自然科学
论文集1988

ZIRAN KEXUE LUNWUNJI

目　录

自然数前n项的等幂和公式

杜日义

自然数前n项的等幂求和问题，很早以前就有研究。当K＝123时$S_K=\sum_{m=1}^{n} m^K$的计算公式古时侯即已求出。对于一般的K，十七世记雅各、伯努利（Jacgues、Bernourlli1654—1705）求得如下重要公式

$$S_K(n)=\frac{1}{K+1}\left[B_{K+1}(n+1)-B_{K+1}\right] \qquad (1)$$

其中 $B_{K+1}(n+H)$，B_{K+1}，分别由下列二式确定

$$\frac{xe^{xK}}{e^x-1}=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{B_K(y)}{K!}x^K$$

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{B_K}{K!}X^K$$

B_K在许多函数的展开式中出现，称为伯努利数。

但是用（1）求$S_K(n)$时，K较大时，计算量很大。由于组合数学的发展，近数年来又有许多数学家研究这个古老的问题，S、H斯科特在文献〔1〕中求出了$1\le K\le 13$的等幂和公式。我国数学家陈景润与黎鉴愚合作在献〔2〕〔3〕中求得了K从1到30的Sn（的计算公式。他们的方法是列举了30个公式，然后用数学归纳法加以证明。在文献〔4）中，他们又证明了：$S_{2K+1}(n)$是$\overline{n}^2$（$\overline{n}=n(n+1)$）与$\overline{n}$的K－1次多项式的乘积；$S_{2K}(n)$是$\overline{n}(2n+1)$与$\overline{n}$的K－1次多项式的乘积。本文是把他们的这一结果公式化了。因而求出了$S_{2K+1}(n)$与$S_{2K}(n)$的一般求和公式。并且在最后顺便找到了B_{2K}的表达式（$B_{2K+1}=0$ $K\geqslant 1$）。

（一）　$B_{K+1}(n)$的求和公式

引理1　设n、L都是正整数，则有

$$\sum_{j=1}^{L}\binom{L+1}{2(L-j)+1}\cdot S_{2j+1}(n)=\frac{1}{2}\overline{n}^{L+1} \qquad (2)$$

其中$\binom{m}{K}=\begin{cases}\dfrac{m!}{(m-K)!\,K!} & 当0<k\leqslant m时\\ 0 & 当K>m时\end{cases}$

证：n＝1时 由 $\sum_{j=1}^{L}\binom{L+1}{2(L-j)+1}=\frac{1}{2}\left[(1+1)^{L+1}-(1-1)^{L+1}\right]$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^{L+1}$$

知（2）当n＝1时正确

设（2）对n成立则

$$\sum_{j=1}^{L}\binom{L+1}{2(L-j)+1}S_{2j+1}(n+1)=\sum_{j=1}^{L}\binom{L+1}{2(L-j)+1}S_{2j+1}(n)$$

$$+\sum_{j=1}^{L}\binom{L+1}{2(L-j)+1}(n+1)^{2j+1}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{n}^{L+1}+(n+)^{L+1}\left[\sum_{j=1}^{L}\binom{L+1}{2(L-j)+)}(n+1^{2j-L}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\overline{n}^{L+1}+n+1)^{L+1}\cdot\frac{1}{2}\left[\left((n+1)+1\right)^{L+1}-\left((n+1)-1\right)^{L+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\overline{n}^{L+1}+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)^{L+1}-\frac{1}{2}\overline{n}^{L+1}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{(n+1)}^{L+1}$$

由数学归纳法知（2）对任何自然数n皆成立。

定理1　设n，K都是正整数，则有

$$S_{2K+1}(n)=\frac{\overline{n}^{2}}{2\cdot(K+1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j}(k-j)!\,D_j^{(K)}\,\overline{n}^{k-j-1} \qquad (8)$$

