赠

高考标准诠解单元能力测试题

试卷索引	考试时间	得分

名卷在手，高考无忧！

标准解 高考标准

2005高考版

依据教育部最新《考试说明》学科标准 编写

数学

总主编 王后雄

主编 马春华 潘龙星

锁定全部考点

预测高考试题

湖南大学出版社

第一章 集合与简易逻辑 测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 在下列各式中,正确的是(　　).

A. $2\sqrt{3}\subseteq\{x|x\leqslant 4\}$

B. $2\sqrt{3}\in\{x|x\leqslant 4\}$

C. $\{2\sqrt{3}\}\subset\{x|x\leqslant 3\}$

D. $\{2\sqrt{3}\}\in\{x|x\leqslant 4\}$

2. 若命题 $P:x\in A\cup B$,则非 P 是(　　).

A. $x\notin A\cap B$

B. $x\notin A$ 或 $x\notin B$

C. $x\notin A$ 且 $x\notin B$

D. $x\in A\cap B$

3. 集合 $P=\{(x,y)|y=k,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{(x,y)|y=a^x+1,a>0$ 且 $a\neq 1,x\in\mathbf{R}\}$,已知 $P\cap Q$ 只有一个子集,那么实数 k 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,1)$

B. $(-\infty,1]$

C. $(1,+\infty)$

D. $(-\infty,+\infty)$

4. 设 A、B、C 是三个集合,则"$A\cap B=A\cap C$"是"$B=C$"的(　　).

A. 充分但不必要条件

B. 必要但不充分条件

C. 充分且必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 条件"$\frac{1}{x}<1$"是条件"$x>1$"的(　　).

A. 充分但不必要条件

B. 必要但不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 命题 $P:a^2+b^2<0(a,b\in\mathbf{R})$,命题 $q:a^2+b^2\geqslant 0(a,b\in\mathbf{R})$,下列结论正确的是(　　).

A. "p 或 q"为真

B. "p 且 q"为真

C. "非 p"为假

D. "非 q"为真

7. 不等式 $1\leqslant|2x-1|<2$ 的解集是(　　).

A. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x\leqslant 0\text{ 或 }1\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$

B. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x\leqslant 0\text{ 且 }1<x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

C. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\leqslant x<0\text{ 或 }1<x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

D. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0\text{ 且 }1\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\right\}$

8. 若关于 x 的方程 $x^2-x-(m+1)=0$ 在 $[-1,1]$ 有上解,则 m 的取值范围是(　　).

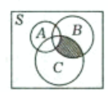
A. $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant -1$

B. $-1\leqslant m\leqslant 1$

C. $m\geqslant -\frac{5}{4}$

D. $m\leqslant 1$

9. 已知如右图所示,阴影部分所表示的集合为(　　).



A. $A\cap(B\cap C)$

B. $(C_SA)\cap(B\cap C)$

C. $(C_SA)\cup(B\cap C)$

D. $(C_SA)\cup(B\cup C)$

10. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|0<\alpha<x<\beta\}$,则不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集是(　　).

A. $\left\{x\middle|\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}\right\}$

B. $\left\{x\middle|-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}\right\}$

C. $\left\{x\middle|\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}\right\}$

D. $\left\{x\middle|-\frac{1}{\beta}<x<-\frac{1}{\alpha}\right\}$

11. 设 M、P 是两个非空集合,定义 M 与 P 的差集为 $M-P=\{x|x\in\mathbf{M}$,且 $x\notin\mathbf{P}\}$,则 $M-(M-P)=$(　　).

A. P　　B. M

C. $M\cap P$　　D. $M\cup P$

12. 若关于 x 的不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集为 $\varnothing$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$

C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,3)$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 设集合 $A=\{(x,y)|3x+y=1\}$,$B=\{(x,y)|a^2x+3y=a\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则 $a=$______.

14. 在命题"若 $ab>0$,则 $a>0$ 且 $b>0$"以及它的逆命题、否命题、逆否命题中真命题共有______个.

15. 非 A 是命题 A 的否定,若非 A 是 B 的充分不必要条件,那么 A 是非 B 成立的______条件.

16. 已知命题 p:不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$,命题 $q:f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数.若 p 或 q 为真,p 且 q 为假,则实数 m 的取值范围是______.

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分) $\begin{cases}\alpha+\beta>4\\ \alpha\beta>4\end{cases}$ 是 $\begin{cases}\alpha>2\\ \beta>2\end{cases}$ 的什么条件,并说明理由.

18. (12 分)解关于 x 的不等式:$(m+1)x^2-4x+1<0$.

19. (12 分)集合 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$,集合 $B=\{x|x^2+4x+p<0\}$,若 $A\cap B=B$,求实数 p 的取值范围.

20. (12 分)已知抛物线 $y=-x^2+mx-1$,点 $A(3,0)$,$B(0,3)$,求抛物线与线段 AB 有两个不同交点的充要条件.

21. (12 分)设集合 S 中的元素为实数,且满足条件:

①S 内不含 1;　②若 $a\in S$,则必有 $\frac{1}{1-a}\in S$.

(1)证明:若 $2\in S$,则 S 中必存在两个元素并求出这两个元素;

(2)S 中的元素能否有且只有一个?为什么?

22. (14 分)定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$ 的奇函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数,且 $f(1)=0$,设 $g(x)=\sin^2x+k\cos x-2k$,$(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$,集合 $M=\{k|g(x)<0,k\in\mathbf{R}\}$,$N=\{k|f[g(x)]<0,k\in\mathbf{R}\}$.求 $M\cap N$.

第二章 函 数 测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、**选择题**(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 已知 $f(x)=x^3-a$,且 $f(-1)=0$,则 $f^{-1}(1)$ 的值是(　　).

A.0　　B.1　　C.-1　　D.$\sqrt[3]{2}$

2. $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且在$[0,+\infty)$上是减函数,$f(a)=0(a>0)$,则 $xf(x)>0$ 的解集是(　　).

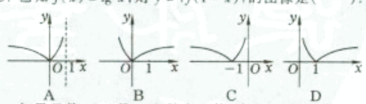
A.$\{x|0<x<a\}$

B.$\{x|-a<x<a\}$

C.$\{x|-a<x<0$ 或 $0<x<a\}$

D.$\{x|x<-a$ 或 $0<x<a\}$

3. 已知 $f(x)=\lg x$,则 $y=|f(1-x)|$的图像是(　　).



4. 如果函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,在$(-1,0)$上是增函数,且 $f(x+2)=-f(x)$,则下列关系中正确的是(　　).

A.$f\left(\frac{1}{3}\right)<f(1)<f\left(\frac{3}{2}\right)$

B.$f\left(\frac{3}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$

C.$f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)<f(1)$

D.$f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f(1)$

5. 若函数 $f(x)=\begin{cases}f(x+2)(x<2)\\2^{-x}\quad(x\geq 2)\end{cases}$,则 $f(-3)$的值是(　　).

A.2　　B.8　　C.$\frac{1}{8}$　　D.$\frac{1}{2}$

6. 已知函数 $f(x)=\frac{a-x}{x-a-1}$的反函数 $f^{-1}(x)$的图像对称中心是$(-1,3)$,则实数 a 等于(　　).

A.-4　　B.-2　　C.2　　D.3

7. 函数 $y=x^2+\frac{1}{x}\left(x\leq-\frac{1}{2}\right)$的值域是(　　).

A.$\left(-\infty,-\frac{7}{4}\right]$　　B.$\left[-\frac{7}{4},+\infty\right)$

C.$\left[\frac{3\sqrt[3]{2}}{2},+\infty\right)$　　D.$\left(-\infty,-\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right]$

8. $f(x+1)$为偶函数,且 $x<1$ 时,$f(x)=x^2+1$,则 $x>1$ 时,$f(x)$的表达式(　　).

A.$f(x)=x^2+1$

B.$f(x)=x^2-2x+2$

C.$f(x)=x^2-4x+5$

D.无法确定

9. 若 $f(x)=|\lg x|$,$0<a<b<c$,且 $f(a)>f(c)>f(b)$,则(　　).

A.$(a-1)(c-1)>0$　　B.$ac>1$

C.$ac=1$　　D.$ac<1$

10. 方程 $\lg^2x-2a\lg x+2-a=0$ 的两根均大于 1,则实数 a 的取值范围是(　　).

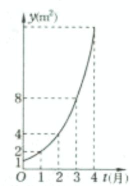
A.$(-\infty,1]$　　B.$[1,2)$

C.$[1,2]$　　D.$(3,+\infty)$

11. 如果不等式 $\sqrt{x+a}\geq x(a>0)$的解集为$[m,n]$,$|m-n|=2a$,则 a 的值等于(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

12. 如下图所示的是某池塘中的浮萍蔓延的面积 $y(m^2)$与时间 t(月)的关系:$y=a^t$,有以下叙述:



①这个指数函数的底数为 2;

②第 5 个月时,浮萍面积就会超过 $30m^2$;

③浮萍从 $4m^2$ 蔓延到 $12m^2$ 需要经过 1.5 个月;

④浮萍每月增加的面积都相等;

⑤若浮萍蔓延到 $2m^2$,$3m^2$,$6m^2$ 所经过的时间分别为 t_1,t_2,t_3,则 $t_1+t_2=t_3$.其中正确的是(　　).

A.①②　　B.①②③④

C.②③④⑤　　D.①②⑤

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、**填空题**(每小题 4 分,共 16 分)

13. $y=f(x)$为奇函数,且 $y=f(x)$的图像关于直线 $x=2$ 对称,$x\in[2,4]$时,$f(x)=x^2-6x+8$,则 $f(-1)=$______.

14. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数,且 $f(1+x)=f(1-x)$,$f(8+x)=f(8-x)$.则它的一个周期是______.

15. 已知函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$在区间$[-2,2]$

上的函数值总小于 2,则 $\log_2 a$ 的取值范围是______.

16. 对任意的函数 $f(x)$,$g(x)$,在公共定义域内,规定 $f(x)*g(x)=\min\{f(x),g(x)\}$,若,$f(x)=3-x$,$g(x)=\sqrt{2x-3}$,则 $f(x)*g(x)$的最大值是______.

三、**解答题**(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. 若 $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的减函数,且对一切 a,$b\in(0,+\infty)$,都有 $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$.

(1)求 $f(1)$的值;

(2)若 $f(4)=1$,解不等式 $f(x+6)-f\left(\frac{1}{x}\right)>2$.

18. (12 分)已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}(a,b,c$ 为非负整数)是奇函数,又 $f(1)=2$,$f(2)<3$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)用函数单调性定义证明:$f(x)$在$(-\infty,-1)$上是减函数.

19. (12 分)已知 $f(x)=-4x^2+4ax-4a-a^2$ 在区间$[0,1]$内有最大值 -5,求 a 值.

20. (12 分)某家用电器生产厂家根据其产品在市场上的销售情况,决定对原来以每件 2000 元出售的一种产品进行调价,并按新单价的八折优惠销售,结果每件产品仍可获得实际销售价 20% 的利润,已知该产品每件的成本是原销售单价的 60%.

(1)求调整后这种产品的新单价是每件多少元?让利后的实际销售价是每件多少元?

(2)为使今年按单价让利销售后的利润总额不低于 20 万元,今年至少应销售这种产品多少件?

(每件产品利润=每件产品的实际售价-每件产品的成本价)

21. (12 分)已知奇函数 $f(x)$定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数,$f(1)=0$.解不等式 $f[1+\log_a(1-x^2)]>0(a>1)$.

22. (14 分)已知函数 $f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$,对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,$f(2+x)=-f(2-x)$,$f(x+4)=f(x)$,$f(-1)=2$,若对于任意的 a、b 均属于$[-1,1]$,且 $a+b\neq0$,都有$\frac{f(a)+f(b)}{a+b}<0$.

(1)判断 $f(x)$在$[-1,1]$上是增函数还是减函数,并证明你的结论;

(2)若函数 $g(x)$的定义域是$[-1,1]$,对于任意的 $x\in[-1,1]$时,都有 $g(x)=f(x)$,解不等式 $g\left(x+\frac{2}{3}\right)>g\left(\frac{1}{x-2}\right)$;

(3)对于(2)中的函数 $g(x)$,若 $g(x)\leq m^2-2am+2$ 对所有 $x\in[-1,1]$,$a\in[-1,1]$恒成立,求实数 m 的取值范围.

第三章 数 列 测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 在数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1}=ca_n$(c为非零常数),且前n项和$S_n=3^n+k$,则k等于(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 2

2. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n-1$,则$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$等于(　　).

A. $(2^n-1)^2$　　B. $\frac{1}{3}(2^n-1)$

C. 4^n-1　　D. $\frac{1}{3}(4^n-1)$

3. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n,若$a_1>0$,$S_4=S_8$,则当S_n取得最大值时,n的值为(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\log_2\frac{n+1}{n+2}$($n\in\mathbf{N}$),设其前$n$项和为$S_n$,则使$S_n<-5$成立的自然数$n$(　　).

A. 有最小值 63

B. 有最大值 63

C. 有最小值 31

D. 有最大值 31

5. 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$,公比为q,前n项和为S_n.若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=1$,则公比$q$的取值范围是(　　).

