研究生讲义

连续介质力学引论

（上册）

杜珣

一九八三、一

目 录

第一章 笛卡儿张量

§1 引言

1、张量的意义

张量是用来描述客观存在的物理量。它本身不依赖于坐标系而存在，而为了在数量上对此物理量进行表征和计标，常常需要选定参考的坐标系，不同的坐标系下得到不同的数量表征；但客观物理量及描述它的张量应该是与坐标系的选择无关。在一个坐标系下，张量可以用一些称为张量分量的总和来表征，如果这些分量都为已知，则此张量就完全确定，从而在另一坐标系内，此张量的各个分量也就应完全确定。换言之，在不同坐标系下，张量的分量之间必有确定的变换规律。这种分量随坐标变换的规律，正是张量独立于坐标系的反映，

连续介质力学以及各物理学科研究的都是不依赖坐标系的物理量及其变化规律。因此自然要用张量这一数学工具。连续介质力学的运动规律是用张量方程来表述的，它要对各个坐标系都能成立。

张量理论的表述有两种不同的方式，第一种方式是完全不藉助于坐标系，把张量整体作为研究的对象，对它进行运标，（这时可定义张量为某种类型的线性变换或某种线性空间的元素。）第二种方式是把张量看成是其分量的总和，张量的运标归结为张量分量的运标。这两种方式都是需要的，第一种表述简单利落；第二种便于实际计标。我们主要是按第二种方式来介绍张量理论。

讨论在任意坐标系变换下的张量理论称为普遍张量理论，

而只在笛卡儿坐标系间变换的张量理论则称为笛卡儿张量理论。所谓笛卡儿坐标系指的就是右手旋转的直角坐标系。笛卡儿张量理论远比普遍张量理论简单．介绍连续介质力学基本概念和基本运动规律，可以只用笛卡儿张量，从而得到直角坐标系下的运动方程组。在解具体问题需要用柱坐标或球坐标时，也可用坐标变换办法直接换标，因此本课程只介绍笛卡儿张量理论，

2、约定求和法

我们研究的是三维欧氏空间中的物理现象，此空间中的笛卡儿张量，其分量的每个指标都在1，2，3中取值。可任取1或2或3的文字指标称为自由指标。

为书写简便，我们约定，在同一项中，如有一个自由指标重复出现，就表示要对这个指标从1到3求和。（在n维空间中则是从1到n求和）。例如

$$u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$u_{ij} v_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} u_{ij} v_{ij}$$

对此约定求和法则，我们并作以下规定：在一等式中，如果同一个文字指标，在其中的一项不是约定求和指标，则它即使在其它某项内重复出现，也不约定求和。

例如 $f_i = T_{ii}$ ，右边就不约定求和。

3、符号 δ_{ij}

定义：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{当 } i\neq j\\ 1 & \text{当 } i=j\end{cases}$$

例：记 $\underline{e}_i$ 为直角坐标系中沿 X_i 轴的单位向量，（$i=1,2,3$），则有 $\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j=\delta_{ij}$

单位矩阵可记为

$$I=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

4、置换符号 ϵ_{ijk}

定义

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}0, & \text{当 } ijk \text{ 中有相同者，}\\ 1, & \text{当 } (i,j,k) \text{ 为 } (1,2,3) \text{ 的偶排列，}\\ -1, & \text{当 } (i,j,k) \text{ 为 } (1,2,3) \text{ 的奇排列。}\end{cases}$$

例1. 行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\epsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}=\epsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}.$$

由此知

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta=\epsilon_{ijk}a_{\alpha i}a_{\beta j}a_{\gamma k}=\begin{vmatrix}a_{1\alpha}&a_{1\beta}&a_{1\gamma}\\a_{2\alpha}&a_{2\beta}&a_{2\gamma}\\a_{3\alpha}&a_{3\beta}&a_{3\gamma}\end{vmatrix}$$

例2

$$\underline{u}\times\underline{v}=\begin{vmatrix}\underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\epsilon_{ijk}\,u_j\,v_k\,\underline{e}_i$$

