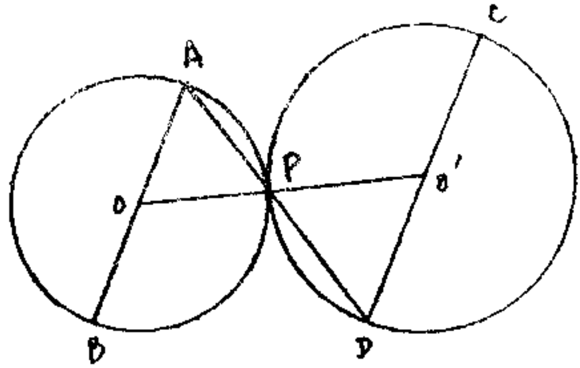

圖 3

1) 連接 AP, PD 及 OO'

2) $\angle APO$ 为等腰 $\triangle AOP$ 的底角，$\angle O'PD$ 为等腰 $\triangle DO'P$ 的底角。

3) $\angle AOP = \angle DO'P$ ($\because AB \parallel CD$)。

4) $\therefore \angle APO = \angle O'PD$ (頂角相等的等腰三角形的底角亦对应相等) 而 OPO' 在一直綫上。

5) $\therefore APD$ 在一直綫上，則 AD 通过 P。

4. 三角形三边的中点，三个高的足，三个高的交点和各頂点所連結綫段的中点，在一个圓上（九点圓），这个圓的圓心是高綫的交点和外接圓圓心所連結綫段的中点；它的半徑等于外接圓半徑的一半。

証明:

D, E, F 分別为 BC, AC, AB 上之垂足。

M_1, M_2, M_3 分別为 BC, AC, AB 上之中点。

N_1, N_2, N_3 分別为 AG, BG, CG 上之中点。

1) 連接 N_1N_2, M_1M_2, N_2M_1, 及 N_1M_2, 很顯然 $M_1M_2N_1N_2$为一个矩形 ($\because N_1N_2$ 及M_1M_2均平行于 AB, N_1M_2 及 N_2M_1 均平行于 CF, 且 $CF \perp AB$)。

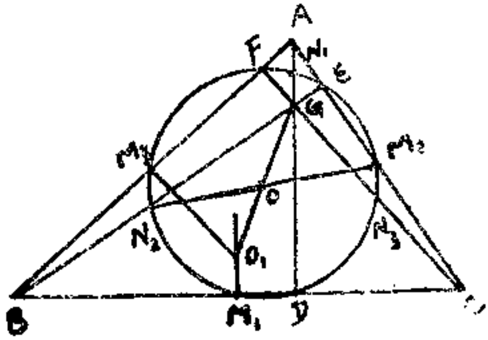

图 4

2）$\because M_1M_2N_1N_2$ 四点共圆，圆心为对角綫之交点 O，即 M_2N_2 之中点。

3）同理 $M_2M_3N_2N_3$ 四点共圆，圆心为对角綫之交点 O'，即 M_2N_2 之中点，$\therefore O$ 与 O' 重合。

由此可見 $M_1M_2M_3N_1N_2N_3$ 点共圓，記为C，圓心为 O。下面只要証 D，E，F 亦在此圓上。

4）$\triangle N_2EM_2$ 为直角三角形，$\therefore E$ 点在以 M_2N_2 为直徑的圓上，即在圓 C 上。

同理 D，F 亦在此圓上，

$\therefore$ M_1，M_2，M_3，N_1，N_2，N_3，D，E，F九点共圓

其次我們証明这个圓的圓心是高綫的交点和外接圓圓心所連結綫段的中点。

設外接圓圓心为 O_1，連結 O_1G，很顯然可以知道圓心 O为 M_1D，M_2E，M_3F 之中垂綫的交点，但另一方面又可知它們的中垂綫必通过 O_1G 的中点，由此可見 O 即为 O_1G 的中点，問題得到証明。

最后我們需要証明該圓的半徑等于外接圓半徑的一半。

因为 O 为 M_1N_1 及 O_1G 的中点，所以 $O_1M_1GN_1$ 为一平行四边形，$O_1M_1=N_1G=AN_1$ $\therefore$ $AO_1M_1N_1$ 为一平行四边形（因为 $O_1M_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AN_1$）$\therefore M_1N_1=AO_1$ 而 M_1N_1 为九点圓的直徑，AO_1 为外接圓的半徑，由此得到証明九点圓的半徑等于外接圓半徑的一半。