A. $q\geq1$　　B. $0<q\leq1$

C. $0<q<1$　　D. $q<1$

6. 互不相等的三个正数x_1,x_2,x_3成等比数列,且点$P_1(\log_a x_1,\log_b y_1)$,$P_2(\log_a x_2,\log_b y_2)$,$P_3(\log_a x_3,\log_b y_3)$共线($a>0$且$a\neq1$,$b>0$且$b\neq1$),则$y_1,y_2,y_3$是(　　).

A. 成等比数列非等差数列

B. 成等差非等比数列

C. 既成等比也可能成等差数列

D. 既非等比也非等差数列

7. 已知$a,b,a+b$成等差数列,a,b,ab成等比数列,且$0<\log_m ab<1$,则m的取值范围是(　　).

A. $m>1$　　B. $1<m<3$

C. $m>8$　　D. $0<m<1$或$m>8$

8. 设数列$\{a_n\}$是首项为 50,公差为 2 的等差数列,$\{b_n\}$是首项为 10,公差为 4 的等差数列,以a_k,b_k为相邻的两边的矩形内最大圆面积记为S_k,若$k\leq21$.那么$S_k=$(　　).

A. $\pi(2k+1)^2$　　B. $\pi(2k+3)^2$

C. $\pi(k+12)^2$　　D. $\pi(k+24)^2$

9. 某工厂 1996 年至 1999 年的产量和为 100 吨,1998 年至 2001 年的产量和为 121 吨,则该工厂从 1996 年至 2001 年的年平均增长率为(　　).

A. 10%　　B. 21%　　C. 7%　　D. 14%

10. $\{a_n\}$满足$a_n,a_{n-1}=a_{n-1}+(-1)^n(n\geq2)$且$a_1=1$,则$\frac{a_5}{a_3}=$(　　).

A. $\frac{16}{15}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{8}{3}$

11. 在$\triangle ABC$中,$\tan A$是以-4为第三项、以 4 为第七项的等差数列的公差,$\tan B$是以3^{-1}为第三项、以 9 为第六项的等比数列的公比,则这个三角形是(　　).

A. 钝角三角形

B. 锐角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 非等腰的直角三角形

12. 等比数列的公比不为 1,它的前n项和、前$2n$项和、前$3n$项和分别为S_A,S_B,S_C,则有(　　).

A. $S_B^2=S_AS_C$

B. $S_B^2+S_C^2=S_A(S_B+S_C)$

C. $S_A^2+S_C^2=S_B(S_A+S_C)$

D. $S_A^2+S_B^2=S_A(S_B+S_C)$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 设S_n表示等差数列$\{a_n\}$的前n项和,且$S_9=18$,$S_n=240$,若$a_{n-4}=30(n>9)$,则$n=$______.

14. 将奇数数列按如下分组(　　).

(1)　(3,5)　(7,9,11)　(13,15,17,19)

使第n组中含有n个数,那么第n组中的n个奇数的和是______.

15. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n^2}{2n-1}a_n$,则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$______.

16. 关于数列有下面四个判断:

①若a,b,c,d成等比数列,则$a+b,b+c,c+d$也成等比数列;②若数列$\{a_n\}$既是等差数列也是等比数列,则$\{a_n\}$为常数列;③数列$\{a_n\}$的前n项和为

S_n,且$S_n=a^n-1(a\in\mathbf{R})$,则$\{a_n\}$为等差或等比数列;④数列$\{a_n\}$为等差数列,且公差不为零,则数列$\{a_n\}$中不会有$a_m=a_n(m\neq n)$.

其中正确判断的序号是______(注:把你认为是正确判断的序号都填上).

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)等差数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n,已知S_7是S_n的最大值,且$|a_7|<|a_8|$,求使$S_n>0$的n的最大值.

18. (12 分)陈老师购买安居工程集资房 72m^2,单价为 1000 元/m^2,一次性国家财政补贴 28800 元,学校补贴 14400 元,余款由个人负担,房地产开发公司对教师实行分期付款,即各期所付的款以及各期所付的款到最后一次付款时所生的利息合计,应等于个人负担的购房余款的现价以及这个余款现价到最后一次付款时所生利息之和,每期为一年,等额付款,签订购房合同后一年付款一次,再过一年又付款一次,等等,若付 10 次,10 年后付清.如果按年利率为 7.5%每年复利一次计算(即本年利息计入次年的本金生息),那么每年应付款多少元?(参考数据:$1.075^9\approx1.921$,$1.075^{10}\approx2.065$,$1.075^{11}\approx2.221$.)

19. (12 分)某正项等比数列$a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$,各项和是其偶数项和的 3 倍,各项积是2^{50}.已知$a_{n+1}=4$,问n为何值时,数列$\{\log_2 a_n\}$的前n项和有最大值?求出这个最大值.

20. (12 分)设$\{a_n\}$是正数组成的等比数列,S_n是其前n项和,证明:$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$.

21. (12 分)已知$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$($n\in\mathbf{N}$),且$a_1,a_2,a_3,\cdots a_n$构成一个数列,又$f(1)=n^2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明$f\left(\frac{1}{3}\right)<1$.

22. (14 分)已知函数:

$$f(x)=\begin{cases}0, & (x\leq0)\\ n[x-(n-1)]+f(n-1), & (n-1\leq x\leq n,n\in\mathbf{N})\end{cases}$$

(1)求$f(n)$;

(2)设$S(n)(n\geq0)$为由x轴,$y=f(x)$与$x=n$所围成的面积,n为自然数时,求$S(n)$;

(3)求满足$S(n)\geq100$的最小自然数n.

第四章 三角函数 测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第 Ⅰ 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=1$,则 $\tan\alpha\cot\alpha=$(　　).

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 无意义

2. 下列函数中,既为偶函数,又在 $(0,\pi)$ 上单调递增的是(　　).

A. $y=\tan|x|$

B. $y=\cos(-x)$

C. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

D. $y=\left|\cot\frac{x}{2}\right|$

3. 对任意实数 x,不等式 $a\sin x+b\cos x+c>0$($a,b,c\in\mathbf{R}$)都成立的充要条件是(　　).

A. $a=b=0$ 且 $c>0$

B. $\sqrt{a^2+b^2}=c$

C. $\sqrt{a^2+b^2}<c$

D. $\sqrt{a^2+b^2}>c$

4. 设 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin17^\circ+\cos17^\circ)$,$b=2\cos^2 13^\circ-1$,$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则有(　　).

A. $c<a<b$　　B. $b<c<a$

C. $a>b>c$　　D. $b<a<c$

5. 设 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$,$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$,则 $\log_{\sqrt{5}}(\tan\alpha\cot\beta)$ 等于(　　).

A. -2　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

6. 把函数 $y=\cos x$ 的图像上所有点的横坐标缩小到原来的一半,纵坐标扩大到原来的 2 倍,再把图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位,则所得图像的解析式为(　　).

A. $y=2\sin2x$

B. $y=-2\sin2x$

C. $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

D. $y=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

7. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,$\cos x=\frac{4}{5}$,则 $\tan2x=$(　　).

A. $\frac{7}{24}$　　B. $-\frac{7}{24}$

C. $\frac{24}{7}$　　D. $-\frac{24}{7}$

8. 若 $\sin x\cos y=\frac{1}{2}$,则 $\cos x\sin y$ 的取值范围是(　　).

A. $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$　　D. $[-1,1]$

9. α,β 都是锐角,且 $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$,则 α 与 β 之间的关系为(　　).

A. $\alpha=\beta$　　B. $\alpha<\beta$

C. $\alpha>\beta$　　D. $\alpha\geqslant\beta$

10. $f(x)=\tan\omega x$($\omega>0$)的图像的相邻两支被直线 $y=\frac{\pi}{4}$ 所截得线段的长为 $\frac{\pi}{4}$,则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. $\frac{\pi}{4}$

11. 设 $t=\sin\alpha+\cos\alpha$ 且 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha<0$,则 t 的取值范围是(　　).

A. $[-\sqrt{2},0)$

B. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

C. $(-1,0)\cup(1,\sqrt{2}]$

D. $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$

12. 对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x(\sin x\geqslant\cos x)\\ \cos x(\sin x<\cos x)\end{cases}$,下列命题中正确的是(　　).

A. 其值域 $[-1,1]$

B. 当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$($k\in\mathbf{Z}$)时其最大值为 1

C. 其最小正周期为 π

D. 当且仅当 $2k\pi+\pi<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$($k\in\mathbf{Z}$)时 $f(x)<0$

第 Ⅱ 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 已知 $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha=\frac{4}{5}$,且 β 是第三象限的角,则 $\cos\frac{\beta}{2}=$______.

14. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(\cos^4x-\sin^4x)$ 单调增区间为______.

15. 函数 $y=3\sin(x+20^\circ)+5\cos(x-10^\circ)$ 的最大值为______.

16. 给出下列命题:

①$f(x)=-2\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)$ 是奇函数.

②若 α,β 都是第一象限角且 $\alpha<\beta$,则 $\tan\alpha>\tan\beta$.

③$x=-\frac{3\pi}{8}$ 是 $y=3\sin\left(2x-\frac{3\pi}{3}\right)$ 的图像的一条对称轴.

④$f(x)=3\sin^2\frac{\pi x}{2}+1$,使 $f(x+c)=f(x)$ 对任意实数 x 成立的正数 c 的最小值是 2.

其中正确命题的序号是______.

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)求 $\left(\frac{3}{\sin^2140^\circ}-\frac{1}{\cos^2140^\circ}\right)\cdot\frac{1}{2\sin10^\circ}$ 的值.

18. (12 分)已知函数

$$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$$

的图像在 y 轴上截距为 1,它在 y 轴右侧的第一个最大值和最小值点分别为 $(x_0,2)$ 和 $(x_0+3\pi,-2)$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式.

(2)将 $y=f(x)$ 图像上所有点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$(纵坐标不变),再将图像向 x 轴正方向平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,得到 $y=g(x)$ 的图像,求 $g(x)$ 的解析式,并用五点法画出 $y=g(x)$ 的图像.

19. (12 分)设 $f(x)=\sin(x+a)+\cos(x-a)$ 是偶函数,且 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(1)求 a;　(2)求 $f\left(2a-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值.

20. (12 分)一条河宽 1 km,相距 4 km 的两城 A、B 分别在河的两岸,现在 A、B 之间铺设一条电缆,已知:地下电缆的修建费为 2 万元/千米,水下电缆的修建费为 4 万元/千米.设两岸为平行直线,问:如何铺设电缆可使总费用最省.

21. (12 分)是否存在实数 a,使得函数 $y=\sin^2x+a\cos x+\frac{5}{8}a-\frac{3}{2}$ 在闭区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 1?若存在,求出对应 a 的值.若不存在,试说明理由.

22. (14 分)已知函数 $f(x)=a\sin x+c\cos x+1-a$($a\in\mathbf{R}$),$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,若定义在非零实数集上的奇函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,且 $g(2)=0$,求当 $g[f(x)]<0$ 时实数 a 的取值范围.

第五章 平面向量 测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 下面给出四个命题:

①对于实数 p,向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$,恒有 $p(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=p\boldsymbol{a}-p\boldsymbol{b}$;

②对于实数 p,q 和向量 $\boldsymbol{a}$,恒有 $(p-q)\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{a}-q\boldsymbol{a}$;

③若 $p\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{b}(p\in\mathbf{R})$,则有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

④若 $p\boldsymbol{a}=q\boldsymbol{a}(p,q\in\mathbf{R},\boldsymbol{a}\neq 0)$,则 $p=q$.

其中正确命题的个数是(　　).

A.1　B.2　C.3　D.4

2. 已知向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}=(1,0),\boldsymbol{j}=(0,1)$,与 $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 垂直的向量是(　　).

A.$2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$　B.$\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$

C.$2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$　D.$\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

3. 设两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,且 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线,则 k 的值为(　　).

A.1　B.-1　C.±1　D.0

4. 下列命题中正确的是(　　).

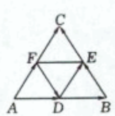
A.若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$

B.若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

C.若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

D.$(\boldsymbol{a})^2>|\boldsymbol{a}|$

5. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,D,E,F 分别为 AB,BC,CA 的中点,$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}$ 等于(　　).



A.$\overrightarrow{FD}$　B.$\overrightarrow{FC}$

C.$\overrightarrow{FE}$　D.$\overrightarrow{BE}$

6. 三点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 共线的充要条件是(　　).

A.$x_1y_2-x_2y_1=0$

B.$x_1y_3-x_3y_1=0$

C.$(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_1)=(x_3-x_1)\cdot(y_2-y_1)$

D.$(x_2-x_1)\cdot(x_3-x_1)=(y_2-y_1)\cdot(y_3-y_1)$

7. 点 $A(-1,2),B(6,1)$ 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后的坐标分别为 $(-3,m)$ 和 $(n,4)$,则 $\boldsymbol{a}=$(　　).

A.$(-2,3)$　B.$(2,-3)$

C.$(-3,2)$　D.$(3,-2)$

8. 已知 $|\boldsymbol{a}|=10,|\boldsymbol{b}|=12$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},(3\boldsymbol{a})\cdot(\frac{1}{5}\boldsymbol{b}),(3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 分别等于(　　).

A.$60,-36,-968$

B.$60,36,-968$

C.$-60,-36,-968$

D.$-60,-36,968$

9. 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的大小关系是(　　).