即 $(\underline{u}\times\underline{v})_i=\epsilon_{ijk}\,u_j\,v_k$

$$\mathrm{rot}\,\underline{v}=\begin{vmatrix}\underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\left(\epsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\underline{e}_i$$

即 $(\mathrm{rot}\,\underline{v})_i=(\nabla\times\underline{v})_i=\epsilon_{ijk}\dfrac{\partial v_k}{\partial x_j}$

5、 $\epsilon-\delta$ 恒等式

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ist}=\delta_{js}\,\delta_{kt}-\delta_{jt}\,\delta_{ks}$$

证：由于 $I=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$

故 $\begin{vmatrix}\delta_{1r} & \delta_{1s} & \delta_{1t}\\ \delta_{2r} & \delta_{2s} & \delta_{2t}\\ \delta_{3r} & \delta_{3s} & \delta_{3t}\end{vmatrix}=\epsilon_{rst}\,I=\epsilon_{rst}$

$$\begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{rst}$$

上式中令 $i=r$ 得

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ist} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{ji} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ki} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} = \delta_{ii}\begin{vmatrix} \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} - \delta_{is}\begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jt} \\ \delta_{ki} & \delta_{kt} \end{vmatrix}$$

$$+\delta_{it}\begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{js} \\ \delta_{ki} & \delta_{ks} \end{vmatrix} .$$

约定求和，得

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ist} = 3\begin{vmatrix} \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{jt} & \delta_{js} \\ \delta_{kt} & \delta_{ks} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} = \delta_{js}\,\delta_{kt} - \delta_{jt}\,\delta_{ks}$$

例1、 $\underline{A}\times(\underline{B}\times\underline{C}) = (\underline{A}\cdot\underline{C})\,\underline{B} - (\underline{A}\cdot\underline{B})\,\underline{C}$

证.

$$[\underline{A}\times(\underline{B}\times\underline{C})]_i = \epsilon_{imn}\,a_m\,(\underline{B}\times\underline{C})_n = \epsilon_{imn}\,a_m\,\epsilon_{njk}\,b_j\,c_k$$

$$=\epsilon_{nim}\,\epsilon_{njk}\,a_m b_j c_k=(\delta_{ij}\delta_{mk}-\delta_{ik}\delta_{mj})\,a_m b_j c_k$$

$$=a_m c_m b_i-a_m b_m c_i=(\underline{A}\cdot\underline{C})\,b_i-(\underline{A}\cdot\underline{B})\,c_i$$

例2.

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}$$

证 $\nabla\times(\nabla\times\underline{v})=\nabla(\nabla\cdot\underline{v})-\nabla^2\underline{v}$

证.

$$[\nabla\times(\nabla\times\underline{v})]_i=\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\times\underline{v})_k=\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\epsilon_{k\ell m}\frac{\partial v_m}{\partial x_\ell}\right)$$

$$=\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{k\ell m}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j\partial x_\ell}=[\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}]\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j\partial x_\ell}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\underline{v})-\nabla^2 v_i\,.$$

§2 笛卡儿坐标变换

$OX_1X_2X_3$ 为右手直角坐标系，$\underline{e}_i$ 为沿 OX_i 轴的单位向量，则 $\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j=\delta_{ij}$

向径 $\overrightarrow{OP}$ 在此坐标系中的分量，（也即P点坐标）记为 $\underline{X}$

$$\underline{X}=x_j\,\underline{e}_j$$

笛卡儿坐标变换，把此坐标系变为另一个右手直角坐标系 $O'X'_1X'_2X'_3$．记 $\underline{e}'_i$ 为沿 $O'X'_i$ 轴的单位向量，则

$\underline{e}'_i\cdot\underline{e}'_j=\delta_{ij}$

记 $\beta_{ij}=\underline{e}_i'\cdot\underline{e}_j$ (1)

β_{ij}是$O'X_i'$轴与OX_j轴间夹角的方向余弦，

$$\underline{e}_i'=\beta_{ij}\underline{e}_j \qquad \underline{e}_i=\beta_{ji}\underline{e}_j'$$