其中 $D_0^{K}=1$　　$D_1^{K}=\binom{K+1}{3}$

$$D_j^{(K)}=\begin{vmatrix}\binom{k-j+2}{3} & \binom{k-j+2}{1} & 0 & \cdots & 0\\ \binom{k-j+3}{5} & \binom{k-j+3}{3} & \binom{k-j+3}{1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \binom{k}{2j-1} & \binom{k}{2j-3} & \binom{k}{2j-5} & \cdots & \binom{k}{1}\\ \binom{k+1}{2j+1} & \binom{k+1}{2j-1} & \binom{k+1}{2j-3} & \cdots & \binom{k+1}{3}\end{vmatrix}$$

j＝2，3…（k－1）。

证：令（2）中L等于1 2…K得

$$\binom{2}{1}S_3(n) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{2}\overline{n}_2^2$$

$$\binom{3}{3}S_3(n) + \binom{3}{1}S_5(n) \qquad\qquad\qquad = \frac{1}{2}\overline{n}^3$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$\binom{k}{2k-3}S_3(n) + \binom{k}{2k-5}S_5(n) + \cdots + \binom{k}{3}S_{2K+1}(n) = \frac{1}{2}\overline{n}^K$$

$$\binom{k+1}{2k-1}S_3(n) + \binom{k+1}{2k-3}S_5(n) + \cdots + \binom{k1}{\vdots}S_{2K+1}(n = \frac{1}{2}\overline{n}^{K+1}$$

利用克莱姆（Gramer）法则

可得

$$S_{2K+1}(n) = \frac{\overline{n}_2^2}{2\,(K+1)!}\begin{vmatrix} \binom{2}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \binom{3}{3} & \binom{3}{1} & 0 & \cdots & 0 & \overline{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{k}{2k-3} & \binom{k}{2k-5} & \binom{k}{2k-7} & \cdots & \binom{k}{1} & \overline{n}^{K-2} \\ \binom{k+1}{2k-1} & \binom{k+1}{2k-3} & \binom{k+1}{2k-5} & \cdots & \binom{k+1}{3} & \overline{n}^{K-1} \end{vmatrix}$$

再按最后一行展开即得（3）

例　求 $S_5(n)$

解：　$D_0^{(2)} = 1 \qquad D_1^{(2)} = \binom{3}{3} = 1$

$$\therefore S_5(n) = \frac{\overline{n}_2^2}{2\cdot(2+1)!}(2!\,\overline{n} - 1!)$$

$$= \overline{n}_2^2\left(\frac{\overline{n}}{6} - \frac{1}{12}\right)$$

例　求 $S_9(n)$

解　$D_0^{(4)} = 1 \qquad D_1^{(4)} = \binom{5}{3} = 10 \qquad D_2^{(4)} = \begin{vmatrix} \binom{4}{3} & \binom{4}{1} \\ \binom{6}{6} & \binom{5}{3} \end{vmatrix} = 36$

$$D_3^{(4)} = \begin{vmatrix} \binom{3}{3} & \binom{3}{1} & 0 \\ \binom{4}{5} & \binom{4}{3} & \binom{4}{1} \\ \binom{5}{7} & \binom{5}{5} & \binom{5}{3} \end{vmatrix} = 36$$

$$\therefore S_9(n) = \frac{\overline{n}^2}{2\cdot 5!}\left[4!\,\overline{n}^3 - 3!\cdot 10\,\overline{n}^2 + 2! - 36\,\overline{n} - 36\right]$$

$$= \overline{n}^2\left[\frac{\overline{n}^3}{10} - \frac{\overline{n}^2}{4} + \frac{3}{10}\overline{n} - -\frac{3}{20}\right]$$

（二）$S_{2K}(n)$的求和公式

理2　　设 n，k 都是正整数，则有

$$\sum_{j=1}^{L}\begin{bmatrix} L+1 \\ 2(L-j)+1 \end{bmatrix} S_{2j}(n) = \frac{1}{2}\overline{n}^{L}\,(2n+1) \qquad (4)$$