A.$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|<\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

B.$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|>\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

C.$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\geqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

D.两者大小不定

10. 如果 $\triangle ABC$ 的三内角满足 $\cos 2B+\cos 2C=\cos 2A+1$ 且 $2\sin B\sin C=\sin A$,则 $\triangle ABC$ 中(　　).

A.$B=C,A\neq\frac{\pi}{2}$　B.$B\neq C,A=\frac{\pi}{2}$

C.$B=C,A=\frac{\pi}{2}$　D.$B\neq C,A\neq\frac{\pi}{2}$

11. $\triangle ABC$ 的两边长分别为 2,3,其夹角的余弦为 $\frac{1}{3}$,则其外接圆的半径为(　　).

A.$\frac{9\sqrt{2}}{2}$　B.$\frac{9\sqrt{2}}{4}$

C.$\frac{9\sqrt{2}}{8}$　D.$\frac{2\sqrt{2}}{9}$

12. 已知平面上有 $A(-2,1),B(1,4),D(4,-3)$ 三个点,又有一点 C 在 AB 上,使 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$,连接 DC,并延长至 E,使 $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{ED}$,则 E 点的坐标为(　　).

A.$(0,1)$　B.$(0,1)$ 或 $\left(2,\frac{11}{3}\right)$

C.$\left(-\frac{8}{3},\frac{11}{3}\right)$　D.$\left(-8,-\frac{5}{3}\right)$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 设两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3p),\boldsymbol{b}=(3p,2p)$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $p=$______.

14. 若 $\triangle ABC$ 的三内角 $A、B、C$ 成等差数列,且最大边为

最小边的 2 倍,则三内角之比为______.

15. $\overrightarrow{OA}=(-3,1),\overrightarrow{OB}=(0,5)$,且 $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$,则 C 点的坐标为______.

16. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的三个内角平分线的交点,当 $AB=AC=5,BC=6$ 时,$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{BC}(\lambda,u\in\mathbf{R})$,则 $\lambda+u=$______.

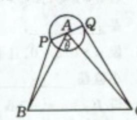
三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)在 $\triangle ABC$ 中,角 $A、B、C$ 的对边分别为 $a、b、c$ 且 $\lg a-\lg b=\lg\cos B-\lg\cos A\neq 0$.判断 $\triangle ABC$ 的形状.

18. (12 分)已知 O 是直角坐标系的原点 $\boldsymbol{i}=(1,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1)$.$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j},\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.在 x 轴上有一点 P 使 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 取最小值:求 P 点的坐标及此时的 $\angle APB$ 的大小.

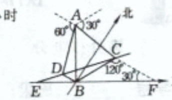
19. (12 分)已知 $4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-2,2\sqrt{3}),\boldsymbol{c}=(1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=3,|\boldsymbol{b}|=4$,求 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角.

20. (12 分)已知 $\triangle ABC$ 中,$|\overrightarrow{BC}|=3\sqrt{2},|\overrightarrow{CA}|=4,|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$,$PQ$ 是以 A 为圆心,$\sqrt{2}$ 为半径的圆的直径,求 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的最大值、最小值,并指出取最大值、最小值时向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的方向.



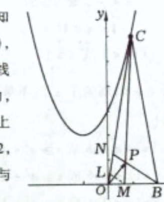
21. (12 分)海岛上有座海拔 1000 米的山,山顶 A 有一观测站,上午 11 时测得该船在岛的北 $60°$ 东处,俯角为 $30°$,11 时 10 分测得该船在岛的北 $60°$ 西处,俯角为 $60°$,问:

(1)该船的速度是每小时多少公里?



(2)如果船的航向不变,它何时到达岛的正西方向?此时所在点 E 离岛多远?

22. (12 分)如图,已知 $\triangle OBC$ 的顶点 $O(0,0)$,$B(2,0)$,C 在抛物线 $y=x^2+2x+3$ 上运动,M,N 分别在 OB,OC 上且满足 $OM:MB=1:2$,$ON:NC=1:3$,BN 与 CM 交于点 P.



(1)试用 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$;

(2)求 P 点轨迹方程;

(3)求 $\triangle OPB$ 面积最小值时 C 点坐标.

第六章 不等式 测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 不等式 $x^2-|x|-2<0(x\in\mathbf{R})$ 的解集是(　　).

A. $\{x|-2<x<2\}$

B. $\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$

D. $\{x|x<1$ 或 $x>1\}$

2. 若 $a\neq b$,则关于 x 的不等式:$\dfrac{x^2-a^2-b^2}{x-2ab}\geqslant 0$ 的解集是(　　).

A. $\{x|x\leqslant 2ab$ 或 $x\geqslant a^2+b^2\}$

B. $\{x|x<2ab$ 或 $x\geqslant a^2+b^2\}$

C. $\{x|x<2ab$ 或 $x>a^2+b^2\}$

D. $\{x|2ab<x\leqslant a^2+b^2\}$

3. 设 $M=\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)$ 且 $a+b+c=1$,a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,则 M 的取值范围是(　　).

A. $\left[0,\dfrac{1}{8}\right]$　　B. $\left(\dfrac{1}{8},1\right)$

C. $[1,8]$　　D. $[8,+\infty)$

4. 设 a、b 是满足 $ab<0$ 的实数,那么(　　).

A. $|a+b|>|a-b|$

B. $|a+b|<|a-b|$

C. $|a-b|<||a|-|b||$

D. $|a-b|<|a|+|b|$

5. $a,b\in\mathbf{R}$,则使 $\dfrac{1}{a^3}<\dfrac{1}{b^3}$ 成立的一个充分而不必要条件为(　　).

A. $b<a<0$　　B. $ab(a-b)<0$

C. $ab>0$　　D. $a>b$

6. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+x+m}$ 的值域为 $[0,+\infty)$,则实数 m 的范围为(　　).

A. $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $[0,+\infty)$

7. 若 $a>b>1$,$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$,$Q=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,$R=\lg\dfrac{a+b}{2}$,则(　　).

A. $R>P<Q$　　B. $R<P<Q$

C. $P<Q<R$　　D. $P<R<Q$

8. 不等式组 $\begin{cases}x-1>a^2\\x-4<2a\end{cases}$ 有解,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-1,3)$

B. $(-3,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9. 设实数 a、b、x、y 满足 $a^2+b^2=3$,$x^2+y^2=1$,则 $ax+by$ 的最大值是(　　).

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $\sqrt{5}$　　D. $\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$

10. 设关于 x 的方程 $2kx^2-2x-2k-2=0$ 的两个实根一个小于 1,另一个大于 1,则实数 k 的取值范围是(　　).

A. $k>0$　　B. $k>1$

C. $k<-4$　　D. $k>0$,或 $k<-4$

11. 若方程 $4^x-p\cdot 2^x+1=0$ 有实数解,则 p 的取值范围是(　　).

A. $p\geqslant 2$ 或 $p\leqslant -2$　　B. $p\geqslant 2$

C. $p\leqslant -2$　　D. $p\leqslant 0$

12. 当 $x\in(1,2)$ 时,不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 恒成立,则 a 的取值范围是(　　).

A. $[2,+\infty)$　　B. $(1,2)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,2]$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 若 $0<a<1$,$0<b<1$,且 $a_{\log_b}^{x-3}<1$,则 x 的取值范围是______.

14. 设 $a>0$,$b>0$,且满足 $ab\geqslant a+b+1$,则 $a+b$ 的最小值是______.

15. 设 $f(x)=x^2-2ax+2$,$x\in[-1,+\infty)$ 时,$f(x)\geqslant a$ 恒成立,则 a 的取值范围为______.

16. 关于 x 的二次方程,$x^2+(m-1)x+1=0$ 在 $[0,2]$ 上有解,则实数 m 的取值范围是______.

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)已知函数

$$f(x)=(a-1)\log_3^2 x-6a\log_3^x+a+1$$

当 $a\in[0,1]$ 时,恒有 $f(x)\geqslant 0$,求 x 的取值范围.

18. (12 分)解关于 x 的不等式:$\dfrac{a(x-1)}{x-2}>1$.

19. (12 分)已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b=1$.

求证:$\sqrt{a+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{b+\dfrac{1}{2}}\leqslant 2$.

20. (12 分)某商场预计全年分批购入每台价值为 2000 元的电视机共 3600 台,每批都购入 x 台($x\in\mathbf{N}$),且每批均需付运费 400 元.贮存购入的电视机全年所付保管费与每批购入电视机的总价值(不含运费)成正比.若每批购入 400 台,则全年需用去运输和保管总费用计 43600 元.现在全年只有 24000 元资金可以用于支付这笔费用,请问:能否恰当安排每批进货的数量,使资金够用?写出你的结论,并说明理由.

21. (12 分)设 $f(x)=x^2+bx+c$,$x\in[-m,m](m>0)$.

求证:(1)当 $b<-2m$ 时,$f(x)$ 在 $[-m,m]$ 上是减函数;

(2)当 $b<-2m$ 时,在 $[-m,m]$ 上是否存在一个 x,使得 $|f(x)|\geqslant m|b|$.

22. (14 分)对于函数 $f(x)$,若存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使 $f(x_0)=x_0$ 成立,则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.已知函数

$$f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq 0)$$

(1)若对任意实数 b,函数 $f(x)$ 恒有两相异不动点,求 a 的取值范围;

(2)在(1)的条件下,若 $y=f(x)$ 的图像上 A、B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点,且 A、B 两点关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 对称,求 b 的最小值.

第七章
直线和圆的方程
测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 已知直线 $l_1: x+ay+3=0$ 直线 $l_2: x-2y+1=0$ 垂直,则 a 的值为(　　).

A. 2　　B. -2

C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 直线 $l: ax+3ay+2a=0(m\neq0)$ 过点 $(1,-1)$,那么直线的倾斜角为(　　).

A. $\arctan\frac{1}{3}$　　B. $\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$

C. $\pi-\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$　D. $\operatorname{arccot}(-3)$

3. 已知直线 $y=kx$ 与圆 $(x-4)^2+y^2=4$ 相切,则直线的倾斜角为(　　).

A. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$　　D. $-\frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{5\pi}{6}$

4. 将直线 $2x-3y-6=0$ 绕着它与 y 轴的交点逆时针旋转 $45°$ 的角后,在 x 轴上的截距是(　　).

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $-\frac{5}{4}$　　D. $\frac{5}{4}$

5. 动点 $P(x,y)$ 到点 $A(3,4)$ 的距离比 P 到 x 轴的距离多一个单位长,则动点 P 的轨迹方程是(　　).

A. $x^2-6x-10y+24=0$

B. $x^2-6x-6y+24=0$

C. $x^2-6x-10y+24=0$ 和 $x^2-6x-6y+24=0$

D. $x^2-8x-8y+24=0$

6. 直线 $x-2y-3=0$ 与圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ 交于 E、F 两点,则 $\triangle EOF$(O 是原点)的面积为(　　).

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

7. 动点在圆 $x^2+y^2=1$ 上移动时,它与定点 $B(3,0)$ 连线的中点轨迹方程是(　　).

A. $(x+3)^2+y^2=4$

B. $(x-3)^2+y^2=1$

C. $(2x-3)^2+4y^2=1$

D. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}$

8. 圆 $x^2+y^2-4x+6y=0$ 和圆 $x^2+y^2-6x=0$ 交于 A、B 两点,则 AB 的垂直平分线的方程是(　　).

A. $x+y+3=0$

B. $2x-y-5=0$

C. $3x-y-9=0$

D. $4x-3y+7=0$

9. 若关于 x 的方程 $\sqrt{4-x^2}-k(x-2)-3=0$ 有且仅有两个不同的实数根,则实数 k 的取值范围是(　　).

A. $\left(\frac{5}{12},\frac{3}{4}\right]$　　B. $\left(\frac{5}{12},1\right]$

C. $\left(0,\frac{5}{12}\right]$　　D. $\left[\frac{5}{12},+\infty\right)$

10. 点 P 在直线 $2x+y+10=0$ 上,过 P 作圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线 PA、PB,其中 A、B 是切点,那么四边形 $PAOB$(O 是原点)面积的最小值是(　　).

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 24

11. 如果直线 l 将圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 平分,且不通过第四象限,则直线 l 的斜率的取值范围是(　　).

A. $[0,1]$　　B. $\left[\frac{1}{2},2\right]$

C. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $[0,2]$

12. $P(x_1,y_1)$ 是直线 $l: f(x,y)=0$ 上一点,$Q(x_2,y_2)$ 是 l 外一点,则方程 $f(x,y)=f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$ 表示的直线(　　).

A. 与 l 重合

B. 与 l 相交于 P 点

C. 过 Q 点且与 l 平行

D. 过 Q 点且与 l 相交

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 过点 $P(1,2)$ 的直线 l 把圆 $x^2+y^2-4x-5=0$ 分成两个弓形,当其中较小弓形面积最小时,直线 l 的方程是________.

14. 若光线从点 $A(-3,5)$ 射到直线 $3x-4y+4=0$ 之后反射到点 $B(3,9)$,则此光线所经过的路程的长是________.

15. 若点 $A(m,n)$ 在直线 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{2c}{b}$ 图像上,(其中 a,b,c 为直角三角形的三边长,c 为斜边),则 m^2+n^2 的最小值为________.

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

16. (12 分)已知点 $A(2,-1)$,$B(5,3)$.

(1)若直线 $l: 2x-y+1=0$ 与 AB 所在直线交于 P 点,求 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比;

(2)若直线 $l': kx-y+1=0$ 与线段 AB 相交,求 k 的取值范围.

