羅素五大講演

數理邏輯

北京大學新知書社出版

楊熙初

中華民國十年十月初版

羅素五大講演 數理邏輯

（每冊實售大洋一角）（外埠酌加郵費）

發行者 北京大學 新知書社

印刷者 北京大學 新知書社印刷所

總發行所 北京大學 新知書社 北京乾麵胡同東口 電話東局三四三五

分售處 北京大學 新知書社分發行所 北京南池子北口路西 電話東局三四三四號

京內外各大書坊

數理邏輯 (Mathematical Logic)

1.

吳範寰記。

諸君：

數理邏輯同普通數學的異點，是在他們進行的方向不同。大概普通數學是「向前」的，數理邏輯是「向後」的。不過諸君要曉得，「向後」並不是「向後退步」的意思，而是溯本窮源，向後追求原來的根據罷了。

當我們有許多數學命題的時候，一定要發生兩種不同的問題：（一）從這些命題之中，可以推出那一種的推論，這就是向前的方向，也就是普通數學所要研究的問題。（二）要考究這些命題，是從那一種命題推求出來的，換一句話說，就是要找出推論得這些問題的那些「較簡單的」，「較少數的」命題。像這樣依次再向後找出再簡單的，更少數的命題，就是向後的方向，也就是數理邏輯所要研究的問題。

我們可以任意取一種推論的系—如算術，幾何學，牛頓力學等—都可以從幾個公理(Axioms)或公法(Postulates)——公理同公法不同的點，稍遲再講—裏面，推出全部來。不僅上舉幾種，是這種情形，差不多每種純粹的數學，都可以從純粹邏輯的，有定數的公理和公法中，推求出來。

通常的數學，除去特別的幾種以外—如投影幾何等—都是與「數目」有關係的。但是也有許多與「數目毫無關繫的，」也可以用數學的精密方法去研究，不過研究的利器，要推數理邏輯，所以數理邏輯雖是數學的一部分，其實與「數目」確無關係。

我們現在還不能對數學下一個淸晰的定義，非等到我們講的材料增多不可。不過現在可以下一個簡單的定義，就是：「應用符號，推論結果的學科，叫做數學」。至於用不用數目，是沒有關係的，就是用得着，也不過是偶而碰巧罷了。不過我們要知道他們的特點（一）數學是精確的；（二）數學是一定的，無疑的；（三）研究數學的人，對於一部分要是很靈敏，對於別的部分，一定也很靈敏，綜括說起來，能靈

敏活潑的，應用各種抽象的符號，對於數學的各部分，一定也很靈敏。

實際上，我們有許多種數學，是與「數目」無關的，我們要研究的時候，一定要用數理邏輯，作我們的利器。所以數理邏輯對於這些種數學的重要，同微積分與尋常數學的關係一樣。

諸位習過數學的，大概都能知道，有許多事物，從前把他列在哲學上的問題以內的，現在多列在數學上的問題以內了。這些種種問題，在哲學上，經過幾千百年，都沒有得到什麼結果，現在應用數學的方法，可以得到一定的結果了。譬如從前想說明「物的實在」(Entity)，因爲哲學上對於「物體」，「空間」，「時間」等，都沒有討論出什麼結果，所以也沒有說明。現在知道可以應用數學的方法去研究，並且非如此應用不可，所以都列作數理邏輯的問題。惟其因爲已列入數理邏輯的問題中，所以也就得有一定的結果。

上面已經講過，每種純粹的數學，都可以從純粹邏輯的幾個公理和公法，推求出

來，我現在繼續加上一個說明，就是：在純粹的數學中間，都是用尋常的符號——x，y，z等——去解釋，而不能有指出來的東西，究竟所指的些什麽東西，全可不必去問，而且能用實驗証明或否認的東西，也不包含在內。譬如像「兩直線不能包含空間」，不是純粹數學中的命題，不但是不能列入純粹的數學，並且是一個不可通的命題—因爲「直線」還沒有完全精當的定義，從前因爲光是依直線進行，所以用光線作直線的定義，現在又知道光線亦受吸引力的影響，可以變成曲的，所以前說又不能用。——此外「証明和否認」，在理論確是很難，所以純粹數學中，簡直不能有這樣的命題。