5. 試用同一法証明：已知一梯形，求証过兩底中点的直綫，通过兩对角綫的交点和兩腰延長綫的交点。

首先必須考察題設，題断是否指同一对象，且是唯一存在的。

很顯然在梯形 $ABCD$ 中，題設是唯一的对象 EF 直綫，而在題断中也是唯一的对象 PQ 直綫，命題則要求証明 EF 直綫就是 PQ 直綫，因此滿足同一法則。

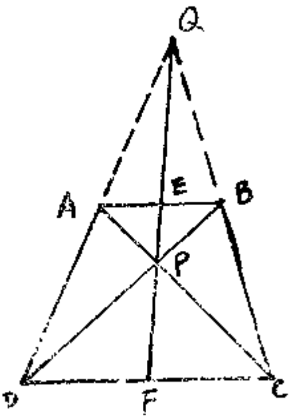

圖 5

用同一法進行証明，也就是用其逆命題來代替原命題的証明：其逆命題即为：

在已知梯形 $ABCD$ 中，求証过兩对角綫交点和兩腰延長綫的交点的直綫，通过兩底中点的，証明如下：

証明：

1）由 $\triangle EBP \backsim \triangle FDP$ 得 $EB : FD = EP : FP$，

2）由 $\triangle EAP \backsim \triangle FCP$ 得 $EA : FC = EP : FP$，

則得 $EB \cdot FC = EA \cdot FD$ ……………………（1）

3）由 $\triangle AEQ \backsim \triangle DFQ$ 得 $EA : FD = EQ : FQ$。

4）由 $\triangle BEQ \backsim \triangle CFQ$ 得 $EB : FC = EQ : FQ$

則 $EB \cdot FD = EA \cdot FC$ ……………………………（2）

5）由（1）与（2）很容易得出

$EA = EB$

$FD = FC$

$\therefore$ E，F 分別为 AB，CD 之中点。

因为本題是滿足同一法則的，$\therefore$ 其逆命題即过 AB，CD 中点 E，F 的連綫是通过兩对角綫交点 P，和兩腰延長綫的交点 Q。

第二章　平面几何作圖的一般知識

1. 試以已知三角形的三个頂点为圓心作三个圓，使它們兩兩相切。

分析：假設所求的圓为 $A(R_1)$，$B(R_2)$，$C(R_3)$ 因为圓心 A，B，C 已經确定，所以只要求它們的半徑即可。

但是这些圓可以外切，也可以內切，

$\therefore$ 关系式 $|R_1 \pm R_2| = AB$

$|R_2 \pm R_3| = BC$

$|R_3 \pm R_1| = AC$

1°. 互相外切时，則关系式

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = AB \\ R_2 + R_3 = BC \\ R_3 + R_1 = AC \end{cases} \quad \text{成立}$$

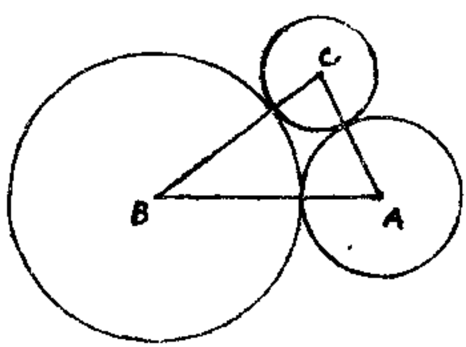

圖 6

計算得

$$R_1 = \frac{AB + AC - BC}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$R_2=\frac{AB+BC-AC}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$R_3=\frac{AC+BC-AB}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

2°．内切。

如果 $A(R_1)$內包了 $B(R_2)$，則一定也內包了 $C(R_3)$，且 $B(R_2)$与 $C(R_3)$一定外切

即 $R_1-R_2=AB$

$R_2+R_3=BC$

$R_1-R_3=AC$

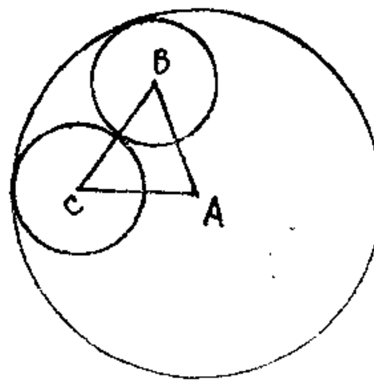

圖 7

得：$R_1=\frac{AB+BC+AC}{2}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$R_2=\frac{AC+BC-AB}{2}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$R_3=\frac{BC+AB-AC}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