其中$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$

证：n= 1时由 $\sum_{j=1}^{L}\begin{bmatrix} L+1 \\ 2(1-j)+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[(1+1)^{L}\cdot 3 - (1-1)^{1}\cdot 1\right]$

$$= \frac{1}{2}2^{L}\cdot 3$$

知（4）当n= 1时成立

设（4）对n成立，则

$$\sum_{j=1}^{L}\begin{bmatrix} L+1 \\ 2(1-j)+1 \end{bmatrix} S_{2j}(n+1=) \sum_{j=1}^{L}\begin{bmatrix} L+1 \\ 2(L-j)+1 \end{bmatrix} S_{2j}(n)$$

$$+ \sum_{j=1}^{L}\begin{bmatrix} L+1 \\ 2(L-j)+7 \end{bmatrix}(n+1)^{2j}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{n}^{L}(2n+1+(n+1)^{L}\left\{\sum_{j=1}^{L}\begin{bmatrix} L+1 \\ 2(L-j)+1 \end{bmatrix}(n+1)^{2j-L}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{n}^{L}(2n+1) + \frac{1}{2}(n+1)^{L}\left\{\Big((n+1)+1\Big)^{1}(2n+3)\right.$$

$$\left. = \Big((n+1)-1\Big)^{L}(2n+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)^{L}(n+2)^{L}(2n+3)$$

$$= \frac{1}{2}\overline{(n+1)}\,(2(n+1)+1)$$

由数学归纳法知（4）对所有自然数成立

定理2　　设n，k都是正整数，则有

$$S_{2K}(n) = \frac{\overline{n}(2n+1)}{2(2k+)!\,!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1^{j}\Big(2k-j)-)\Big)!\,!\,d_j^{(k)}\overline{n}^{k-j-1} \qquad (5)$$

其中　$d_0^{(K)} = 1$　　$d_1^{(K)} = \begin{bmatrix} k+1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$
d_j^{(K)}=\begin{vmatrix}
\genfrac[]{0pt}{}{k-j+2}{3} & \genfrac[]{0pt}{}{k-j+2}{1} & 0 & \cdots & 0 \\
\genfrac[]{0pt}{}{k-j+3}{5} & \genfrac[]{0pt}{}{k-j+3}{3} & \genfrac[]{0pt}{}{k-j+3}{1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\genfrac[]{0pt}{}{k}{2j-1} & \genfrac[]{0pt}{}{k}{2j-3} & \genfrac[]{0pt}{}{k}{2j-5} & \cdots & \genfrac[]{0pt}{}{k}{1} \\
\genfrac[]{0pt}{}{k+1}{2j-1} & \genfrac[]{0pt}{}{k+1}{2j-1} & \genfrac[]{0pt}{}{k+1}{2j-3} & \cdots & \genfrac[]{0pt}{}{k+1}{3}
\end{vmatrix}
$$

证：令（4）中L等于1，2，…K，得

$$
\begin{aligned}
&\genfrac[]{0pt}{}{2}{1}S_2(n) &&= \frac{1}{2}\bar{n}\,(2n+1)\\
&\genfrac[]{0pt}{}{3}{3}S_2(n)+\genfrac[]{0pt}{}{3}{1}S_4(n) &&= \frac{1}{2}\bar{n}^2\,(2n+1)\\
&\cdots\qquad\qquad\cdots &&\cdots\\
&\genfrac[]{0pt}{}{k}{2k-3}S_2(n)+\genfrac[]{0pt}{}{k}{2k-5}S_4(n)+\cdots+\genfrac[]{0pt}{}{k}{1}S_{2K-2}(n) &&= \frac{1}{2}\bar{n}^{K-1}\,(2n+1)\\
&\genfrac[]{0pt}{}{k+1}{2k-1}S_2(n)+\genfrac[]{0pt}{}{k+1}{2k-3}S_4(n)+\cdots+\genfrac[]{0pt}{}{k+1}{1}S_{2K}(n) &&= \frac{1}{2}\bar{n}^{K}\,(2n+1)
\end{aligned}
$$