由于

$\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j=\delta_{ij}=\underline{e}_i'\cdot\underline{e}_j'$ 而有

$$\beta_{ij}\beta_{kj}=\beta_{ji}\beta_{jk}=\delta_{ik}$$

记向量 $\underline{c}$是$\overrightarrow{OO'}$在$OX_1X_2X_3$中的分量，也即O'的坐标为c_i； P点在两坐标系中的坐标分别记为x_i和x_i'，则由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{O'P}+\overrightarrow{OO'}$，得

$$\underline{x}=x_j\underline{e}_j=x_j'\underline{e}_j'+\underline{c} \qquad (2)$$

用$\underline{e}_i$点乘(2)式，得 $x_j\delta_{ij}=x_j'\beta_{ji}+c_i$.

即 $x_i=\beta_{ji}x_j'+c_i$ (3)

用$\underline{e}_i'$点乘(2)式得 $x_j\beta_{ij}=x_j'\delta_{ij}+c_i'$

即 $x_i'=\beta_{ij}x_j-c_i'$ (3')

其中 $c_i'=\underline{c}\cdot\underline{e}_i'=c_j\underline{e}_j\cdot\underline{e}_i'=\beta_{ij}c_j$.

坐标变换(3)或(3')也称为刚体运动变换，其中$\underline{c}$代表刚体(坐标架)的平移、矩阵(β_{ij})代表刚体旋转。

位置向量 $Y=\overrightarrow{O'P}$ 在两个坐标系中的分量分别记为$y_i=x_i-c_i$ 和 $y_i'=x_i'$

则(3)和(3')给出

$$y_i=\beta_{ji}y_j' \quad , \quad y_i'=\beta_{ij}y_j \qquad (4)$$

$$|\beta_{ij}| = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') \cdot \underline{e}_3' = 1$$

这样的变换（4）称为刚体旋转变换、

（$|\beta_{ij}|^2 = 1$ 时，变换（4）称为正交变换）.

§3、张量的定义

张量分量中所含指标的个数称为张量的阶。在三维空间中，每个指标可取 1，2，3 之值。故 n 阶张量共有 3^n 个分量。

下面讨论笛卡儿张量，即坐标系间变换为

$$x_i' = \beta_{ij} x_j + c_i' \quad \text{的形式。}$$

其中 $\beta_{ij} = \underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j$，$c_i'$ 为常数。

笛卡儿张量的定义如下：

1、零阶张量（即标量）.

它只有一个分量，且其值不随坐标系不同而改变、即标量是坐标变换下的不变量

$$\phi'(x_1', x_2', x_3') = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

2、一阶张量（即向量）　$T = (T_i)$

它有三个分量 T_i，它们随坐标系变换的规律，与位置向量的变换规律（4）相同，即

$$T_i' = \beta_{ij} T_j, \qquad T_i = \beta_{ji} T_j'$$

（注意，两个式子同时写出是为了醒目，实际上可只写出一个，而另一个能随之导出。例如以 β_{ki} 乘 $T'_k=\beta_{kj}T_j$ 两边，就得到

$$\beta_{ki}T'_k=\delta_{ij}T_j=T_i$$ ）.

3、二阶张量　　$T=(T_{ij})$

它有九个分量 T_{ij}，分量随坐标系变换的规律是

$$T'_{ij}=\beta_{im}\beta_{jn}T_{mn},$$

$$T_{ij}=\beta_{mi}\beta_{nj}T'_{mn}$$

4、n 阶张量　　$T=(T_{i_1\cdots i_n})$

当指标本身又有附标时，我们采用以下的简写符号

$$T_{i_1\cdots i_n}=T_{i_n}$$

$$T_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}=T_{i_p j_q}$$

$\prod$ 表示连乘符号

$$\prod\beta_{i_n j_n}=\beta_{i_1j_1}\beta_{i_2j_2}\cdots\beta_{i_nj_n}$$

n 阶张量共有 3^n 个分量，其分量随坐标系的变化规律是

$$T'_{i_1\cdots i_n}=\beta_{i_1j_1}\cdots\cdots\beta_{i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}$$