17. (12 分)已知 O 为坐标原点,圆 $x^2+y^2+x-6y+c=0$ 与直线 $x+2y-3=0$ 相交于 P、Q 两点,当 c 为何值时,$OP\perp OQ$?

18. (12 分)在 $\triangle ABC$ 中,三内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $c=10$,$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$,$P$ 为 $\triangle ABC$ 内切圆上的动点,求点 P 到顶点 A,B,C 的距离的平方和最大值与最小值.

19. 某企业生产 A、B 两种产品,已知制造 A 种产品 1 kg 要用煤 9 t,电 4 kW,劳力 3 个,制造 B 种产品 1 kg 要用煤 4 t,电 5 kW,劳力 10 个.又知制成 A 种产品 1 kg 可获利 7 万元,制成 B 种产品 1 kg 可获利 12 万元.现该企业由于受某些条件限制,只有煤 360 t,电 200 kW,劳力 300 个,在这种条件下应生产 A、B 种产

品各多少 kg,能获得最大的经济效益?

20. (12 分)已知 A,B 为两个定点,且 $|AB|=2$,动点 M 到点 A 的距离是 4,线段 MB 的垂直平分线 l 交 MA 于点 P.

(1)当 M 变化时,建立适当的坐标系,求动点 P 的轨迹方程,并说明轨迹是什么图形;

(2)设点 Q 是(1)中轨迹上的点,且 $|QA|-|QB|=1$,求 $\tan\angle AQB$ 的值.

21. (14 分)已知直线 $l: x=m(m<-2)$ 与 x 轴交于 A 点,动圆 M 与直线 l 相切,并且与圆 $O: x^2+y^2=4$ 相外切.

(1)求动圆的圆心 M 的轨迹 C 的方程;

(2)若过原点且倾角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与曲线 C 交于 M、N 两点,问是否存在以 MF 为直径的圆经过点 A?若存在,求出 m 的值;若不存在,说明理由.

第八章
圆锥曲线方程
测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线互相垂直,那么它的离心率是(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

2. 如果 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,那么 k 的取值范围是(　　).

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,2)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,1)$

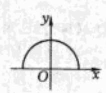
3. 直线 $y=x-m$ 和曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两交点,m 的范围是(　　).

A. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

B. $(0,\sqrt{2}]$

C. $(1,\sqrt{2}]$

D. $[1,\sqrt{2})$



4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上三点 A,B,C 的横坐标 x_1,x_2,x_3 成等差数列,F 为椭圆的左焦点,则 $|AF|,|BF|,|CF|$(　　).

A. 成等差数列

B. 成等比数列

C. 的倒数成等差数列

D. 的倒数成等比数列

5. 以抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 为圆心,以 p 为直径作圆,则该圆与抛物线(　　).

A. 公共点有且只有一个

B. 公共点有三个且横坐标都小于 $\frac{p}{2}$

C. 公共点有三个,其中两点横坐标大于 $\frac{p}{2}$

D. 均不对

6. 以椭圆 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的右焦点为圆心,且与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的渐近线相切的圆的方程为(　　).

A. $x^2+y^2-10x+9=0$

B. $x^2+y^2-10x-9=0$

C. $x^2+y^2+10x-9=0$

D. $x^2+y^2+10x+9=0$

7. 已知 AB 为经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的中心的弦,$F(c,0)$ 为椭圆的右焦点,则 $\triangle AFB$ 的面积的最大值为(　　).

A. b^2　　B. ab　　C. ac　　D. bc

8. 将抛物线 $y=4x^2$ 绕焦点逆时针方向旋转 90°后,所得抛物线的准线方程是(　　).

A. $x=2$　　B. $y=-2$

C. $x=\frac{1}{8}$　　D. $x=\frac{1}{16}$

9. 已知点 $A(3,6)$,曲线 C:$4x^2-9y^2-8x+18y-5=0$,则曲线上距离点 A 最近的点的坐标是(　　).

A. $\left(\frac{19\sqrt{13}}{13},\frac{11\sqrt{13}}{13}\right)$　B. $\left(\frac{1}{13},\frac{96}{13}\right)$

C. $\left(3,\frac{7}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{61}{13},\frac{45}{13}\right)$

10. 在抛物线 $y^2=4x$ 上有点 M,它到直线 $y=x$ 的距离为 $4\sqrt{2}$,如果点 M 的坐标为 (a,b),$a,b\in R^+$,则 $\frac{a}{b}$ 的值为(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

11. 关于 y 轴对称,又过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点且被直线 $y=x$ 分成两弧长为 1:2 的圆的方程(　　).

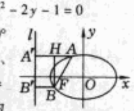
A. $x^2+y^2+2x-1=0$ 或 $x^2+y^2-2y-1=0$

B. $x^2+y^2+2y-1=0$ 或 $x^2+y^2-2y-1=0$

C. $x^2+y^2+4y-1=0$ 或 $x^2+y^2-4y-1=0$

D. $x^2+y^2-2y-2=0$ 或 $x^2+y^2-2y-1=0$

12. 过椭圆左焦点 F,倾斜角为 60°的直线交椭圆于 A、B 两点,A、F、B 从上到下排列,且 $|FA|=2|FB|$,则该椭圆的离心率为(　　).



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 抛物线 $y^2=-4x$ 关于直线 $x+y=2$ 对称的曲线顶点坐标为________.

14. 直线 $y=1-x$ 交椭圆 $mx^2+ny^2=1$ 于 M,N 两点,设弦 M、N 中点为 P,若 $k_{op}=\frac{\sqrt{2}}{2}$($O$ 为原点),则 $\frac{m}{n}=$________.

15. 直线 $y=x+3$ 与曲线 $\frac{y^2}{9}-\frac{x|x|}{4}=1$ 的公共点的个

数是________.

16. 给出如下四个命题:

①方程 $x^2+y^2-2x+1=0$ 表示的图形是圆;

②椭圆 $5x^2+9y^2-16x-16=0$ 的一条准线方程是 $x=-2$,另一条准线方程是 $x=\frac{18}{5}$;

③抛物线 $x=2y^2$ 的焦点坐标为 $\left(\frac{1}{8},0\right)$;

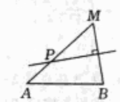
④双曲线 $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$ 的渐近线 $y=\pm\frac{5}{7}x$.

其中所有正确的命题序号是________.

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)如图所示,A、B 为两个定点,且 $|AB|=2\sqrt{3}$,动点 M 到 A 点的距离为 4,线段 MB 的垂直平分线 l 交 MA 于点 P,请你建立适当的坐标系.

(1)求点 P 的轨迹 C 的方程;



(2)设直线 $x-y+1=0$ 与曲线 C 交于 E、F 两点,O 为坐标原点,试求 $\triangle OEF$ 的面积.

18. (12 分)抛物线 C_1:$y=x^2+2ax+b$ 与 x 轴交于 A、B 两点,以 AB 为直径的圆为 C_2.

(1)求 C_2 的方程;

(2)为使 C_1 的顶点在 C_2 的内部,a,b 应满足什么条件?

19. (12 分)已知定点 $A(0,t)(t\neq 0)$,点 M 是抛物线 $y^2=x$ 上的一动点,A 点关于 M 点的对称点是 N.

(1)求点 N 的轨迹方程;

(2)设(1)中所求轨迹与抛物线 $y^2=x$ 交于 B、C 两点,则当 $AB\perp AC$ 时,求 t 的值.

20. (12 分)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右两焦点分别为 F_1、F_2;P 为双曲线左支上一点,P 到左准线的距离为 d,且 d、$|PF_1|$、$|PF_2|$ 成等比数列.

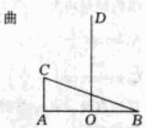
(1)若 $y=\sqrt{3}x$ 是已知双曲线的一条渐近线,求 P 点的坐标;

(2)求此双曲线离心率 e 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

如下图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle CAB=90°$,$AB=2$,$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$DO\perp AB$ 于 O 点,$OA=OB$,$DO=2$,曲线 E 过 C 点,动点 P 在 E 上运动,且保持 $|PA|+|PB|$ 的值不变.

(1)建立适当的坐标系,求曲线 E 的方程;



(2)过 D 点的直线 l 与曲线 E 相交于不同的两点 M、N,且 M 在 DN 之间,设 $\frac{DM}{MN}=\lambda$,求 λ 的取值范围.

22. (14 分)已知椭圆 C 的焦点和其对应的准线分别为坐标原点和直线 $x=-3$,椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆方程;

(2)判断在此椭圆上位于 y 轴左侧部分是否存在点 M,使得 M 点到该椭圆左准线的距离为点 M 到二焦点间距离的等比中项?若存在,求出 M 点坐标,若不存在,说明理由.

第九章 直线、平面、简单几何体测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 下列四个命题:

①空间有不共面的四个点 A,B,C,D,如果 $AB\perp CD$,$AD\perp BC$,则 $AC\perp BD$;

②若 a,b 是两条异面直线,P 为空间任意一点,则过 P 点有且只有一个平面与 a,b 都平行;

③若 α,β,γ 是三个不同的平面,a 表示直线,如果 $\alpha\cap\beta=a$,$\alpha\perp\gamma$,$\beta\perp\gamma$,则 $a\perp\gamma$;

④若 AB,CD 是异面直线,则 AC,BD 也一定是异面直线.

其中正确的命题的个数是(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2. 已知三条直线 m,n,l,三个平面 α,β,γ.下面四个命题中,正确的是(　　).

A.$\begin{cases}\alpha\perp\gamma\\\beta\perp\gamma\end{cases}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$　　B.$\begin{cases}m/\!/\beta\\l\perp m\end{cases}\Rightarrow l\perp\beta$

C.$\begin{cases}m/\!/\gamma\\n/\!/\gamma\end{cases}\Rightarrow m/\!/n$　　D.$\begin{cases}m\perp\gamma\\n\perp\gamma\end{cases}\Rightarrow m/\!/n$

3. P 是$\triangle ABC$ 所在平面外一点,由点 P 在此三角形所在平面上的射影是$\triangle ABC$ 垂心的充分必要条件是(　　).

A.$PA=PB=PC$

B.$PA\perp BC,PB\perp AC$

C.点 P 到$\triangle ABC$ 三边所在直线的距离相等

D.平面 PAB,平面 PBC,平面 PAC 与$\triangle ABC$ 所在的平面所成的二面角相等

4. 利用一个平面去截正方体,所得截面不可能是(　　).

A.六边形　　B.菱形

C.梯形　　D.直角三角形

5. 已知正四棱 $S\text{-}ABCD$ 中,侧棱长为$\sqrt{2}$,底面边长为$\sqrt{3}$,E 是 SA 的中点,那么异面直线 BE 与 SC 所成的角为(　　).

A.30°　　B.45°　　C.60°　　D.90°

6. 二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 为 60°,直线 $m\subset\alpha$,且直线 m 与 l 成 60°角,那么直线 m 与平面 β 所成角的正弦值为(　　).

A.$\frac{3}{4}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D.$\frac{1}{2}$

7. 已知过球面上三点 A,B,C 的截面与球心的距离为球半径的一半,且 $AB=BC=CA=2$,则这个球的表面积等于(　　).

A.$\frac{16\pi}{9}$　　B.$\frac{8\pi}{3}$　　C.4π　　D.$\frac{64\pi}{9}$

8. 已知正四面体 $A\text{-}BCD$,在侧面 ABC 上有一点 P,过点 P 在平面 ABC 上引直线与 CD 成 60°角,则这样的直线有(　　)条.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

9. 棱椎被平行于底面的平面所截,当截面分别平分棱锥的侧棱、侧面积、体积时,相应的截面面积分别为 S_1,S_2,S_3,则(　　).

A.$S_1<S_2<S_3$　　B.$S_3<S_2<S_1$

C.$S_2<S_1<S_3$　　D.$S_1<S_3<S_2$

10. $ABC\text{-}A'B'C'$ 是直三棱柱,$\angle ACB=90°$,$\angle ABC=\alpha$,$\angle BA'B'=\beta$,$\angle CB'C'=\gamma$,则 α,β,γ 的关系为(　　).

A.$\tan\beta=\cos\alpha\cdot\tan\gamma$　　B.$\tan\gamma=\cos\alpha\cdot\tan\beta$

C.$\cot\beta=\sin\alpha\cdot\tan\gamma$　　D.$\cot\gamma=\sin\alpha\cdot\tan\gamma$

11. 有三个球和一个正方体,第一个球与正方体各个面相切,第二个球与正方体的各条棱相切,第三个球的球面过正方体各顶点,则这三个球的球面积之比是(　　).

A.1:2:3　　B.$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

C.$1:2\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　D.1:4:9

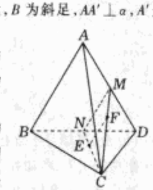
12. 若四面体一条棱长为 x,其余各条棱长都为 1,则这个四面体的体积最大时,x 的值为(　　).

A.$\sqrt{3}$　　B.2　　C.$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. AB 是平面α的一条斜线段,B 为斜足,$AA'\perp\alpha$,A'是垂足,$BC\subset\alpha$,若$\angle ABC=60°$,$\angle A'BC=45°$,则 AB 与平面 α 所成角的为________.



14. 如右图已知一正四面体的体积为 72,连接两个面的重心 E,F,则线段 EF 的长为________.