利用克莱姆（Gramer）法则可得

$$
S_{2K}(n)=\frac{\bar{n}\,(2n+1)}{2\cdot(2x+1)!!}\begin{vmatrix}
\genfrac[]{0pt}{}{2}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
\genfrac[]{0pt}{}{3}{3} & \genfrac[]{0pt}{}{3}{1} & 0 & \cdots & 0 & \bar{n} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \\
\genfrac[]{0pt}{}{k}{2k-3} & \genfrac[]{0pt}{}{k}{2k-5} & & \cdots & \genfrac[]{0pt}{}{k}{1} & \bar{n}^{K-2} \\
\genfrac[]{0pt}{}{k+1}{2k-1} & \genfrac[]{0pt}{}{k+1}{2k-1} & & \cdots & \genfrac[]{0pt}{}{k+1}{3} & \bar{n}^{K-1}
\end{vmatrix}
$$

再按最后一列展开即得（5）

例　求 $S_4(n)$

解　$d_0^{(2)}=1$　　$d_1^{(2)}=\genfrac[]{0pt}{}{3}{3}=1$

$$\therefore\ S_4(n)=\frac{\bar{n}\,(2n+1)}{2\cdot 5!!}\left[3!!\,\bar{n}-1\right]$$

$$= \overline{n}(2n+1)\left[\frac{\overline{n}}{10} - \frac{1}{30}\right]$$

例 求 $S_{10}(n)$

解 $d_0^{(5)} = 1$ $\quad d_1^{(5)} = \begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = 30$

$$d_2^{(5)} = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 7 & 30 \end{vmatrix} = 357$$

$$d_3^{(5)} = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} \end{vmatrix} = 1575$$

$$b_4^{(5)} = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} \end{vmatrix} = 1575$$

$$S_{10}(n) = \frac{\overline{n}(2n+1)}{66}\left[3\overline{n}^4 - 10\overline{n}^3 + 17\overline{n}^2 - 15\overline{n} + 5\right]$$

定理3

设 $S_{2K} = n(2n+1)\sum_{j=0}^{K-1} A_j^{(K)}\, \overline{n}^{K-1}$

$S_{2K+1} = \overline{n}^2 \sum_{j=0}^{k+1} B_j\, \overline{n}_j^{K-1}$

则 $A_j^{(K)} = \frac{k-j+1}{2k+1} B_j$ （6）

证：由（3），（5）知

$$A_j^{(K)} = \frac{(-1)^j}{2\cdot(2k+1)!!}\left[2(k-j)-1\right]!!\,(k)_j^{(K)} \quad (7)$$

$$B_j^{(K)} = \frac{(-1)^j}{2\cdot(k+1)!}(k-j)!\,D_j^{(K)} \quad (8)$$

j= 0，1时，直接将$D_j(^{K})$ $b_j(^{K})$代入计算

即知(6)正确

j≥2时　由

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{j}=\binom{n-1}{j}+\binom{n}{j}=\frac{2n-j}{n}\binom{n}{j}$$知

$$b_j^{(K)}=\begin{vmatrix}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{k-j+2}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k-j+2}{1} & 0 & \cdots 0\\ \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k-j+3}{5} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k-j+3}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k-j+3}{1} & \cdots 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{2j-1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{2j-3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{2j-5} & \cdots \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{1}\\ \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k+1}{2j+1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k+1}{2j-1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k+1}{2i-3} & \cdots \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k+1}{3}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{2(k-j)+1}{k-j+2}\binom{k-j+2}{3} & \frac{2(k-j+2)+1}{k-j+2}\binom{k-j+2}{1} & 0 & \cdots 0\\ \frac{2(k-j+3)-5}{k-j+3}\binom{k-j+3}{5} & \frac{2(k-j+3)-3}{k-j+3}\binom{k-j+3}{3} & \frac{2(k-j+3)-1}{k-j+3}\binom{k-j+3}{1} & \cdots 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{2k-2j+1}{k}\binom{k}{2j-1} & \frac{2k-2j+3}{k}\binom{k}{2'-3} & \cdots & \frac{2k-1}{k}\binom{k}{1}\\ \frac{2k-2j+1}{k+1}\binom{k+1}{2j+1} & \frac{2k-2j+3}{k+1}\binom{k+1}{2j-1} & \cdots & \frac{2k-1}{k+1}\binom{k+1}{3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots(2k-2j+1)}{(k+1)\cdot k\cdots(k-j+2)}D_j^{(k)} \qquad (9)$$

