高等学校试用教材

高等数学

〔日〕横手一郎 著

张卿 赵为礼 于长敏 译

习题课教程

下册

高等学校试用教材

高等数学

习题課教程

（下册）

〔日〕横　手　一　郎　著

张　卿　赵为礼　于长敏　译

一九八四年八月

内 容 提 要

该书理论系统，内容丰富，例、习题类型齐全。每节均有（1）内容提要；（2）例题；（3）练习题；（4）练习题解答。在叙述上由浅入深，通俗易懂，能紧密配合理工科院校的高等数学教学大纲，对读者掌握基本概念、基本理论、基本方法和解题的技能技巧均有卑益，是一本较好的习题课教材。

本书分上、下两册装帧，上册为一元微积分；下册包括多元函数微积分、无穷级数和常微分方程等内容。

高等数学习题课教程

下　　册

〔日〕横　手　一　郎　著

张　卿　赵为礼　于长敏　译

*

86047部队青年印刷厂　印刷

*

787×1092毫米32开本　450,000字

1984年7月 出版　印数：1－6600

吉林省文化厅（83）294号批准　工本费2.75元

原 文 序 言

本书编写的宗旨与上册序言所述完全相同。

在上册里搜集的是关于一元函数微积分的习题，本册中搜集的是多元函数微积分、无穷级数以及常微分方程部分的例题和习题。

按照最初的想法，想一直编写到空间的曲线积分，但由于篇幅所限，很遗憾只好略去了。

本书的解答并不一定是最优解法，并且，由于本人的经验肤浅，本书一定还有许多不足之处，衷心希望读者给予批评，以便改正。

编写本书时，包括上册在内，参考了下列书籍：

高木贞治	著	解析概论	岩波书店
竹内瑞三	著	高等微分学	裳华书房
未纲，荒又	著	微分积分学（上、下）	富山书房
矢野健太郎	著	微分积分学	裳华书房
杉村，山村，国枝	著	积分学题解	裳华书房
黑须康之助	著	微分学题解	森北出版社
平野幸太郎	著	积分学题解	森北出版社
矢野，石原	著	微分学习题选讲	裳华书房
矢野，石原	著	积分学习题选讲	裳华书房
福田，安冏，铃木黑崎	著	微积分学题解 II	共立出版社

高桥，佐藤
藤泽平岛　　著　应用解析学Ⅰ　桢书店

除此之外，还有很多人曾给予帮助和指导，在此一一表示感谢

本书在出版和校对时，分别受到森北出版社的柳泽茂八氏、森崎满氏的大力协助，在此深表感谢。

著　者

1978年秋

下 册 目 录

第九章　重积分

第十章　重积分的应用

第十一章　微分方程

第六章　无穷级数

6·1　无　穷　级　数

提　　要

把数列$\{a_n\}$中的各项用“+”号连起接来就得下式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots. \tag{1}$$

我们称(1)式为**无穷级数**或简称为**级数**，常用符号$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$或简单地用$\sum a_n$来表示(1)式。并把

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

叫做级数(1)的n**项和**或(前n项的)**部分和**.若当$n\to\infty$时，数列$\{A_n\}$收敛于A则称级数(1)收敛，并把A叫做级数(1)的和。这时记

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

若$\{A_n\}$发散，则称级数(1)发散。并且，当$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$或$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=-\infty$时，级数(1)也记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty\text{或}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\infty.$$

1. 级数Σa_n去掉或增加有限项，不改变其敛散性。

2. 设Σa_n，Σb_n皆收敛，则

(1)$\Sigma(a_n \pm b_n)=\Sigma a_n \pm \Sigma b_n$;

(2)$\Sigma(Ka_n)=K\Sigma a_n$ （K为常数）。

3. 设Σa_n收敛，且其和为A，则按Σa_n中的项的顺序，任意加括号，如

$$(a_1+a_2+a_3)+a_4+(a_5+a_6)+\cdots,$$

所得到的新的级数仍收敛，且其和仍为A。

〈**注**〉 命题3的逆命题一般不成立。例如$(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛，但$1-1+1-1+1-1+\cdots$发散。

4. Cauchy**准则**：Σa_n收敛的充要条件是：任给$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得对一切$n>m>N$，恒有$|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n|<\varepsilon$，即$|A_n-A_m|<\varepsilon$。