15. P,Q 在半径为 R 的球面上,它们球面距离是$\frac{1}{2}\pi R$,则在过 P,Q 的平面中,与球心的最大距离是________.

16. 若 E,F,G,H 分别为三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的 AB,BC,CD,DA 棱的中点,则三棱锥 $A\text{-}BCD$ 满足条件________时,四边形 $EFGH$ 是矩形(填上你认为正确的一种条件即可,不必考虑所有可能的情况).

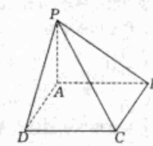
三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)已知在正四棱锥 $V\text{-}ABCD$ 中,底面边长是 a,P 为侧棱 VA 的中点.

(1)求证:$VC/\!/$平面 BDP;

(2)若 VC 与平面 BDP 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}a$,求该棱锥相邻两侧面所成二面角的大小.

18. (12 分)如图所示,PA 垂直边长为 4 的正方形 $ABCD$ 所在的平面,$PA=3$,试求:



(1)点 P 到 BC,BD 的距离;

(2)点 C 到平面 PBD 的距离.

19. (12 分)四边形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,$AD=AB$,$\angle BCD=45°$,$\angle BAD=90°$,将$\triangle ABD$ 沿对角线 BD 折起,记折起后点 A 的位置为 P,且使平面 $PBD\perp$平面 BCD.

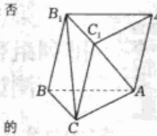
(1)求证:$CD\perp$平面 PBD;

(2)求证:平面 $PBC\perp$平面 PDC;

(3)求二面角 $P\text{-}BC\text{-}D$ 的大小.

20. (12 分)线段 AB 与平面α平行,平面 α 的斜线 A_1A,B_1B 与平面α所成的角分别是 30°,60°,且$\angle A_1AB=\angle B_1BA=90°$,$AB=a$,$A_1B_1=b(b>a)$,求 AB 与 α 的距离.

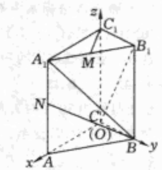
21. (12 分)(甲)已知斜三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的各棱长均为 2,侧棱与底面所成的角为$\frac{\pi}{3}$,且侧面 ABB_1A_1 垂直于底面.



(1)判断 B_1C 与 C_1A 是否垂直,并证明你的结论;

(2)求四棱锥 $B\text{-}ACC_1A_1$ 的体积.

(乙)如图所示,直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 底面 ABC 中 $CA=CB=1$,$\angle BCA=90°$,棱 $AA_1=2$.M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点.

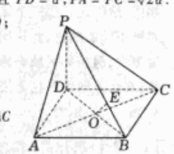


(1)求$\overrightarrow{BN}$的长;

(2)求 $\cos<\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}>$ 的值;

(3)求证 $A_1B\perp C_1M$.

22. (14 分)如图所示,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,边长 $AB=a$,且 $PD=a$,$PA=PC=\sqrt{2}a$.



(1)求证:$PD\perp$平面 $ABCD$;

(2)求异面直线 PB 与 AC 所成角的大小;

(3)求二面角 $A\text{-}PB\text{-}D$ 的大小;

(4)在这个四棱锥内放一个球,求球的最大半径.

第十章
排列组合和概率
测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

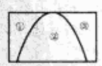
1. 在平面直角坐标系中有 6 个点,它们的坐标分别为 $(0,0),(1,2),(-1,-2),(2,4),(-2,-1),(2,1)$,则这 6 个点可确定不同三角形的个数为(　　).
A.14　B.15　C.16　D.20

2. 小王打算用 70 元购买面值分别为 20 元和 30 元的两种 IC 电话卡,若他至少买一张,则不同的买法一共有(　　).
A.5 种　B.6 种　C.7 种　D.8 种

3. 学校要选派 4 名爱好摄影的同学中的 3 名分别参加校外摄影小组的 3 期培训(每期只派 1 名),由于时间上的冲突,甲、乙两位同学都不能参加第 1 期培训,则不同的选派方式有(　　).
A.6 种　B.8 种　C.10 种　D.12 种

4. 某科技小组有 6 名同学,现从中选出 3 人去参观展览,至少有 1 名女生入选时的不同选法有 16 种,则小组中的女生数目是(　　).
A.2　B.3　C.4　D.5

5. 如图,给①、②、③三个区域分别涂上四种不同的颜色,允许同一种颜色使用多次,但相邻区域必须涂不同的颜色,那么不同的涂色方法种数为(　　).



A.36　B.32　C.24　D.12

6. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$ 展开式的第四项等于 7,则 x 等于(　　).
A.-5　B.$-\frac{1}{5}$　C.$\frac{1}{5}$　D.5

7. 某商场开展促销抽奖活动,摇奖器摇出的一组中奖号码是 8,2,5,3,7,1,参加抽奖的每位顾客从 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这十个号码中任意抽出六个组成一组,如果顾客抽出的六个号码中至少有五个与摇奖器摇出的号码相同(不计顺序)就可以得奖,一位顾客可能抽出的不同号码组共有 m 值,其中可以中奖的号码共有 n 组,则 $\frac{n}{m}$ 的值为(　　).
A.$\frac{1}{42}$　B.$\frac{1}{30}$　C.$\frac{4}{35}$　D.$\frac{5}{42}$

8. 在中山路上 A、B、C 三处设有交通灯,这三盏灯在一分钟内开放绿灯的时间分别为 25 秒、35 秒、45 秒,某辆车在中山路上行驶,则在三处都不停车的概率是(　　).
A.$\frac{25}{192}$　B.$\frac{35}{576}$
C.$\frac{25}{576}$　D.$\frac{35}{192}$

9. 某气象站天气预报的准确率为 80%,则 5 次预报中至少有 4 次准确的概率为(　　).
A.0.2　B.0.41
C.0.74　D.0.67

10. 袋中有大小相同的 4 只红球和 6 只白球,随机地从袋中取一只球,取出后不放回,那么恰好在第 5 次取完红球的概率为(　　).
A.$\frac{1}{210}$　B.$\frac{2}{105}$
C.$\frac{2}{21}$　D.$\frac{8}{21}$

11. 对某高中毕业班进行高考体检,全班学生均体检合格,那么
①每个学生的体重均超过 150 公斤
②每个学生的体重均超过 20 公斤
③半数学生的体重均超过 50 公斤
④$\frac{2}{3}$学生的体重均超过 45 公斤
以上四个事件中,概率为小于 1 的正数的事件有(　　).
A.①和②　B.②和③
C.③和④　D.②和④

12. 两人投一枚硬币,掷出正面者为胜,但这个硬币不太均匀,以致出现正面的概率 P_1 与出现反面的概率 P_2 不相等,已知出现正面与出现反面是两个对立的事件.设两人各掷一次成平局的概率为 P,则 P 与 $\frac{1}{2}$ 的大小关系是(　　).
A.$P<\frac{1}{2}$　B.$P>\frac{1}{2}$
C.$P=\frac{1}{2}$　D.不确定

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 有一密码为 $\boxed{6}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{8}$ 的手提保险箱,现在显示的号码为 $\boxed{0}\boxed{8}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{7}$,要打开箱子,至少需要经过旋转(每一个旋钮上转出一个新数字就为一步,逆转、顺转都可以)________步.

14. 已知 $(1-2x)^5$ 的二项展开式第 2 项不大于第 3 项,则 x 的范围是________.

15. 设有两台自动化机床,第一台在一小时内不需要工人照看的概率为 0.9,第二台在一小时内不需要工人照看的概率为 0.85,那么在一小时内两台机床都不需要工人照看的概率为________.

16. 已知每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%,混合 100 人的血清,则混合血清中有肝炎病毒的概率为________.

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)甲、乙二人各提一个装有卡片的提包,从中取出卡片来比胜负.甲的提包里装有号码为 1 的卡片 2 张,号码为 3 的卡片 1 张.乙的提包里装有号码为 1 的卡片 1 张,号码为 2 的卡片 2 张,甲、乙同时从自己的提包里每次取出卡片 1 张相比,取出的不再放回,直到二人取的卡片号码不相同时,号码大的一方为胜.求甲、乙两人分别获胜的概率.

18. (12 分)在袋里装 30 个小球,其中彩球有 n 个红色,5 个蓝球,10 个黄球,其余为白球,现在搅和以后,从袋里取出 3 个球都是相同颜色的彩球(无白色球)的概率是 $\frac{13}{406}$.若 $n\geq 2$,求:
(1)红球有几个?

(2)在 3 个球中至少有一个红球的概率.

19. (12 分)某学习小组有 8 个同学,从男生中选 2 人,女生中选 1 人,参加数学、物理、化学三科竞赛,要求每科均有 1 人参加,共有 180 种不同选法,那么该小组中男、女同学各有几人?

20. (12 分)如图所示,用 5 种不同颜色着色,相邻部分不能用同一种颜色,但同一种颜色可以反复使用,所有不同的涂色方法有多少种?

21. (12 分)某地区的年降水量,在 100 mm ~ 150 mm 范围内的概率是 0.12,在 150 mm ~ 200 mm 范围内的概率是 0.25,在 200 mm ~ 250 mm 范围内的概率是 0.16,在 250 mm ~ 300 mm 范围内的概率是 0.14.计算年降水量在 100 mm ~ 200 mm 范围内的概率与在 150 mm ~ 300 mm 范围内的概率.

22. (14 分)若 $(1+i)^{4m+2}$ 展开式中奇数项的和与 $(a-b)^m$ 展开式中含 b 的奇次幂项的系数和的差,恰等于 $(a+b)^{10}$ 展开式的二项式系数和.求证:$2^{6n-3}+3^{2n-1}$ 能被 m 整除($n,m\in\mathbf{N}$).

第十一章
概率与统计
测试题

满分:150分　　时间:120分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 下面关于离散型随机变量的期望与方差的结论错误的是(　　).
A.期望反映随机变量取值的平均水平,方差反映随机变量取值集中与离散的程度
B.期望和方差都是一个数值,它们不随试验的结果而变化
C.方差是一个非负数
D.期望是区间[0,1]上的一个数

2. 要了解一批产品的质量,从中抽取200个产品进行检测,则这200个产品的质量是(　　).
A.总体　　B.总体的一个样本
C.个体　　D.样本容量

3. 下列各表格中,只有(　　)是随机变量 ξ 的分布列.

A.

ξ	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

B.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

C.

ξ	-1	0	1	2
P	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$

D.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{3}{4}$	0	0	1

4. 已知 η 的分布列为:

η	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

,设 $\xi=3\eta-2$

则 $D\xi$ 的值为(　　).
A.5　　B.$\frac{4}{3}$　　C.$-\frac{2}{3}$　　D.-3

5. 某市政府在人大会上,要从农业、工业、教育系统的代表中抽查对政府工作报告的意见.为了更具代表性,抽样应采用(　　).
A.抽签法　　B.随机数表法
C.系统抽样法　　D.分层抽样法

6. 要从其中有50个红球的1000个球中采用分层抽样法抽取100个进行抽样分析,则应抽取红球的个数是(　　).
A.5个　　B.10个　　C.20个　　D.33个

7. 已知样本方差 $S^2=5.9$, $S=\sqrt{6}$,则样本容量 n 的值为(　　).
A.6　　B.600　　C.100　　D.60

8. 设 $\xi\sim B(n,p)$, $E\xi=12$, $D\xi=4$,则 n,p 的值分别为(　　).
A.$18,\frac{1}{3}$　　B.$36,\frac{1}{3}$　　C.$\frac{2}{3},36$　　D.$18,\frac{2}{3}$

9. 设随机变量 $\xi\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$,又 $\eta=5\xi$,则 E_η 和 D_η 的值分别是(　　).
A.$\frac{25}{2},\frac{25}{4}$　　B.$\frac{5}{2},\frac{5}{4}$
C.$\frac{25}{2},\frac{125}{4}$　　D.$\frac{25}{4},\frac{125}{4}$

10. 设随机复量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{k}{15}$,其中 $k=1,2,3,4,5$,则 $P\left(\frac{1}{2}<\xi<\frac{5}{2}\right)$ 等于(　　).
A.$\frac{1}{5}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{9}$　　D.$\frac{1}{6}$

11. 工人月工资(元)依劳动生产率(千元)变化的回归方程为 $y=50+80x$.下列判断正确的是(　　).
①劳动生产率为1000元时,工资为130元
②劳动生产率提高1000元则工资提高80元
③劳动生产率提高1000元则工资提高130元
④当月工资为210元时,劳动生产率为2000元
A.①　　B.②　　C.③　　D.④

12. 将容量为100的样本数据,按从小到大的顺序分为8个组,如下表:

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
频数	10	13	14	14	15	13	12	9

第3组的频率和累积频率分别是(　　).
A.0.14和0.37　　B.$\frac{1}{14}$和$\frac{1}{37}$
C.0.03和0.06　　D.$\frac{3}{14}$和$\frac{6}{37}$

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分)

13. 从总体中抽取一个样本:3、4、5、6、7,则 $S^*=$______.

14. 已知随机变量 ξ 等可能取值 $1,2\cdots n$,如果 $P(\xi<4)=0.3$,那么 $n=$______.

15. 已知连续型随机变量 ξ 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\\ x-\frac{1}{2}, & 1<x\leqslant 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

,则 $P(\xi\leqslant 2)$ 等于______.