研究數理邏輯，必定要除開特別指出的物件或事情。如「看見下雨，我就想傘，現在我不想傘，所以沒有下雨」。在數學上，我們把P作爲「下雨」，Q作爲「想雨傘」。我們就可以說「假若P，一定有Q。現在不P，所以無Q」所以在數學裏面，不管他「所指的」是什麽，祇說「符號」，祇用「變量」，用些無意義的字母 如

x，y，z等—去代表．也不去問他們眞不眞，祇依照幾個假定去研究．因此我有時替數學下一個定義，就是「研究數學的人，不知道他們自己所講的，是些什麼，也不知道他們所說的對不對．」像這種定義，或許讓仇視數學的人聽見了，一定是很歡喜的．

前面講過，純粹的數學，可以從幾個公理或公法中，推出全部．因此「推論」的方法，很覺重要．如命題Q，可從命題P推論而出，假若P是對的，並且P對Q也是不錯，那麼，我們知道Q就是對的．像這種情形，就叫作「假若P就是Q」或者叫作「P包含Q」．這句話也就是說P與Q的函數(Function)，就叫做「命題函數」(Propositional function)．命題函數，在數理哲學中，很重要．在他本身中間，「變項」是一個或是幾個命題，同數學函數中，「變項」是一個或是幾個數的情形一樣．

一個命題函數的對不對，祇看他所包函的命題對不對而定．這種命題函數，就叫作「眞理函數」(Truth function)．要想說明他，我們可以舉出一個「非眞理函數」來

講．如「我相信P」是P的函數，但是「我相信P」這個命題實在的眞假，並不依P的眞假而判定，因爲縱或P是假的，我也相信他，所以「我相信P」不是P的眞理函數．

凡是眞理的函數，全可以從一個眞理函數得出來．假若P同Q不相容——不相容就是兩個不能同時相對的意思——我們就要用左面的符號去表示他：

P／Q

上式的意思，就是表示P和Q不能同時相對，也就是說，或者P是錯的，或者Q是錯的，從這個函數裏面，可以推出別的函數來．如：

（一）P／Q的意義，或者P是錯的，就表明P是錯的，所以「P是錯的」或「非P」的關係，今另用符號（∽）去表他：

∽P ＝ 非P（P是錯的）＝ P／P *Df

*註 Df ＝ Definition 就是 P／P 的意思．

（二）$(P/P)/(Q/Q)$ 的意義，是P或Q是對的，也就是P和Q不能同時錯，也可以用符號去表示：

$$P^{v}Q = (P/P)(Q/Q) \quad \text{Df.}$$

$P^{v}Q$ 是表示P和Q「邏輯的和」(Logical Sum)

（三）$(P/Q)/(P/Q) = \sim(P/Q) =$ 非 $(P/Q) = P$ 同 Q

這個式子的意義，是P和Q全是對的，可以用左面的符號，去表示他：

$$P.\,Q = (P/Q)/(P/Q) \quad \text{Df.}$$

$P.\,Q$ 是表示P和Q「邏輯的積」(Logical Product)

我們現在看出符號的用處了，假若沒有符號，我們尋常談話：「今天是禮拜二，明天是禮拜三」在邏輯上，必得說：「或者今天不是禮拜二，或者明天不是禮拜三，和或者今天不是禮拜二或者明天不是禮拜三不相容」這個太費力，並且不易了解。

（四）$P/(Q/Q)$ 的意義，是「P」和「非Q」不相容，就是或者「P」是錯的，

或者「非Q」是錯的，換句話說，也就是或者「P」是錯的，或者「Q」是對的．所以：

$$P/(Q/Q) = \text{或}\ Q\ \text{非}\ P = \text{如若}\ P,\ \text{就是}\ Q.$$
$$= P\ \text{包含}\ Q.$$

現在用符號去表示：$P \supset Q = P/(Q/Q)$ Df.