当然也可以使 $B(R_2)$包含了 $A(R_1)$，$C(R_3)$或使 $C(R_3)$包含了 $A(R_1)$，$B(R_2)$。

除此沒有其他的情況。

由此得到作圖方法。

作圖：作圓$A(R_1)$，$B(R_2)$，$C(R_3)$ 即为所求之圓。

証明：从略

討論：

A．互相外切的情形。

由以上（1），（2），（3）公式知 R_1，R_2，R_3 均是唯一存在，所以有一解。

B．内含的情形。

当 $A(R_1)$ 內包了 $B(R_2)$ 与 $C(R_3)$ 时

由公式（4），（5），（6）知道 R_1，R_2，R_3 亦为唯一存在，因此分別以$A(R_1)$，$B(R_2)$，$C(R_3)$ 为最大圓时，共有三解。

所以本題在任何情形下（在正常的三角形中）有四解。

2. 已知一三角形的一边，此边上的高及其他兩边的比，求作此三角形

分析：假設 $\triangle ABC$ 为所求，BC 为已知長 a，AH 为已知長 h，且 $AB:AC=m:n$

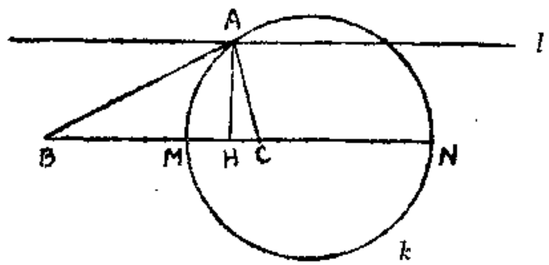

圖 8

顯然，問題的关鍵在于确定 A 点，而到兩点距离之比为一定的点的軌跡是阿波罗尼圓，由此得作圖的方法如下：

作圖：

1. 作綫段 $BC=a$。
2. 作与 BC 距离为 h 的二条平行綫 l_1 和 l_2。
3. 作与 B，C 距离之比为 $m:n$ 的阿波罗尼圓 k。

則圓 k 与 l_1，l_2的交点即为所求的 A 点△ABC即为所求。

証明：从略。

討論：因为在 l_1 上的交点与在 l_2 上的交点是关于 BC 对称的，因此在不定位的情况下本題最多有二解，可能無解。

3. 試在已知直綫上求出一点，使它和兩个已知点的距离差为最大。

分析：因为三角形二边之差必大于第三边，由此得到作圖方法如下：

作圖:

1°. 当 AB 在直綫 a 的同側时: 連接A, B 与直綫 a 的交点为 X, 則 X即为所求之点。

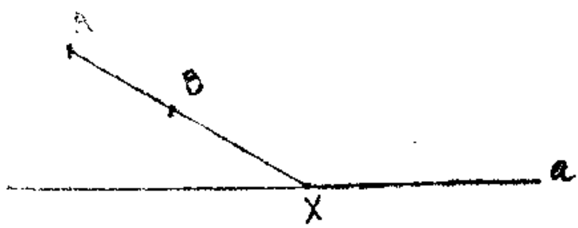

圖 9

2°. 当 A, B 在直綫 a 的異側:

作 B 点关于直綫 a 的对称点 B', 連AB'与直綫 a 的交点为y, 則 y 即为所求之点。

証明: 从略。

討論:

1°. A, B 在直綫 a 的同側。

(1) $AB \nparallel a$ 有一解

(2) $AB \parallel a$ 無解。

2°. AB 在直綫 a 的異側。

(1) A, B 到 a 的距离不相等 一解

(2) A, B 到 a 的距离相等

a) AB 不垂直于 a 無解

b) $AB \perp a$ 無限解

第三章 軌　　跡

1. 求与二定直綫距离之差为一定的点的軌跡。

假設它們的差为 l，

1°. 定直綫 a，b 相交于 O。在 a，b 上找出合乎条件的四个特殊点 $ABCD$，分别过这些点作 a，b 的平行綫，作它們与 b，a 交角的分角綫，得到八条射綫，此八条射綫即为所求之軌跡。