16. 某工厂规定:工人只要生产出一件甲级产品发奖金50元,生产出一件乙级产品发奖金30元,若生产出一件次品则扣款20元,某工人生产甲级品的概率为0.6,乙级品的概率为0.3,次品的概率为0.1,则此人生产一件产品的平均奖金是______元.

三、解答题(本大题共6小题,总分74分)

17. (12分)某班有50位同学,现要从中选取7人,若采用系统抽样的方法来选取,求每位同学被选取的概率.

18. (12分)精制食盐每袋的质量是随机变量,期望值为500 g,标准差为5 g,求装有50袋这种食盐的一箱总质量(不含箱子的质量)的数学期望与标准差.

19. (12分)某单位为了寻找高产稳定的油菜品种,选了三个不同的油菜品种进行试验,每一品种在五块试验田上试种,每块试验田的面积为0.7公顷,产量情况如下表,试评定哪一个品种既高产又稳定?

品种＼试验田	1	2	3	4	5
甲	21.5	20.4	22.0	21.2	19.9
乙	21.3	23.6	18.9	21.4	19.8
丙	17.8	23.3	21.4	19.1	20.9

20. (12分)将有编号为1,2,3,4的贺卡随意地送给编号为1,2,3,4的四个老师,要求每个老师都得到一张贺卡,记与贺卡编号相同的老师的个数为 ξ.
(1)求随机变量 ξ 的概率分布列;

(2)求 ξ 的数学期望.

21. (13分)有 A、B 两种钢筋,从中各取等量样品检查它们的抗拉强度指标如下:

ξ_A	110	120	125	130	135
P_A	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2
ξ_B	100	115	125	130	145
P_B	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2

其中 ξ_A、ξ_B 分别表示 A、B 两种钢筋的抗拉强度,在使用时要求钢筋的抗拉强度不低于120,试比较 A、B 两种钢筋哪一种质量较好?

22. (13分)某县农民平均收入服从 $\mu=500$ 元,$\sigma=20$ 元的正态分布,求:
(1)此县农民年均收入在500元~520元间人数的百分比;

(2)如果要使农民的年均收入在 $(\mu-a,\mu+a)$ 内的概率不小于0.95,则 a 至少为多大?
[$\varphi(1.96)=0.975$, $\varphi(0)=0.5$, $\varphi(1)=0.8413$]

第十二章
极 限
测试题

满分:150分　　时间:120分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 等比数列$\{a_n\}$首项$a_1=-1$,前n项和S_n,若$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$等于(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. 2　　D. -2

2. 数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}[(2n-1)a_n]=2$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)$等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. 1　　D. 不存在

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1>1$,且前n项和S_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_1}$,那么$a_1$的取值范围是(　　).

A. $(1,+\infty)$　　B. $(1,\sqrt{2})$

C. $(1,2)$　　D. $(1,4)$

4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{|1-x|}$等于(　　).

A. 0　　B. -1

C. 1　　D. 不存在

5. 若$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+3}{x^3+3}=2$,则$a$的值为(　　).

A. 4　　B. 2

C. 3　　D. 0

6. 已知$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是公差不为0的等差数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=2$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n\cdot b_{2n}}$的值为(　　).

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

7. 下列各式不正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+2x-3}{6x^3-x+1}=\frac{7}{6}$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\sqrt{x+5}}{x-3}=0$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{4x^2+x}=\frac{3}{4}$

D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cos\frac{1}{x}+\frac{\sin}{x}\right)=$(　　).

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 不存在

9. 设$ab\neq0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{cx+a}{ax+b}=\frac{1}{3}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{bx^2-c}=\frac{3}{4}$,则$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx-c}{bx^3-cx^2+a}$的值为(　　).

A. 不存在　　B. 4

C. $\frac{1}{4}$　　D. 视a、b、c的值而变化

10. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=$(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$的值为(　　).

A. 不存在　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 0

12. 设$S_n=(a+b)+(a^2+ab+b^2)+\cdots+(a^n-a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n)$,若$a=-\frac{1}{2}$,$b=-\frac{1}{3}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$等于(　　).

A. $-\frac{5}{6}$　　B. $-\frac{2}{5}$

C. 1　　D. $-\frac{1}{2}$

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分)

13. 已知等差数列$\{a_n\}$$\{b_n\}$的前$n$项和分别为$S_n$、$T_n$,且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{3n+2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=$______.

14. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和公式是$S_n=n^2+2n$,令$T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ia_{i+1}}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=$______.

15. 极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=$______.

16. 下列命题:①若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=a\cdot b$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$;②$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a_n+\cdots a_n)=$

na;③若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$;④$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^m=a^m(m\in\mathbf{N}^*)$,其中不正确命题的序号为______.

三、解答题(本大题共6小题,总分74分)

17. (12分)求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan2x}{\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

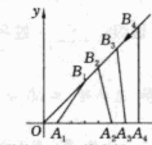
18. (12分)已知$a>0$,讨论$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$.

19. (12分)设正数数列$\{a_n\}$为一等比数列,且$a_2=4$,$a_4=16$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg a_{n+1}+\lg a_{n+2}+\cdots+\lg a_{2n}}{n^2}$.

20. (12分)已知等差数列$\{a_n\}$的公差不等于0,它的前n项和为S_n,等比数列$\{b_n\}$的前n项和为B_n,其公式比$|q|>1$,试求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{na_n}+\frac{B_n}{b_n}\right)$的值.

21. (12分)已知P、Q是圆$x^2+y^2=r^2$与y轴和抛物线$y^2=x$在x轴上方的交点,直线PQ交x轴于M点,当半径r趋近于0时,求M点的极限位置.

22. (14分)如图所示,点$A_1A_2,\cdots,A_n$依次在x轴上,点$A_1(1,0)$,$A_2(5,0)$,$A_nA_{n+1}=\frac{1}{2}A_{n-1}A_n(n\in\mathbf{N}$且$n\geqslant2)$;点$B_1,B_2,\cdots,B_n$依次在射线$y=x(x\geqslant0)$上,且$B_1(3,3)$,$OB_n=OB_{n-1}+2\sqrt{2}(n\in\mathbf{N}$且$n\geqslant2)$,$O$为原点.



(1)用n表示点A_n、B_n的坐标;

(2)设直线A_nB_n的斜率为k_n,求$\lim\limits_{n\to\infty}k_n$;

(3)设四边形$A_nA_{n+1}B_{n+1}B_n$的面积为S_n,求证:$9<S_n<12$.

第十三章 导 数 测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. $y=\frac{\cos x}{x}$的导数是(　　).

A. $\frac{\cos x}{x}$

B. $-\frac{\sin x}{x^2}$

C. $-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$

D. $-\frac{x\sin x+\cos x}{x}$

2. 质点作直线运动的方程是 $S=\sqrt[4]{t}$,则质点在 $t=3$ 时的速度是(　　).

A. $\frac{1}{4\sqrt[4]{3^3}}$　　B. $\frac{1}{4\sqrt[3]{3^4}}$

C. $\frac{1}{2\sqrt[3]{3^4}}$　　D. $\frac{1}{3\sqrt[4]{4^3}}$

3. $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导,用 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$,则 $f'(x_0)=$(　　).

A. 1　　B. 0　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

4. 已知 $y=\log_3\frac{1}{x}$,则 y'是(　　).

A. x　　B. $x\log_3 e$

C. $\frac{\log_3 e}{x}$　　D. $-\frac{\log_3 e}{x}$

5. 设 $y=f(\sin x)$是可导函数,则 $y'=$(　　).

A. $f'(\sin x)$

B. $f'(\sin x)\cos x$

C. $f'(\sin x)\sin x$

D. $f'(\cos x)\cos x$

6. $y=e^{2x}+e^{-x}$的导数是(　　).

A. $2e^{2x}-e^x$

B. $2e^{2x}+e^x$

C. $2e^{2x}-e^{-x}$

D. $2e^{2x}+e^{-x}$

7. 函数 $y=1+3x-x^3$ 有(　　).

A. 极小值 -1,极大值 1

B. 极小值 -2,极大值 3

C. 极小值 -2,极大值 2

D. 极小值 -1,极大值 3

8. 已知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=A$,则 $f'(x_0)=$(　　).

A. 等于 A　　B. 等于 $\frac{A}{3}$

C. 等于 $3A$　　D. 可能不存在

9. 设 $f(x)=(2m-1)^2+\sqrt{x+1}$,则 $f'(1)=$(　　).

A. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

C. $4(2m-1)-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

D. $4(2m-1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}$

10. $y=f(x)=2x^3-3x^2+a$ 的极大值为 6,那么 a 等于(　　).

A. 6　　B. 0　　C. 5　　D. 1

11. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7$ 在$[1,4]$上的最小值为(　　).

A. -6　　B. -51　　C. -56　　D. -61

12. 函数 $y=\sin\theta\cdot\cos^2\theta,0<\theta<\frac{\pi}{2}$的最大值为(　　).

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

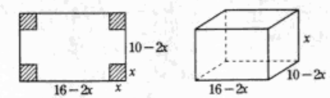
二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 质点运动方程 $s=\sqrt{3}t^3+2t^2+t$,那么质点运动的加

速度为________.

14. 函数 $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$,在 $x=1$ 时有极值 10,那么 a,b 的值为________.

15. 从边长为 10 cm × 16 cm 的矩形纸板的 4 角,截去 4 个相同的小正方形,作成 1 个无盖的盒子,那么盒子容积的最大值为________.



16. 球直径为 d,当其内接正四棱柱体积最大时的高为________.

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)求下列函数的导数.

(1) $y=\cos\frac{\pi}{3}$;

(2) $y=e^2$;

(3) $y=\frac{1}{x^4}$;

(4) $y=\sqrt[5]{x^2}$.

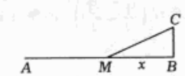
18. (12 分)已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+2bx$ 在点 $x=1$ 处有极小值 -1,试确定 a,b 的值,并求出 $f(x)$的单调区间.

19. (12 分)设 $a>0$,(1)证明 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$取极大值和极小值的点各有一个;

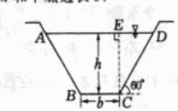
(2)当极大值为 1,极小值为 -1 时,求 a、b 的值.

20. (12 分)过曲线 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\geq 0,y\geq 0)$上一点引切线,设此切线夹在两坐标轴间的线段长为 l,求 l 取得最小值时切点的坐标及 l 的最小值.

21. (12 分)如图所示,设铁路 $AB=50$,B、C 之间距离为 10,现将货物从 A 运往 C.已知单位距离铁路费用为 2,公路费用为 4,问在 AB 上何处修筑公路至 C,使运费由 A 至 C 最省.



22. (14 分)1 条水渠,断面为等腰梯形,如图所示,确定断面尺寸时,希望在断面 $ABCD$ 的面积为定值 S 时,使得湿周 $\varphi=AB+BC+CD$ 最小,这样可使水流阻力小,渗透少.求此时高 h 和下底边长 b.



第十四章
数系的扩充——复数
测试题

满分:150 分　　时间:120 分钟

学号:______　班级:______　姓名:______

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确的)

1. 计算$\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^{100}$的结果是(　　).

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. -1

2. $x,y\in\mathbf{R}$,且$\frac{x}{1-i}-\frac{y}{1-2i}=\frac{5}{1-3i}$则 $xy=$(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

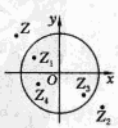
3. 方程 $x^2+x+m=0$ 有两个正根 α、β 且$|\alpha-\beta|=3$,则实数 m 的值为(　　).

A. $\frac{5}{2}$　　B. $-\frac{5}{2}$　　C. 2　　D. 2

4. 在$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$的展开式中所有奇数项的和等于(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. i

5. 如图⊙O 为复平面上单位圆,当 Z 表示复数且点 Z 在圆 O 外,若点 Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 这四点中有一个点表示复数$\frac{1}{Z}$,则这个点是(　　).



A. Z_1　　B. Z_2　　C. Z_3　　D. Z_4

6. 已知复数 $Z+3$,对应点在射线 $y=-x(x\leqslant 0)$上,则$\frac{1}{|Z+6|+|Z-3i|}$的最大值是(　　).

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{15}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

7. 如果复数 Z 满足$|Z+1-i|=2$,那么$|Z-2+i|$的最大值是(　　).

A. 5　　B. $2+\sqrt{13}$

C. $\sqrt{13}-2$　　D. $\sqrt{13}+4$

8. $Z_1=1+i$. $Z_2=-1+i$,则 $Z=\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)^{-1}$的值为(　　).

A. $-i$　　B. i　　C. 1　　D. -1

9. 设 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,则$(1-\omega+\omega^2)\cdot(1+\omega-\omega^2)$的值是(　　).

A. 4　　B. ω　　C. ω^2　　D. 1

10. 若 $z_1+z_2=\sqrt{2}$, $z_1\cdot z_2=1$,则 $z_1^{22}-z_2^{22}$ 的值为(　　).

A. 0　　B. 2i　　C. $-2i$　　D. $\pm 2i$

11. 集合 $A=\{z\mid |z+5i|-|z-5i|=6\}$, $B=\{z\mid |z|\cdot|z|=9\}$其中 $z\in C$,则 $A\cap B$ 中元素的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

12. 曲线方程 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 的复数形式是(　　).