5. 若Σa_n收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

例　题

〔例题1〕判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n-1}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

解. (1) 当$a=1$时，$A_n=n$。所以$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$；

当$a=-1$时，$A_{2n}=0$，$A_{2n-1}=-1$。所以$\{A_n\}$不收敛；

当$a\neq 1$时，

$$A_n=1+a+\cdots+a^{n-1}=\frac{1-a^n}{1-a}.$$

于是，当$|a|<1$时，$a^n\to 0(n\to\infty)$。故$A_n\to\frac{1}{1-a}$;

当 $|a|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，所以 A_n 也不收敛。

故级数 Σa^{n-1} 只有当 $|a|<1$ 时收敛，其和为 $\frac{1}{1-a}$，当 $|a|\geqslant 1$ 时发散。

（2）
$$A_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}.$$
$$\lim_{n\to\infty} A_n=1.$$

因此，所论级数收敛，且其和为1．

〔**例题2**〕称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 为**调和级数**。试证调和级数发散。

解．设 $a_n=\frac{1}{n}$，有

$$\left|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}\right|=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}>\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}.$$

因此，当取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 时．由提要4收敛的充要条件知对任何N，此级数都是发散的。

练 习 题 二 十 五

1．下列级数若有和，求这个和。

(1) $\Sigma\dfrac{1}{n^2+5n+4}$; (2) $\Sigma(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1}$;

(3) $\Sigma n\sin\dfrac{1}{n}$; (4) $\Sigma\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$;

(5) $\Sigma\sin na$; (6) $\Sigma\dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)(n+m)}$

(m为整数)。

2. 当 $|a|\neq 1$ 时，求如下级数的和。

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^4}+\frac{a^4}{1-a^8}+\frac{a^8}{1-a^{16}}+\cdots.$$

3. 利用提要4（Cauchy准则）证明提要5。

练习题二十五解答

1. **(略解)** 所求级数的通项均设为 a_n，前n项和为 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。

(1) 于由 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)(k+4)}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+4}\right)=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)\right.$

$+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-3}-\dfrac{1}{n}\right)$

$+\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n-1}\right.$

$\left.\left.-\dfrac{1}{n+2}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$.

从而，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{36}$，即和为$\frac{13}{36}$。

（2）因为$a_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}=(-1)^{n-1}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$，所以由提要5知级数不收敛。

（3）因为$a_n = n\sin\frac{1}{n}=\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$，故级数发散。

（4）因为 $A_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\longrightarrow\frac{2}{3}$，故其和为$\frac{2}{3}$。

（5）当m为整数时，若 $a=m\pi$，则 $\sin na=0$。显然级数收敛且和为零；当$a\neq m\pi$时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$。由提要5知级数发散。

（6）因为$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right\}$

$$=\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right\}.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m!}$。故其和为$\frac{1}{m(m!)}$。

2．**（略解）**设前n项的部分和为A_n，则有

$$A_1=\frac{a}{1-a^2}=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^2},$$

$$A_2=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^4}=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^4},$$

$$A_3=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^4}+\frac{a^4}{1-a^8}=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^8},$$

$$A_4=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^8}+\frac{a^8}{1-{}^{16}}=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{16}}.$$

一般地，有

$$A_n=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{2n}}.$$

（用数学归纳法不难验证该问题的正确性）。因此，当 $|a|>1$ 时，$A_n\to 1/(1-a)(n\to\infty)$；当 $|a|<1$ 时。$A_n\to\frac{1}{(1-a)}-1=a/(1-a)(n\to\infty)$。所以，该级数的和是当 $|a|>1$ 时为 $\frac{1}{1-a}$；当 $|a|<1$ 时为 $\frac{a}{1-a}$。

3．（证）于提要4中设 $n=m+1$，则有 $|a_{m+1}|<\varepsilon(m>N)$。因此，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

6.2 正项级数

提 要

若 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，则称级数 Σa_n 为**正项级数**。若 $b_n=(-1)^{n-1}a_n$，$a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，则称级数 Σb_n 为**交错级数**。