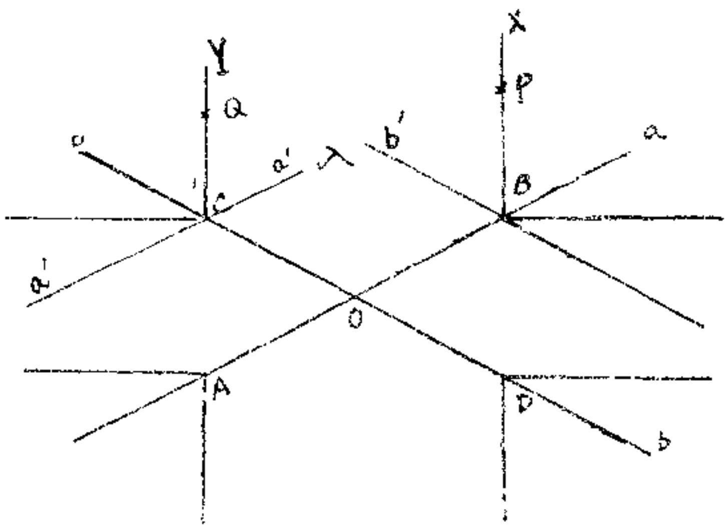

圖 10

証明：因为 a，b 將平面分成四个区域，而各个区域的情况一致，所以只要証明其中一个区域即行，如圖証明 λ 区域。

完备性：設 P 点合乎条件，則 P 点到 Bb' 与 Ba 射綫的距离必相等，或者到 Ca' 与 Cb 射綫的距离必相等，所以必在它們的分角綫上，即射綫 Bx 及 Cy 上。

純粹性：設 Q 点为該二射綫上的任意点則它到 Bb' 与 Ba 射綫的距离相等，或到 Ca' 与 Cb 射綫的距离相等，所以它到 a，b 或

b，a 距离之差为一定，合乎条件。

同理可以証得在其它三个区域的情形是一样的。

由此証得該八条射綫的确为所求之軌跡。

2°. 定直綫 $a \parallel b$

設定直綫間距离为 d，則

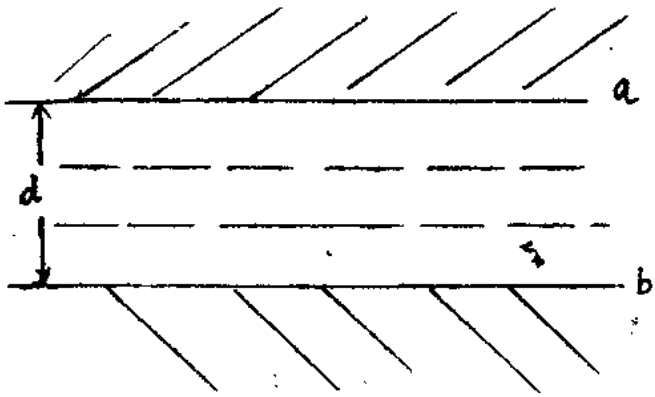

圖 11

（1）$l<d$ 时　　有二直綫

（2）$l=d$ 时　　有二半平面（見圖）

（3）$l>d$ 时　　無軌跡。

証明：由讀者自己進行。

2/ 設三角形中有一个角的位置固定，夾此角的二边之和为一定長，求第三边中点的軌跡。

已知三角形中固定位置的角为 $\angle XAY$ 夾此角的二边之和为 l，在 AX 射綫上取 $AB=\frac{1}{2}l$ 在 AY 射綫上取 $AC=\frac{1}{2}l$，連結 BC，則綫段 BC 即为所求之軌跡。

証明：

完备性：設 P 点不在 BC 綫段上，則它一定不合乎条件。

过 P 作一直綫交 AX, AY 于 B_1，C_1 使 $AB_1+AC_1=l$，B_1C_1 与 BC 之交点設为 P_1（P_1 与 P 不重合，因为 P 不在 BC 上）过 C_1 作 AB_1 之平行綫交 BC 于 D，則 $\triangle BB_1P_1 \equiv \triangle DC_1P_1$，