A. $|z+1+i|=1$

B. $|z-1-i|=1$

C. $|z-1+i|=1$

D. $|z+1-i|=1$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 已知 $z=(1+i)(1-\sqrt{3}i)^3$,则 $z\cdot\bar{z}$ __________.

14. 设 $z=\frac{(4-3i)^4(\sqrt{3}+i)^6}{(1-i)^{10}}$,则$|z|=$ __________.

15. 已知复数 z_1、z_2 满足条件$|z_1|=|z_2|=1$,且 $z_1+z_2=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$,则 $z_1\cdot z_2=$ __________.

16. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a、b、c\in\mathbf{C})$有:

①$b^2=4ac$ 时,方程有两个根;

②$b^2-4ac<0$ 时,方程有两个不等虚根;

③当方程有两根 α、β 时,

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta);$$

④当方程有两个等虚根 α、β 时,$|\alpha|^2=|\beta|^2=\alpha\beta$;

⑤当 a、b、$c\in\mathbf{R}$ 时,方程有两实根 α、β,$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$.

其中正确的序号是__________.

三、解答题(本大题共 6 小题,总分 74 分)

17. (12 分)已知虚数 z 满足 $z^3=8$,求 z^2+2z+3 的值.

18. (12 分)已知复数 $z_1=m+i(4-m^2)(m\in\mathbf{R})$和 $z_2=2\cos\theta+i(\lambda+3\sin\theta)(\lambda\in\mathbf{R},\theta\in\mathbf{R})$.若 $z_1=z_2$,

求证:$-\frac{9}{16}\leqslant\lambda\leqslant 7$.

19. (12 分)若复数 $m=z+\frac{1}{z}(|z|\neq 1, z$ 是虚数)满足 $m^2+2am+3=0$,试求实数 a 的取值范围.

20. (12 分)已知 $z=\frac{a-i}{1-i}(a>0)$,且复数 $\omega=z(z+i)$的虚部减去它的实部所得的差等于$\frac{3}{2}$,求复数 ω 的模.

21. (12 分)设 $\omega=z+\frac{1}{z}$, $\omega\in\mathbf{R}$,其中 z 为虚数,且 $-1<\omega<2$.

(1)求$|z|$的值及 z 的实部的取值范围;

(2)设 $\mu=\frac{1-z}{1+z}$,求证:μ 为纯虚数;

(3)求 $\omega-\mu^2$ 的最小值.

22. (14 分)已知复数 z_1、z_2 满足$|z_1|<2$, $|z_2|<2$,且 $z_1+z_2=-\frac{1}{m}$, $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=\frac{1}{m}$,其中 $m\in\mathbf{R}$, $m\neq 0$,求 m 的取值范围.

参考答案及提示

第一章

1. B　由符号“∈”、“⊆”分别表示元素与集合、集合与集合之间的关系排除 A、D. 又 $2\sqrt{3}>3$ 排除 C,选 B.
2. C　$x\in A\cup B$ 等价于 $x\in A$ 或 $x\in B$,则非 P 为 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,选 C.
3. B　$P\cap Q$ 只有一个子集,则 $P\cap Q=\varnothing$. 又 $y=a^x+1$ 中 $y>1$. 故 $k\leqslant 1$ 时,$P\cap Q=\varnothing$,故选 B.
4. B　若 $B=C$,则 $A\cap B=A\cap C$. 反之,若 $B=\{1,2\}$, $C=\{3,4\}$, $A=\{0\}$,则 $A\cap B=A\cap C$. 但 $B\neq C$,故选 B.
5. B　$\frac{1}{x}<1$. 则 $\frac{1-x}{x}<0$. ∴　$x>1$ 或 $x<0$.

∴　$x>1\Rightarrow\frac{1}{x}<1$. 但 $\frac{1}{x}<1\not\Rightarrow x>1$,故选 B.

6. A　命题 p 为假命题,命题 q 为真命题,故 p 或 q 为真,选 A.
7. A　$1\leqslant|2x-1|<2\Rightarrow 1\leqslant 2x-1<2$ 或 $-2<2x-1\leqslant-1$,即 $1\leqslant x<\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<x\leqslant 0$,故选 A.
8. B　设 $f(x)=x^2-x-(m+1)$, $\Delta=4m+5\geqslant 0$

∴　$m\geqslant-\frac{5}{4}$ 时 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有解,

则 $f(-1)\cdot f(1)\leqslant 0$.　∴　$-1\leqslant m\leqslant 1$,且 $m\geqslant-\frac{5}{4}$.

故选 B.

9. B　阴影部分在 $B\cap C$ 内,而不在 A 内.

∴　是 $(C_SA)\cap(B\cap C)$,选 B.

10. B　不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|0<\alpha<x<\beta\}$,则 $a<0$,且 α、β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根

∴　$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,　$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

∴　$b=-a(\alpha+\beta)$, $c=a\alpha\beta$.

∴　$cx^2-bx+a>0$ 变为:

$a\alpha\beta x^2+a(\alpha+\beta)x+a>0$

∵　$a>0$.

∴　$\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$. 又 $0<\alpha<\beta$, $\alpha\beta>0$

∴　$\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$　∴　$-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$

∴　$-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$,故选 B.

11. A　$M-(M-P)=\{x|x\in M$ 且 $x\notin M\cap P\}$

又 $M-P=\{x|x\in M$ 且 $x\notin P\}$

∴　$x\notin M-P$. 则 $x\in P$. 故选 A.

12. C　$|x+2|+|x-1|\geqslant 3$.

故 $|x+2|+|x-1|<a$ 无解,则 $a\leqslant 3$,故选 C.

13. -3　集合 A、B 可分别看作直线上点的集合. 若 $A\cap B=\varnothing$,则知两直线平行且不重合,故 $\frac{a^2}{3}=\frac{3}{1}$,即

$a=\pm 3$,而 $a=3$ 时重合,故 $a=-3$.

说明:本题综合了集合中元素的特点与几何图形的联系,并考查了直线间关系易错点,求出 a 值后再验证答案.

14. 四个命题的真命题的个数为 4 个,2 个或 0 个,而原命题及其逆命题为真. 故真命题共有 2 个.
15. 非 $A\Rightarrow B$,则它的逆否命题是非 $B\Rightarrow A$,即 A 是非 B 成立的必要非充分条件.
16. p 或 q 为真,p 且 q 为假. 则 p 真 q 假,p 假 q 真. 又若 p 为真命题:$m<1$. 若 q 为真命题:$5-2m>1$. $m<2$

∴　p 真 q 假,则 $\begin{cases}m<1\\m\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing$

p 假 q 真,则 $\begin{cases}m\geqslant 1\\m<2\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant m<2$.

∴　m 的取值范围是 $1\leqslant m<2$.

17. 若 $\begin{cases}\alpha>2\\\beta>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta>4\\\alpha\beta+4\end{cases}$

故 $\alpha+\beta>4\alpha\beta>4$ 是 $\begin{cases}\alpha>2\\\beta>2\end{cases}$ 的必要条件.

若 $\alpha=1$, $\beta=5$ 满足 $\begin{cases}\alpha+\beta>4\\\alpha\beta>4\end{cases}$,但不满足 $\begin{cases}\alpha>2\\\beta>2\end{cases}$,故不具备充分性.

∴　$\begin{cases}\alpha+\beta>4\\\alpha\beta>4\end{cases}$ 是 $\begin{cases}\alpha>2\\\beta>2\end{cases}$ 的必要非充分条件.

18. 当 $m=-1$ 时,不等式化为 $-4x+1<0$ 解为 $x>\frac{1}{4}$,

当 $m+1>0$,即 $m>-1$ 时,由 $\Delta=4^2-4(m+1)>0$,得 $m<3$.

故当 $-1<m<3$ 时,解为

$$\frac{2-\sqrt{3-m}}{m+1}<x<\frac{2+\sqrt{3-m}}{m+1}$$

当 $m=3$ 时,不等式为:$(2x-1)^2<0$,无解

当 $m<-1$ 时,不等式为:$x^2-\frac{4}{m+1}x+\frac{1}{m+1}>0$

解为 $x>\frac{2-\sqrt{3-m}}{m+1}$ 或 $x<\frac{2+\sqrt{3-m}}{m+1}$.

所以不等式解集为:当 $m\geqslant 3$ 时,$x\in\varnothing$;

当 $-1<m<3$ 时,解集为

$\left\{x\left|\frac{2-\sqrt{3-m}}{m+1}<x<\frac{2+\sqrt{3-m}}{m+1}\right.\right\}$;

当 $m=-1$ 时,解集为 $\left\{x\left|x>-\frac{1}{4}\right.\right\}$;

当 $m<-1$ 时,解集为

$\left\{x\left|x>\frac{2-\sqrt{3-m}}{m+1}\text{或}x<\frac{2+\sqrt{3-m}}{m+1}\right.\right\}$

19. $A\cap B=B$. 则 $B\subseteq A$.

又 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$

1° 若 $B=\varnothing$. 则 $\Delta=16-4p\leqslant 0$. 则 $p\geqslant 4$. 满足 $B\subseteq A$

2° 若 $B\neq\varnothing$. 由于 $f(x)=x^2+4x+p$ 的对称轴 $x=-2<-1$. 要使 $B\subseteq A$,则 $\begin{cases}\Delta=16-4p>0\\f(-1)=-3+p\geqslant 0\end{cases}$

∴　$3\leqslant p<4$. 综合 1°,2°可得　$p\geqslant 3$.

20. 先求线段 AB 的解析式为 $y=-x+3(0\leqslant x\leqslant 3)$,再结合一元二次方程根的问题来解决.

线段 AB 的解析式为

$$y=-x+3\ (0\leqslant x\leqslant 3),\qquad ①$$

抛物线　　　$y=-x^2+mx-1$.　　　②

①代入②,得　$-x^2+mx-1=-x+3$,

即　$x^2+(-1-m)x+4=0\ (0\leqslant x\leqslant 3)$.　　③

抛物线 $y=-x^2+mx-1$ 与线段 AB 有两个不同交点,等价于方程③在 $[0,3]$ 上有两个不同的解.

设 $y=x^2+(-1-m)x+4$,则当 $x=0,3$ 时,$y\geqslant 0$,

∴　$\begin{cases}9-3-3m+4\geqslant 0,\\\Delta=(-1-m)^2-4\times 4>0,\\0<-\frac{-1-m}{2}<3.\end{cases}$

解得 $3<m\leqslant\frac{10}{3}$.

∴　抛物线与线段 AB 有两个不同交点的充要条件是 $3<m\leqslant\frac{10}{3}$.

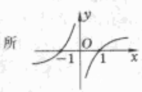
21. (1)∵　$2\in S$,　∴　$\frac{1}{1-2}=-1\in S$

∴　$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in S$,即 S 中必存在 -1 和 $\frac{1}{2}$ 这两个元素.

(2)若 S 中有且仅有一个元素 a,则 $\frac{1}{1-a}\in S$. 从而有 $a=\frac{1}{1-a}$,即　$a^2-a+1=0$,又 $a^2-a+1=0$ 无实解.

∴　S 中不能仅有一个元素.

22. 由题意,画出示意图如右图所示.



由 $f(x)<0$ 可得

$x<-1$ 或 $0<x<1$.

∴　$M\cap N=\{k|g(x)<0,k\in\mathbf{R}\}$

$\cap\{k|g(x)<-1$ 或 $0<g(x)<1,k\in\mathbf{R}\}$

$=\{k|g(x)<-1,k\in\mathbf{R}\}$

$g(x)=\sin^2x+k\cos x-2k<-1$

即　$\cos^2x-k\cos x+2k-2>0$

∴　$(\cos x-2)k<\cos^2x-2$

又 $\cos x-2<0$

∴　$k>\frac{\cos^2x-2}{\cos x-2}=\cos x-2+\frac{2}{\cos x-2}+4$

又　$\cos x-2+\frac{2}{\cos x-2}+4$

$=4-(2-\cos x+\frac{2}{2-\cos x})$

$\leqslant 4-2\sqrt{2}$

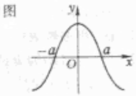
∴　$k>4-2\sqrt{2}$.　即　$M\cap N=\{k|k>4-2\sqrt{2}\}$

第二章

1. A　由 $f(-1)=0$,得 $a=-1$, $f(x)=x^3+1$

设 $f^{-1}(1)=b$,则 $f(b)=1$,　∴　$b^3+1=1$, $b=0$

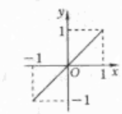
2. D　不妨设满足条件的函数的图像如右图.



易知 $\begin{cases}x>0\\f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\f(x)<0\end{cases}$ 的解集为 D.

3. A　由 $y=\lg x$ 的图像 $\xrightarrow[\text{变换}]{\text{对称}}y=\lg(-x)$ 的图像 $\xrightarrow[\text{向右平移一个单位}]{\text{平移变换}}y=\lg[-(x-1)]\xrightarrow{\text{对称变换}}y=|\lg(1-x)|$ 的图像.
4. D　可举特例并画出图形来分析,构造 $f(x)=x$, $x\in[-1,1]$,显然满足 $f(x)$ 为奇函数,在 $(-1,0)$ 上是增函数,至于条件 $f(x+2)=-f(x)$,可这样用,取 $x=-\frac{1}{2}$ 得

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$.



由右图知

$f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)$,

即　$f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f(1)$.