将(9)代入(7)，(8)即可证得

当j2-时，(6)式也正确

由定理3知，如果求出了$S_{2K}(n)$的表示式即可

很容易的求得 $S_{2K+1}^{(n)}$ 的表达式，反之也一样。

(三) B_{2K}的表示式

设
$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_K}{k!}x^x \qquad (10)$$

$$\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_K(y)}{k!}x^K \qquad (11)$$

可以证明

$$B_K(1)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j\,y^{K-j} \qquad (12)$$

$$B^K(O)=B_K(1)=B_K \qquad (13)$$

$$B_{K-1}=-\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}B_j \qquad (14)$$

证明参见〔5〕

利用（12）（13）（14）容易求得

$$S_K(n)=\frac{1}{k+1}\Big[B_{K+1}(n+1)-B_{K+1}\Big]$$

$$=\frac{1}{k+1}\Big[n^{K+1}+\frac{1}{2}\binom{k+1}{1}n^K+\binom{k+1}{2}B_2n^{K-1}+\cdots+\binom{k+1}{j}B_jn^{k-j+1}+\cdots+\binom{k+1}{k}B_Kn\Big]$$

由于k≥1时　$B_{2K+1}=0$（众所周知）

所以$S_{2K+1}(n)=\frac{1}{2k+2}\Big[n^{2K+2}+\frac{1}{2}\binom{2k+2}{2}n^{2K+1}+\cdots+\binom{2k+2}{2k}n^2\Big]$

与（3）式比较n^2的系数，即得（k≥3）

$$B_{2K}=\frac{(-1)^{K-1}}{(2k+1)(k+1)!}D_{K+1}^{(K)}$$

$$=\frac{(-1)^{K-1}}{(2k+1)(k+1)}\begin{vmatrix}\binom{3}{3}&\binom{3}{1}&0&\cdots&0\\\binom{4}{5}&\binom{4}{3}&\binom{4}{1}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\\binom{k}{2k-3}&\binom{k}{2k-5}&\binom{k}{2k-7}&\cdots&\binom{k}{1}\\\binom{k+1}{2k-1}&\binom{k+1}{2k-3}&\binom{k+1}{2k-5}&\cdots&\binom{k+1}{2}\end{vmatrix}$$

例：

$$B_6=\frac{1}{7\cdot4!}\begin{vmatrix}\binom{3}{3}&\binom{3}{1}\\\binom{4}{5}&\binom{4}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{42}$$

$$B_8=\frac{-1}{9\cdot5!}\begin{vmatrix}\binom{3}{3}&\binom{3}{1}&0\\0&\binom{4}{3}&\binom{4}{1}\\0&\binom{5}{5}&\binom{5}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{30}$$

参考文献

[1] SH SCOtt Sums of powers of natural numbers by coeffielent operation Math Gazette 64 (1984) 23—239

[2] 陈景润黎鉴愚 关于自然数前n项的和厦门大学学报231 (1984) 2 134—14

[3] 陈景润黎鉴愚 关于幂和问题 科学通报 30 (1985) 4 316

[4] 陈景润黎鉴愚 关于幂和问题的进一步研究 科学通报 30 (1985) 17

[5] 陈景润著 組合數学 (河南教育出版社)

M－PN 空间上线性算子的概率范数

戴安顺

B、J、Prochaska〔1〕首先提出概率赋范空间上强有界线性算子概率范数的概念，后来，V. Radu〔2〕，龚怀云与林熙〔6〕等先后以不同方式定义了M－PN 空间上有界线性算子的概率范数，也有的数学工作者提出M－PN空间上线性算子概率范数的概念。本文是对M－PN空间上线性算子与有界线性算子的概率范数的几种不同定义进行比较，并作点注记。