1．正项级数收敛的必要条件是：部分和数列 $\{A_n\}$ 有界。

2．**比较判别法**：设Σa_n，Σb_n皆为正项级数且$a_n \leqslant kb_n$ $(n=1, 2, \cdots;$ k为正数)，则

（1）当Σa_n收敛时，Σb_n也收敛。

（2）当Σa_n发散时，Σb_n也发散。

3．设Σa_n，Σb_n皆为正项级数．如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \qquad (k为正数)$$

则这两个级数同时收敛或同时发散。

4．d′Alembert（达朗贝尔）**判别法**：设Σa_n为正项级数。若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r,$$

则

（1）当$0\leqslant r<1$时，Σa_n收敛；

（2）当$r>1$时，Σa_n发散；

5．Cauchy(柯西)**判别法**：设Σa_n为正项级数。若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r \qquad (r为正数)$$

则

（1）当$0\leqslant r<1$时，Σa_n收敛；

（2）当$r>1$时，Σa_n发散。

6．设$f(x)$是在$[m, +\infty)$（m为整数）上单调减少的连续函数，并且$f(x)\geqslant 0$，则级数

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)=f(m)+f(m+1)+\cdots$$

和无穷积分

$$\int_{m}^{+\infty} f(x)dx$$

同时收敛或同时发散。

7．Leibniz(莱布尼兹)**定理**：对于交错级数$\Sigma(-1)^{n-1}a_n$，若

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \cdots, \text{ 且} \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

则此级数收敛。

8．**Raabe(拉贝)判别法**：若$a_n > 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$及

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = K,$$

则当$K=1$时，Σa_n收敛；当$K<1$时，Σa_n发散；当$K=1$时，Σa_n的敛散性需要利用其它更为精确的判别法判别之。

例　　题

〔**例题1**〕判断级数$\Sigma\frac{1}{n^k}$的敛散性。

解　当$k \leqslant 0$时，$\frac{1}{n^k} \geqslant 1$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} \neq 0$。故级数发散；

当$k>0$时，设$f(x)=\frac{1}{x^k}$，$f(x)$在〔1，$+\infty$）上满足提要6的条件，即

$$\int_1^b \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{1-k}(b^{1-k}-1)(k \neq 1);$$

$$\int_1^b \frac{1}{x^k}dx = \ln b(k=1).$$

从而，广义积分

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^k}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^k}dx.$$

收敛的充要条件是k>1.故所求级数当k>1时收敛，当 k⩽1时发散。

〈**注**〉在应用比较判别法时经常以此级数为比较标准。

〔**例题2**〕判断下列级数的敛散性。

(1) $\Sigma(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；(2) $\Sigma\frac{a^n}{n^k}(a>0)$；

(3) $\Sigma\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；　　　(4) $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$。

解. 所有级数Σa_n的通项均设为a_n,

$$(1)\ a_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}>\frac{2}{\sqrt{n^2+n^2}+\sqrt{n^2+n^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{n}.$$

因为$\Sigma\frac{1}{n}$发散，所以Σa_n也发散。

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k a=a.$$

由提要4可知当a<1时级数Σa_n收敛；当a>1时，级数Σa_n发散；当a＝1时，由例题1知k>1时，级数收敛，k⩽1时级数发散。

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1.$$

由提要5可知，级数Σa_n收敛。

(4)由提要7易见，Σa_n收敛。

练 习 题 二 十 六

1．判断下列级数的敛散性。

(1) $\sum\frac{1+n}{1+n^2}$； (2) $\sum\frac{n}{n^3+1}$； (3) $\sum\frac{2^n+1}{3^n+n}$；

(4) $\sum\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$； (5) $\sum\frac{n}{3^n}$；

(6) $\sum(\sqrt[n]{a}-1)(a\geqslant 1)$； (7) $\sum\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(8) $\sum\frac{n!}{n^n}$； (9) $\sum\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$；

(10) $\sum\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}$.

2．判断下例级数的敛散性。

(1) $\sum\frac{1}{a+bn}$； (2) $\sum\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$；

(3) $\sum(-1)^{n-1}\sin\frac{a}{n}$； (4) $\sum\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$；

(5) $\sum(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^k}$； (6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^k}$；

(7) $\sum\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$；

(8) $\sum\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}(a>0,\ b>0)$.

3．若正项级数$\sum a_n$收敛，则$\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$也收敛。

4．若正项级数$\sum a_n$收敛，且$\{a_n\}$单调递减，则