故选 D.

5. C　$f(-3)=f(-3+2)=f(-1)=f(-1+2)=f(1)$ $=f(1+2)=f(3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$
6. C　$f^{-1}(x)$ 的图像关于点 $(-1,3)$ 对称,则 $f(x)$ 的图像关于点 $(3,-1)$ 对称,且 $f(x)=-1+\frac{1}{x-a-1}$.

∴　$a+1=3$, $a=2$

7. B　$f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ 在 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 上为减函数

∴　$f(x)\geqslant f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$

8. C　$f(x+1)$ 的偶函数,则 $f(1-x)=f(1+x)$. 即 $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称.

∴　$f(x)=f(2-x)$

设 $x>1$,则 $2-x<1$,

∴　$f(x)=f(2-x)=(2-x)^2+1=x^2-4x+5$.

9. D　$f(x)=|\lg x|$ 在 $(0,1)$ 上为减函数,在 $[1,+\infty)$ 上为增函数,由题意知,$0<a<1$, $c>1$,由 $f(a)>f(c)$,则 $\lg\frac{1}{a}>\lg c$.

∴　$\frac{1}{a}>c$　∴　$ac<1$.

10. B　令 $\lg x=t$,则方程 $t^2-2at+2-a=0$ 有两个均大于零的根

则 $\begin{cases}\Delta=4a^2-4(2-a)\geqslant 0\\t_1+t_2=2a>0\\t_1\cdot t_2=2-a>0\end{cases}$　∴　$1\leqslant a<1$

11. B　在同一坐标系下分别作出函数 $y=\sqrt{x+a}$ 和 $y=x$,显然　$m=-a$, $n-m=2a$

$\therefore \quad n=a$，则点 (a,a) 在曲线 $y=\sqrt{x+a}$ 上 $(a>0)$，$a=2$.

12. D　由图像观察可知①②⑤正确，③④不正确.

13. 1　由 $f(x)$ 为奇函数.　$\therefore \quad f(-1)=-f(1)$.
又 $y=f(x)$ 的图像关于 $x=2$ 对称，
$\therefore \quad f(1)=f(3)=3^2-6\cdot 3+8=-1$.
$\therefore \quad f(-1)=1$

14. 14　$\because \quad f(1+x)=f(1-x)$.
$\therefore \quad f(x)=f(2-x)$;　$f(8+x)=f(8-x)$.
则　$f(x)=f(16-x)$.
$\therefore \quad f(2-x)=f(16-x)$.
即　$f(x)=f(x+14)$

15. $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$　①当 $a>1$ 时，在 $x\in[-2,2]$ 时，$a^{-2}\leqslant a^x\leqslant a^2<2$，则 $a<\sqrt{2}$，故 $1<a<\sqrt{2}$.
②当 $0<a<1$，则在 $x\in[-2,2]$ 时，
$$a^2\leqslant a^x\leqslant a^{-2}<2$$
$\therefore \quad a>\frac{\sqrt{2}}{2}$　即 $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$
$\therefore \quad a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)\cup(1,\sqrt{2})$;
$\log_2 a\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

16. 1　当 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)\cdot g(x)$ 有最小值，此时
$$f(x)\cdot g(x)=(3-x)\sqrt{2x-3}$$
$$=\sqrt{(3-x)^2(2x-3)}$$
$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{3-x+3-x+2x-3}{3}\right)^3}=1.$$

17. (1)令 $x=y=1$，则 $f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)-f(1)$，$\therefore f(1)=0$.
(2)$f(4)=1$，$f\left(\frac{16}{4}\right)=f(16)-f(4)$
$\therefore \quad f(16)=2f(4)=2$.
$\therefore \quad f(x+6)-f\left(\frac{1}{x}\right)>f(16)$
即　$f(x(x+6))>f(16)$
故原不等式等价于 $\begin{cases}\frac{1}{x}>0\\ x+6>0\\ x(x+6)<16\end{cases}\Rightarrow 0<x<2$

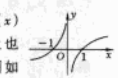
18. (1)$\because \quad f(x)$ 为奇函数，　$\therefore \quad f(-x)=-f(x)$，
即 $\frac{ax^2+1}{-bx+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$.　$\therefore \quad c=0$
$f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}$，　$f(1)=\frac{a+1}{b}=2$.
$\therefore \quad a=2b-1$，$f(2)=\frac{4a+1}{2b}<3$，$0<b<\frac{3}{2}$　$(b\in\mathbf{Z})$
$\therefore \quad b=1$，$a=1$，$f(x)=x+\frac{1}{x}$.
(2)略.

19. $f(x)=-4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-4a$

1° 当 $\frac{a}{2}\in[0,1]$ 即 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时：
$f(x)_{\max}=-4a=-5$，　$\therefore \quad a=\frac{5}{4}\in[0,2]$;
2° 当 $\frac{a}{2}<0$ 即 $a<0$ 时，$f(x)_{\max}=f(0)=-4a-a^2=-5$
即 $a^2+4a-5=0$，　$\therefore \quad a=-5$ 或 $a=1$(舍)；
3° 当 $\frac{a}{2}>1$，而 $a>2$ 时，
$f(x)_{\max}=f(1)=-4+4a-4a-a^2=-5$，
$\therefore \quad a^2+1=0$ 无解.
综合 1°，2°，3°可得 $a=\frac{5}{4}$ 或 $a=-5$.

20. (1)设每件产品的新单价是 x 元.
由已知，该产品的成本是 $2000\times 60\%=1200$(元).
由题意：$x\cdot 80\%-1200=20\%\cdot 80\%\cdot x$
解得 $x=1875$(元).$\therefore 80\%\cdot x=1500$(元).
所以，该产品调价后的新单价是每件 1875 元，让利后的实际销售价是每件 1500 元.
(2)设全年至少应销售这种电子产品 m 件，则由题意，
$$m(1500-1200)\geqslant 200000，解得\ m\geqslant 666\frac{2}{3}.$$
$\because \quad m\in\mathbf{N}$，　$\therefore \quad m$ 的最小值应为 667(件).
所以，全年至少售出 667 件，才能使利润总额不低于 20 万元.

21. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也为增函数. $f(-1)=0$. 画出示意图如右图所示.



由图可知：$f(x)>0$，则 $x>1$，或 $-1<x<0$. 故不等式 $f[1+\log_a(1-x^2)]>0$，可变形为：
$1+\log_a(1-x^2)>1$ 或 $-1<1+\log_a(1-x^2)<0$
由 $1+\log_a(1-x^2)>1$ 得
$$\log_a(1-x^2)>0(a>1)无解;$$
由 $-1<1+\log_a(1-x^2)<0$ 得
$$-2<\log_a(1-x^2)<-1\ (a>1).$$
$\therefore \quad a^{-2}<1-x^2<a^{-1}$
$\therefore \quad 1-a^{-1}<x^2<1-a^{-2}$.
$\therefore \quad -\sqrt{1-a^{-2}}<x<-\sqrt{1-a^{-1}}$
或　$\sqrt{1-a^{-1}}<x<\sqrt{1-a^{-2}}$.
故原不等式的解集为
$(-\sqrt{1-a^{-2}},-\sqrt{1-a^{-1}})$
$\cup(\sqrt{1-a^{-1}},\sqrt{1-a^{-2}})$.

22. (1)$f(2+x)=-f(2-x)$，　$\therefore \quad f(x)=-f(4-x)$
又 $f(x)=f(x+4)$，　$\therefore \quad f(-x)=f(4-x)$
$\therefore \quad f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.
设 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，且 $x_1+x_2\neq 0$，
则　$f(x_1)-f(x_2)=\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1-x_2}\cdot(x_1-x_2)$

$\because \quad x_1-x_2<0$，　$\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1-x_2}<0$
$\therefore \quad f(x_1)>f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为减函数.
(2)$g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上也为减函数.
不等式 $g\left(x+\frac{2}{3}\right)>g\left(\frac{1}{x-2}\right)$ 变形为
$$\begin{cases}-1\leqslant x+\frac{2}{3}\leqslant 1\\ -1\leqslant\frac{1}{x-2}\leqslant 1\\ x+\frac{2}{3}<\frac{1}{x-2}\end{cases}\Rightarrow -\frac{5}{3}\leqslant x<1$$
故不等式的解集为 $\left[-\frac{5}{3},-1\right)$
(3)$g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为减函数，要使
$$g(x)\leqslant m^2-2am+2,$$
只须 $g(-1)\leqslant m^2-2am+2$，又 $g(-1)=f(-1)=2$
即 $m^2-2am\geqslant 0$ 恒成立.
令 $h(a)=2m\cdot a+m^2\geqslant 0$，　$a\in[-1,1]$
则　$\begin{cases}h(-1)\geqslant 0\\ h(1)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 2$ 或 $a=0$.

第三章

1. A　$a_{n+1}=ca_n$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=c(c\neq 0)$，$\{a_n\}$ 为等比数列.
又 $a_1=S_1=3+k$，$a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$;
又 $a_2=6$，　$\therefore \quad \frac{a_2}{a_1}=3$ 有 $\frac{6}{3+k}=3$，得　$k=-1$.

2. D　由 $S_n=2^n-1$ 得 $a_n=2^{n-1}(n\geqslant 1)$.
$\therefore \quad \{a_n^2\}$ 是首项为 1，公比为 4 的等比数列.
$\therefore \quad a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2=\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

3. B　$\because \quad a_1>0$，$S_4=S_8$.
$\therefore \quad d<0$. 由 $S_4=S_8$. 得　$a_1=-\frac{11d}{2}$. 当 $a_n\geqslant 0$ 时，S_n 有最大值.
$\therefore \quad a_n=-\frac{11}{2}d+(n-1)d\geqslant 0$.
$\therefore \quad n\leqslant\frac{13}{2}$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，　$n=6$

4. A　$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$
$=\log_2\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}$
$=\log_2\frac{2}{n+2}$
由 $S_n<-5$ 知 $\log_2\frac{2}{n+2}<-5$.
$\therefore \quad \frac{2}{n+2}<\frac{1}{32}$
$\therefore \quad n>62$ 即 $n_{\min}=63$.

5. B　由 $q=1$ 符合题意可排除 C，D
又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}=1$，则 $0<q<1$.

6. C　$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}\neq 1$，　$\therefore \quad \log_a x_2-\log_a x_1=\log_a x_3-\log_a x_2$
又 P_1，P_2，P_3 三点共线.
$\therefore \quad \frac{\log_b y_2-\log_b y_1}{\log_a x_2-\log_a x_1}=\frac{\log_b y_3-\log_b y_2}{\log_a x_3-\log_a x_2}$
$\therefore \quad \log_b y_2-\log_b y_1=\log_b y_3-\log_b y_2$
即 $\frac{y_2}{y_1}=\frac{y_3}{y_2}$，　$\therefore \quad y_1$，y_2，y_3 成等比数列.
当 $y_1=y_2=y_3$ 时，y_1，y_2，y_3 也成等差数列.

7. C　a，b，$a+b$ 成等差数列
$\therefore \quad 2b=2a+b$，即 $b=2a$　①
a，b，ab 成等比数列 $b^2=a^2b$.
$\therefore \quad b=a^2$　②
联立①②可得 $a=2$，$b=4$，$ab=8$
$\therefore \quad 0<\log_m ab<1$，则 $0<\log_m 8<1$，即 $m>8$.

8. B　$a_k=50+2(k-1)=2k+48$.
$b_k=10+4(k-1)=4k+6$.
则以 a_k，b_k 为邻边的矩形内圆的最大面积的圆是以 b_k 为直径的圆$(\because k\leqslant 21, a_k\geqslant b_k)$，$\therefore S_k=\pi(2k+3)^2$.

9. A　设 1996 年的产量为 x，年平均增长率为 y，则
$$x+x(1+y)+x(1+y)^2=100.$$
$$x(1+y)^2+x(1+y)^3+x(1+y)^4=121$$
两式相除得 $(1+y)^2=1.21$.　$\therefore \quad y=0.1$.

10. B　由 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=\frac{1}{2}$，$a_4=3$，$a_5=\frac{2}{3}$.
$\therefore \quad \frac{a_5}{a_3}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$.

11. B　$\tan A=\frac{4-(-4)}{7-3}=2$，$\tan B=\left(\frac{9}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=3$，
由 $\tan A>0$，$\tan B>0$，$\tan(A+B)=-1$
$\therefore \quad A+B=\frac{3\pi}{4}$，　$\therefore \quad \tan C=\frac{\pi}{4}$，
故 A，B，C 均为锐角.

12. D　$\because$　公比 $q\neq 1$，　$\therefore \quad S_{2n}-S_n\neq 0$，$S_{3n}-S_{2n}\neq 0$.
且 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列
$\therefore \quad (S_{2n}-S_n)^2=S_n\cdot(S_{3n}-S_{2n})$
即　$(S_B-S_A)^2=S_A(S_C-S_B)$
整理得　$S_A^2+S_B^2=S_AS_C+S_AS_B=S_A(S_B+S_C)$

13. 15　$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=18$. $\therefore \quad a_5=2$.
又 $a_5+a_{n-4}=a_1+a_n=32$
$\therefore \quad S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\times 32}{2}=16n=240$，$n=15$.

14. n^3　到第 n 组，一共出现了 $1+2+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 个奇数，故
$$S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$\therefore \quad a_n=S_n-S_{n-1}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$