即

$$T'_{i_n}=\prod\beta_{i_nj_n}T_{j_n},$$

$$T_{i_n}=\prod\beta_{j_ni_n}T'_{j_n}$$

由上面定义立知，如在某直角坐标系下张量的所有分量都是零，则换到任一其它直角坐标系下，此张量的分量也都是零。这样的张量称为是零张量。

§4 张量的代数运算

1、张量的加减

阶数相同的张量可以相加减，并仍得到同阶的张量。如A和B都是n阶张量，则

$A \pm B = C$ 的定义是

$C_{i_n} = A_{i_n} \pm B_{i_n}$

由于A和B都是n阶张量

$$C'_{i_n} = A'_{i_n} \pm B'_{i_n} = \Pi \beta_{i_n j_n} A_{j_n} \pm \Pi \beta_{i_n j_n} B_{j_n}$$

$$= \Pi \beta_{i_n j_n} (A_{j_n} \pm B_{j_n}) = \Pi \beta_{i_n j_n} C_{j_n}$$

因此C也是n阶张量。

由此立知，如 $A=B$ 是张量方程（即方程中每一项都是同阶的张量）。只要知道 $A=B$ 在某一直角坐标系内成立，即在此坐标系中 $A-B=0$（零张量），就知道在任一其它直角坐标系中 $A-B$ 也是零张量，即 $A-B=0$，从而方程 $A=B$ 在任一其它直角坐标系中也成立。

2、张量与标量相乘

λ 为标量，A 为n阶张量

$\lambda A = A\lambda = B$ 的定义是

$B_{i_n} = \lambda A_{i_n}$

由于 $B'_{i_n} = \lambda A'_{i_n} = \lambda \Pi \beta_{i_n j_n} A_{j_n} = \Pi \beta_{i_n j_n} (\lambda A_{j_n})$

$= \Pi \beta_{i_n j_n} B_{j_n}$，从而B也是n阶张量。

3、 张量乘积

两张量A和B的张量乘积记为AB（或$A \otimes B$）A的每一分量与B的每一分量相乘，就得到AB的一个分量，设A是m阶张量，B是n阶张量

$$A_{i_m} B_{j_n} = (AB)_{i_m j_n}$$

由于

$$\begin{aligned}(AB)'_{i_m j_n} &= A'_{i_m} B'_{j_n} \\ &= (\Pi\beta_{i_m k_m} A_{k_m})(\Pi\beta_{j_n s_n} B_{s_n}) \\ &= (\Pi\beta_{i_m k_m}\beta_{j_n s_n}) A_{k_m} B_{s_n} \\ &= (\Pi\beta_{i_m k_m}\beta_{j_n s_n})(AB)_{k_m s_n}\end{aligned}$$

因此 AB是$m+n$阶的张量。

〔注意：$\prod \beta_{i_m k_m} \beta_{j_n s_n} = \beta_{i_1 k_1} \cdots \beta_{i_m k_m} \beta_{j_1 s_1} \cdots \beta_{j_n s_n}$，故上式右端不是只对$K_m$和$S_n$约定求和，而是要对$K_1, K_2 \cdots K_m, S_1, S_2 \cdots S_n$都约定求和。〕

例：两向量$\underline{u}$和$\underline{v}$的张量乘积是二阶张量（$u_i v_j$）。AB中当A或B是标量时，就得到标量与张量的乘积。

以后为简单起见，用A_{i_n}既表示n阶张量A的任一个分量，也表示张量A本身，即把

$A = \{A_{i_n}\}$的括号省去，简记为$A = A_{i_n}$

4、张量的收缩

$A_{i_n} = A_{i_1 \cdots i_n}$，当$i_1 \cdots i_n$中有两个自由指标相同时，应用约定求和法，就得到一个有$n-2$个自由指标的张量B，称B是张量A的收缩。例如当A中最后两个指标$i_{n-1} = i_n = m$时，记

$$A_{i_1 \cdots i_{n-2}, m, m} = A_{i_{n-2}, m, m} = B_{i_{n-2}}$$

下面证明 $B = B_{i_{n-2}}$ 是$n-2$阶的张量。

$$B'_{i_{n-2}} = A'_{i_{n-2} mm} = \prod \beta_{i_{n-2} j_{n-2}} \beta_{mp} \beta_{mq} A_{j_{n-2} pq}$$