定义，设E是实数域或复数域K上的线性空间，F是E到△＋的映射（△＋表示所有使得f（O）＝0的分布函数f之集），记F（p）＝fp（∀p∈E），fp（x）表示fp在x的值，它满足

1），$f_p(x)=h(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad P=Q,$

2），$f_{\alpha P}(x)=f_P\left(\frac{x}{|\alpha|}\right)$，对 $0\neq\alpha\in K$，

3），存在t-模τ，使得对∀ P，q∈E，$x\geq 0$，$y\geq 0$，

$$f_{p+q}(x+y)\geqslant\tau(f_p(x),\ f_q(y)),$$

则称（E、F、τ）为t－模τ下的Menger概率赋范线性空间，简记为M-PN空间。$f_p(x)$ 称为P的概率范数。

记L（E_1，E_2）为由M－PN空间（E_1，F_1，τ_1）到M－PN空间（E_2，F_2，τ_2）中的有界线性算子全体。

为了下面论述方便，首先给出结果：

定理、设T是从M－PN空间(E_1，F_1，τ_1）到M－PN空间（E_2，F_2，τ_2)的一个线性算子，则

$$F_T(x)\triangleq\sup_{t<x}\inf_{P\in E}\ F_{T(P)}(t)\qquad x\in R \tag{1}$$

是分布函数的充要条件是T为零算子。

证，充分性，设T为零算子，则 $F_T(x)=h(x)\in\triangle^+$，即 $F_T(x)$ 是分布函数，

必要性，设 $F_T(x)$是分布函数。则$\sup\limits_{x\in R} F_T(x)=1$，于是对$\forall\varepsilon>0$，存在M>0，当$x\geqslant M$时，有

$$F_T(x) \geq 1-\varepsilon \qquad (2)$$

对于$\forall \alpha > 0$，$P\in E$，当$t<\alpha$时，显然有

$$F_{T(P)}(\alpha) \geq \underset{t<\alpha}{\mathrm{SuP}} \inf_{p\in E_1} F_{T(q)}(t) \qquad (3)$$

取适合条件$K\alpha\geq M$的K，由不等式（2）、（3），对于每一个$P\in E$，有

$$F_{T(P)}(\alpha) = F_{KT(P)}(K\alpha) = F_{T(KP)}(K\alpha)$$

$$\geq \underset{t<K\alpha}{\mathrm{SuP}} \inf_{p\in E} F_{T(Q)}(t)$$

$$= F_T(K\alpha) \geq 1-\varepsilon$$

于是由ε的任意性知

$$F_{T(P)}(\alpha) = 1,\ \alpha > 0$$

又显然有

$$F_{T(P)}(\alpha) = 0,\ \alpha \leq 0$$

因此

$$F_{T(P)}(x) = h(x),\ P\in E,$$

这样一来，由（E_2，F_2，t_2）是M-PN空间得$T(P)=Q$，$P\in E$，即T是零算子，证毕。

由该定理可知文〔3〕、〔4〕中把（1）所界定的$F_T(x)$作为线性算子T的概率范数是错误的。

在文〔5〕中，关于M-PN空间上线性算子的概率范数定义如下：

定义1、设线性算子T映M-PN空间（E_1，F_1，t_1）入M-PN空间（E_2，F_2，t_2），令

$$F_T(x) = \begin{cases} \underset{t<x}{\mathrm{SuP}} \inf_{P\in E_1} P_{T(P)}(t), & x\in(-\infty,+\infty), \\ 0, & x=-\infty, \\ 1, & x=+\infty, \end{cases}$$