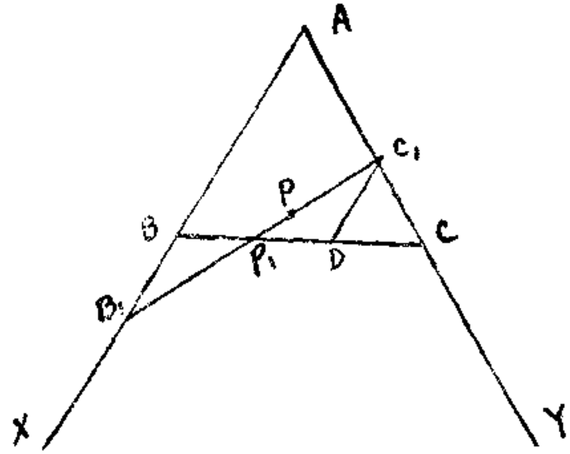

圖 12

$B_1P_1=C_1P_1$，P_1 为 B_1C_1 的中点，因此 P 就不可能为 B_1C_1 之中点，$\therefore P$ 点不合乎条件。

如果过P点不存在直綫B_1C_1(B_1，C_1分别在AX,AY上)使$AB_1+AC_1=l$,则P点自然不合乎条件。

純粹性：設 P_1 是 BC 上的任意点，过 P_1 作直綫与 AX，AY 交于 B_1，C_1，过C_1 作 AX 的平行綫交 BC 于 D，则 $\triangle BB_1P_1\equiv\triangle DC_1P_1$，$\therefore B_1P_1=C_1P_1$，$\therefore P_1$ 合乎条件。

因此綫段BC确实为所求的軌跡。

3. 求作一圓，与已知直綫相切，且与已知圓相切于已知点。

解 設 O 为已知圓，A 为已知圓上的点，l 为已知直綫。我們來求出与已知直綫 l 相切，且与已知圓 O 相切于点 A 的圓。假設 C_1 是这样的圓，則其圓心应該在連結 O 和 A 兩点的直綫上（圖13），如果过 A 点作已知圓 O 的切綫，此切綫为已知圓和所求圓在点 A 处的公切綫，令其与 l 交于 B 点，因而所求圓的圓心又应該在已知直綫 l 和其公切綫 AB 交角的平分綫上。所以所求圓的圓心是直綫 OA 与 l 和 AB交角的平分綫的交点。