（五） $P/(Q/r)$ 的意思，是說P包含Q和r，很容易的看出，所以我也不再多說．

研究數理邏輯，必得用幾個原理，去推論別的，像這樣推論原理（Deductive Principle），我們現在共有六個，前五個是形式的原理（Formal principle），後一個是非形式的原理（Informal Principle）：

（一） $P^{V} P \supset P$ 就是 ^{V}P 或 P，包含 P．

（二） $Q \supset P^{V} Q$ 就是如果Q，即 P 或Q．

(三) $P^{V}Q \sqcup Q^{V}P$ 就是如果P或Q，即Q或P

(四) $P^{V}(Q^{V}r) \sqcup Q^{V}(P^{V}r)$

(五) $(Q \sqcup r)$ $(P^{V}Q \sqcup P^{V}r)$，如果Q包含r，然後P或Q，就包含P或r，里柯氏(M. Nicod)說上面五個形式的原理，可以用一個形式的原理去包住如下：

今有五個命題：$P, Q, r, S, t.$

$P=P(Q/r)$ （P包含Q和r）；

$\pi=t(t/t)$ （t包含自己）；

$R=(P/S)(P/S)$ （P和S）；

$Q=(S/Q)/R$ （P和S包含S和Q）；

結果 $P/(\pi/Q)$ （P包含π和Q）。

除上面五個形式的原理以外，里柯氏還得到一個非形式的原理；

(六)假若我們知道P是對的，又知道P包含Q，那麼，我們就可以說，Q是對的。

用上面的種種符號，可以表出論理學上的法則，如：

矛盾律(Law of Contradiction)。「P」同「非P」不能同時存在，就是：

$$\sim(P \cdot \sim P)=P/(P/P)。$$

除中項律(Law of Excluded Middle)，或是「P」，或是「非P」，就是：

$$P \vee \sim P=(P/P)[(P/P)/(P/P)]=(P/P)./P$$

三段論法(Syllogism)，用符號表示出來，如左式：

$$(P \supset Q).(Q \supset r) \supset (P \supset r)$$

2.

〔這次講演以前，先由趙元任先生講這次所用的代替括弧的符號：一點 . 代( )，二點 : 代[ ]，三點 .: 代{ }……並舉一例子，如左：

$$4-\{[(2+3)\times(3+5)-12]\div5\}$$

即為 $4-\,:.:\,.2+3.\times.3+5.-12:\div\,:.5$〕

諸君：

兩個眞理函數，有叫作等値的 (Equivalent)．就是說，假若這個對，那個也就對；這個錯，那個也便錯．等値的關係，我們通常用(≡)符號去代表，所以：

$$(P\equiv Q)=(P\supset Q).(Q\supset P)$$

等値 (Equivalency) 有三種性質：

(一)返射(Reflexiveness)，就是 $P\equiv Q$

(二)對稱(Symmetry)，就是 $P\equiv Q.\supset.Q\equiv P.$

(三)移項(Transtiveness)．就是 $P \equiv Q \cdot Q \equiv r \supset \cdot P \equiv r$

上面所舉出的，第二種和第三種的性質，是獨立的，無關的，如：

a>b, b>c 所以 a>c 這是移項的，但不是對稱的，因爲：

a>b, 然後 b>a 是不對的，如 a 不像 b，然後 b 就不像 a，所以「不像」是對稱的，不是移項的．因爲如 a 不像 b，b 不像 c，我們不能就說 a 不像 c．第一種和第二種第三種是有關係的，如若第二種同第三種的性質存在，第一種性質也便存在．