$$= \prod \beta_{i_{n-2} j_{n-2}} \delta_{pq} A_{j_{n-2} pq} = \prod \beta_{i_{n-2} j_{n-2}} A_{j_{n-2} pp}$$

$$= \prod \beta_{i_{n-2} j_{n-2}} B_{j_{n-2}}.$$

例 两向量$\underline{u}$和$\underline{v}$的张量乘积$u_i v_j$收缩后，就得到标量$u_i v_i = \underline{u} \cdot \underline{v}$（也即$\underline{u}$和$\underline{v}$的内积）。

5、张量的内积

张量A和B的张量乘积AB收缩一次后，就得到A和B的内积，为明确起见，我们取A的最后一个指标与B的第一个指标相同，这样对AB收缩所得的张量记为 $A\cdot B$．

设A是m阶张量，B是n阶张量，则

$$A_{i_1\cdots i_{m-1}k}B_{kj_2\cdots j_n}=(A\cdot B)_{i_1\cdots i_{m-1}j_2\cdots j_n}$$

既然张量乘积和收缩后所得到的都是张量，故知 $A\cdot B$ 是 $m+n-2$ 阶的张量．

一般说来，$A\cdot B\neq B\cdot A$，即内积一般不满足交换律．但由内积定义，易知结合律是成立的，即有

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

例：$T=(T_{ij})$ 是二阶张量　$B=(B_k)$ 是向量，则

$$T\cdot B=(T_{ij}B_j)\quad 即\quad (T\cdot B)_i=T_{ij}B_j$$

$$B\cdot T=(B_iT_{ij})\quad 即\quad (B\cdot T)_i=B_jT_{ji}$$

当 $T_{ij}\neq T_{ji}$ 时，则　$T\cdot B\neq B\cdot T$

如　$B=\underline{e}_k$ 为基向量时，$B_j=\underline{e}_k\cdot\underline{e}_j=\delta_{kj}$

$$(T\cdot\underline{e}_k)_i=T_{ij}\delta_{kj}=T_{ik}$$

而 $(\underline{e}_k\cdot T)_i=\delta_{kj}T_{ji}=T_{ki}$

6、张量间的线性变换．

设T是由任意n阶张量B到m阶张量A两集合间的一个确定的线性变换，记此为

$$A = T(B)$$

变换T是线性的，即A的每个分量可通过B的分量的线性组合表出，再假定变换是齐次的，即零张量仍变为零张量。

此线性变换 $A = T(B)$ 的一般形式为

$$A_{i_m} = T_{i_m j_n} B_{j_n}$$

$T_{i_m j_n}$ 表示线性组合中相应的系数，下面证明

$T = \{T_{i_m j_n}\}$ 是 $n+m$ 阶的张量。

证：

$$T'_{i_m j_n} B'_{j_n} = A'_{i_m} = (\Pi\beta_{i_m k_m}) A_{k_m}$$

$$= (\Pi\beta_{i_m k_m}) T_{k_m s_n} B_{s_n} = T_{k_m s_n} (\Pi\beta_{i_m k_m})(\Pi\beta_{j_n s_n}) B'_{j_n}$$

即 $\left(T'_{i_m j_n} - (\Pi\beta_{i_m k_m}\beta_{j_n s_n}) T_{k_m s_n}\right) B'_{j_n} = 0$

由于 B'_{j_n} 的任意性，有

$$T'_{i_m j_n} = (\Pi\beta_{i_m k_m}\beta_{j_n s_n}) T_{k_m s_n}$$

即 T 是 $m+n$ 阶的张量。

所有的 n 阶张量组成一个 3^n 维的线性空间，而每一个 $m+n$ 阶张量，可看成是由 n 阶张量到 m 阶张量（即由 3^n 维空间到 3^m 维空间）的线性变换。

$A = (T_{i_m j_n} B_{j_n})$ 可看成是张量T与张量B的张量乘积TB作 n 重收缩所得的某种内积。

以上讨论给出