本題一般情形有二解，当 O 和 A 兩点連綫垂直直綫l时有一解，当 O 和 A 連綫平行 l 时，所得到的是兩个相等的圓。

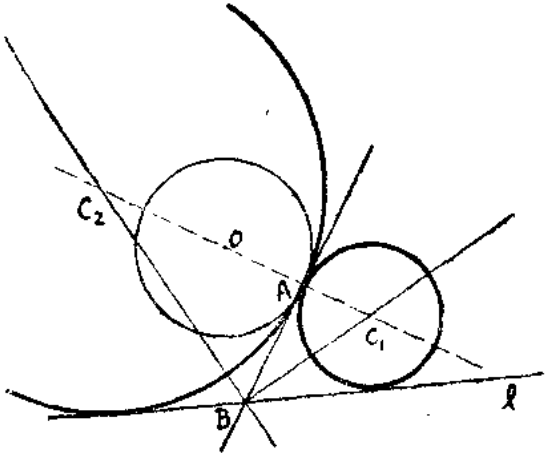

圖 13

4. 已知半徑求作一圓，使其通过已知点，且与已知直綫截得的弦等于已知長。

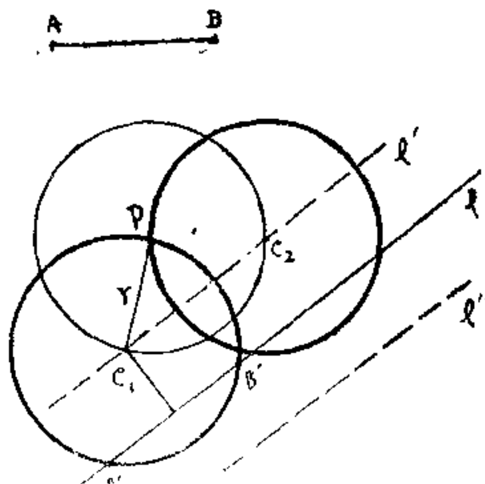

圖 14

解：設 r 为已知半徑，p 为已知点，l 为已知直綫，AB 为定長綫段，我們來求出所求作的圓。設 C_1 是这样的圓。因为要求它通过 p 点，且半徑为 r，所以其圓心的軌跡是以 p 点为圓心以 r 为半徑的圓周（圖 14）；另一方面要求所求的圓在 l 已知直綫上截得的弦等于已知綫段 AB，所以，所求作的圓其圓心的軌跡又是这样兩条直綫用 l' 和 l'' 表示：1）它們平行于已知直綫 l，2）它們到 l 的距离我們可以这样求出，即在有已知半徑为 r 的任意圓內，任意作一有已知長

AB 的弦，则其弦心距就是我們所要求的直綫 l' 和 l'' 到 l 的距离。

总之我們所求作圓的圓心应該是以 p 为圓心，以 r 为半徑的圓与直綫 l' 和 l'' 的交点。

最后，本題解的最多个数是四个，因为两种軌跡的交点最多是四个。

5. 已知半徑求作一圓，使其与已知直綫和已知圓均相切。

解：設 r 为已知半徑，l 为已知直綫，c 为已知圓。令 R 是它的半徑。我們求作的圓要求与 c 相切且有已知半徑 r，所以，所求作圓的圓心軌跡是已知圓 c 的兩个同心圓，而他們半徑分別为 $r+R$ 与 $R-r$（$R>r$ 时存在）（圖15）。所求作的圓另一方面要求与已知直綫 l 相切，且有已知半徑 r，因而所求圓的圓心又应該在平行于已知直綫 l，且到 l 的距离为 r 的兩条直綫上。

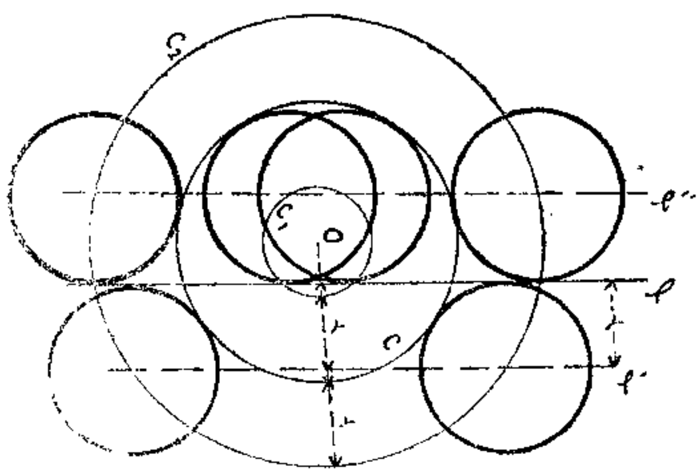

圖 15

所以，求作圓的圓心应該是这些軌跡（以 O 为圓心以 $R+r$，$R-r$ 为半徑的兩个圓和平行于 l 且距离为 r 的兩条直綫）的交点。

本題最多可能有八个解，因为每一条直綫与兩个同心圓最多可能有四个交点。

6. 已知平面上任意兩个圓，及任意点，求一点，使其到二已知

圓的切綫長相等，且等于它到已知点的距离。

解：設 O 和 O' 为已知的任意二圓，A 为任意点。假設 P 为所求的点（圖16)；它应該在 O 和 O' 兩圓的根軸 l 上，P 点必須在兩已知圓 O 和 O' 每一个的外部，因为根軸（除掉在兩已知圓內部的点）是向兩圓引等長切綫的軌跡。同理 P 点也应該在圓 A 与兩已知圓之一的根軸 l' 上。

所以点 P 是兩个根軸 l 和 l' 的交点。

本題的解答在实际上应用了下面的作圖：求作已知点圓和已知圓（普通的圓）的根軸。下面我們來給出最一般的解法。通过已知点任作一与已知圓相交的輔助圓，通过已知点作这个輔助圓的切綫，并連結輔助圓与已知圓的交点，所得的直綫与过 A 点切綫的交点，就是所求根軸上的点，重复上面的作法又得到根軸上的另一个点，兩点連結起來，就是所求的根軸。