數理邏輯中的「等值」，和尋常數學中「相等」(Equality) 是相當的．但在數學邏輯中，有左列之情形：

$$p \cdot \equiv \cdot p \vee p$$

$$p \cdot \equiv \cdot p \cdot p$$

在尋常代數中，我們知道左列兩式，是不對的：

$$X=X+X$$

$$X=X\cdot X$$

所以「邏輯的代數」(Logical Algebra)是「非數的」(Non-numerial)和尋常「數目的」代數，是不同的。

邏輯的代數之中，也有幾個定律，和尋常代數中的定律，是相當的：

(一)互換律(Commutative Law)，$p^{\vee}Q\cdot\equiv\cdot Q^{\vee}p$

$$p\cdot Q\cdot\equiv Q\cdot p$$

和左邊尋常代數中的互換律，是一樣的：

$$p+Q=Q+p,$$

$$p\times Q=Q\times p,$$

(二)聯合律(Associative Law)：

$$p^{\vee}(Q^{\vee}r)\cdot\equiv\cdot(p^{\vee}Q)^{\vee}r$$

$$p\cdot(Q.r)\cdot\equiv\cdot(p\cdot Q)\cdot r$$

和尋常代數中的定律，也是相同的。

(三)分配律 (Distributive Law)，這個定律有兩式：一式和尋常代數中的相同，如左列A；一式和尋常代數中的不相同，如左列B。

A.　$P.(Q \vee r) :\equiv: P \cdot Q \cdot \vee \cdot Q \cdot r$

$x(y+z)=xy+xz$(尋常代數的).

B.　$P \cdot \vee \cdot Q \cdot r :\equiv: (P \vee Q) \cdot (P \vee r)$.

$x+(y \times z)=(x+y)\times(x+z)$　(在尋常代數中，是不對的。)

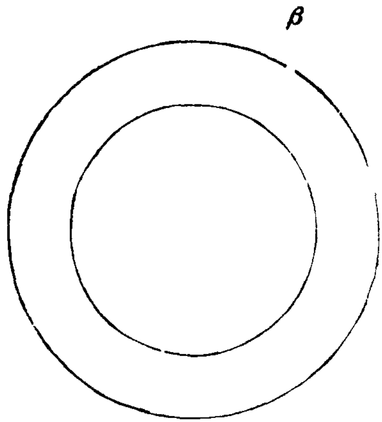
現在講「組的邏輯」(Logic of classes)。在這個講演裏面，以後凡組都用希臘字母——α，β，γ，δ，——去代表，我現在並先說明所用的幾種符號：如次頁的圖，α組全在β組之中，這種關係用$\sqsubset$符號去表示，所以：

$$\alpha \sqsubset \beta$$

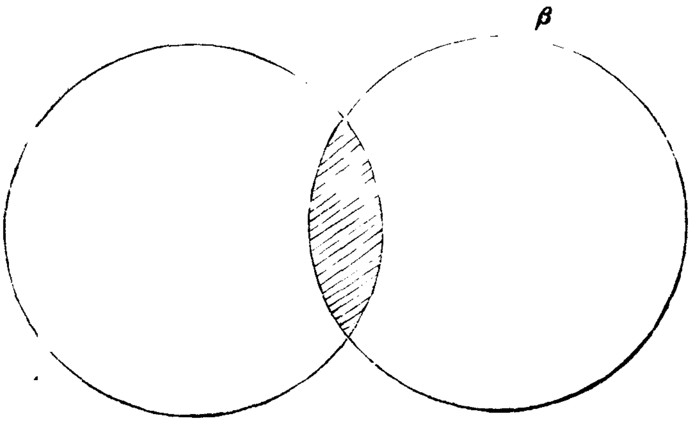
也就是說，凡α的「組員」(Member)全是β的「組員」。

組的乘法是：$\alpha \frown \beta$.

也就是說，這是α同β公共的部分，如次頁第二圖中描影的部分。



（第一圖）



（第二圖）