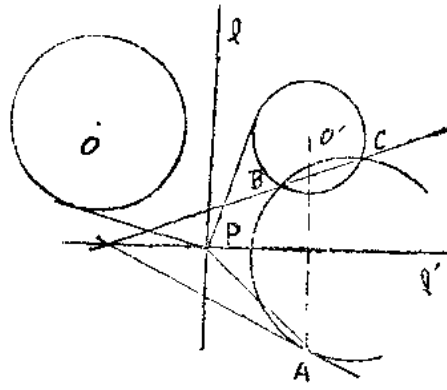

圖 16

这个作圖的正确性，是因为所求出的点对輔助圓切綫的平方等于从这个点到輔助圓与已知圓交点距离的乘積。

7. 作过二已知点，且使它切于已知圓的圓。

解：設 A，B 为已知点，K 为已知圓。（圖 17）本題主要在于求出已知圓与求作圓的切点 T 來。

假設 C_1 是我們所求作的圓过 T 引 K 圓的切綫，同时也是求作圓 C_1 的切綫，因此要作出此切綫則 T 点即可求出。如果过 A，B 兩点引任一与 K 相交的圓 C，則圓 C 与圓 C_1 的根軸为过 AB 的直綫，圓 K 与圓 C_1 的根軸为过 T 的圓 K 的切綫，圓 K 与圓 C 的根軸为过 DE 的直綫，該三直綫必交于一点 I（即三圓的根心）

但 I 点可以由 A，B 兩点連結的直綫和 E，D 兩点連結的直綫

所确定，这样一來公切綫 IT 的作圖成为可能，所以得到下面的作圖法：过 A 和 B 兩点任意作一与已知圓 K 相交的輔助圓C，其交点为 E 和 D，直綫 AB，DE 的交点为 I，自 I 点作已知圓 K 的切綫（一般情形有兩条），則切点 T即为求作圓 C_1 与已知圓 K 的切点；最后过 A，B，T 三点作圓即为所求的圓。

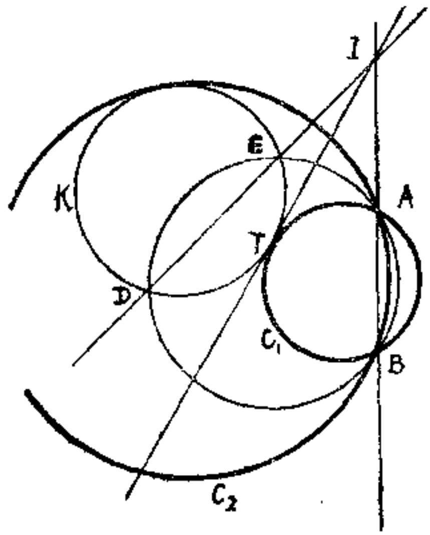

圖 17

本題一般情形有兩个解，因为从点 I 向已知圓引切綫时一般情形下有兩条。

存在解的条件：点 I 必須在已知圓 K的外部，即在綫段 DE 的延長綫上，为此，点 A 和 B 必須同时在 D，E 兩点將輔助圓分成的兩个弧的一个上，也就是說，A 和B兩点必須同时在已知圓 K内或外。

8. 設 A 和 B 是某个圓上的兩个已知点，M 是这个圓上的动点，在綫段 AM 的延長綫上，截取綫段 $MN=MB$，試求点 N 的軌跡。

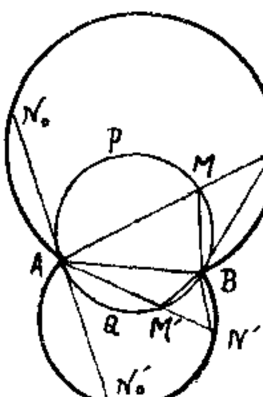

圖 18

解：如果点M在弧 APB 上移动（圖18）假設点N是合乎条件的点，則 $\angle ANB=\angle MBN=\frac{1}{2}\angle AMB$ 但点M沿弧 APB 变动时角 AMB 保持定值，所以角ANB 也保持定值。因此点 N 在以点 A 和 B为端点所确定的弧上（也就是对綫段AB張已知角的点的軌跡）。