则称$F_T(x)$为T的概率范数。

在文〔6〕中，已未加任何说明地指出：用定义1界定的线性算子范数的是有某些缺陷。

按定义1界定的$F_T(x)$在扩大的实数轴上是一个分布函数，但由定理知：若T不是零算子，则$F_T(x)$在实数轴上就不是分布函数。由〔5〕知下列结果成立。

定理1、设（E_1，F_1，t_1），（E_2，F_2，t_2）都是M-PN空间，$\underset{x\in(0,1)}{\mathrm{SuP}}\, t_i(x,x)=1$，$i=1,2$。则（$L(E_1,E_2)$，$F$，$t_2$）是M-PN空间。其中对$\forall T\in L(E_1,E_2)$，其概率范数$F_T(x)$是按定义1给出。

据定理，容易证明由定理1给出的算子空间（$L(E_1,E_2)$，F，t_2）中的概率有界集（按通常概率有界集的定义）仅仅是一个由零算子组成的的集合,从而（$L(E_1,E_2)$，F，t_2）中任何含非零算子的集合均不是概率有界集。至此图可见，由定义1界定线性算子的概率范数有不少缺陷。

关于M－PN空间上有界线性算子的概率范数有如下二种定义。

定义2〔2〕、让（E_i，F_i，t_i）是M－P。空间（i＝1，2），T：$E_1 \to E_2$ 的界线性算子，A是E_1中概率有界的吸收子集，令

$$F_T^A(x)=\operatorname{SuP}_{t<x}\inf_{P\in A} F_{T(P)}(t)$$

则称$F_T^A(x)$为T的概率范数。

依〔2．定理1．1〕有

1）．$F_T^A \in V^+$；且

2）．（$L(E_1, E_2)$，F^A，t_2）是M－PN空间，其中

$$F^A(T)=F_T^A,\ T\in L(E_1, E_2)$$

定义3〔6〕，〔7〕设（E_i，F_i，t_i）是M－PN空间（i＝1，2），T：$E_1 \to E_2$的有界线性算子，N°为E_1中概率有界的0的邻域。令

$$F_T^{N^\circ}(x)=\operatorname{SuP}_{t<x}\inf_{P\in N^\circ} F_{T(P)}(t)$$

则称$F_T^{N^\circ}(x)$为T的概率范数

从文〔2〕、〔6〕中的结果可以看出由定义2或定义3界定的线性算子的概率范数都是恰当的，颇有意义的。由M－PN空间（E_1，F_1，t_1）中0的任意邻域都是吸收集，可知定义2是定义3的推扩。但是如果M－PN空间中任何概率有界的吸收子集总含有一个0的邻域这个性质成立（这是有待解决的问题）那么定义3是定义2的一个改进。由〔6．定理14可知，在线性赋范空间上，由定义2或定义3界定的算子概率范与一般的算子范数等价。

参考文献

〔1〕B.1.Prochaska, On random normed Space, A Dissertion subitted to the Faculty of Clemson University, 1967

〔2〕VRadu, On a random norm and continuity of linear operators on random normed space Soc Sci, Math R、S、Roumanic 17(1973),217－220

〔3〕屈瑞斌，林熙，概率范空间上的有界线性算子与全连续算子，西安交通大学学报

1（1987）

〔4〕林颐赋，概率赋范线性空间上线性算子的一些性质。南京师大学报（自然科学版 4（1985）

〔5〕林熙，概率赋范空间中的线性算子。第四次全国泛函分析会议论文（1986）

〔6〕龚怀云，林熙等，概率赋范空间上的线性算子，全国第二届不动点理论、概率度量空间理论学术会议交流论文，（1987）

〔7〕戴安顺，M-PN空间中的概率有界集与有界线性算子，宁夏大学学报自然科学版（待发表）

学思维

李思文

长期以来，我们一直以培养学生“三大能力”（计算能力，空间想象能力，逻辑思维能力）为中学数学教学主要目标，可是卅年来的实践表明，这个提法并没有给中学数学教学带来什么活力。再看国内各地教改经验，还没有听说哪一个是以培养学生“三大能力”为指导思想取得显著效果而闻名全国的，相反倒都是由于摆脱了传统教法的束缚，把能力培养主要落实在教学生会学，教学生思维上面才取得可喜的成绩。纵观国际上近十多年来关于能力的研究，也都是围绕“学思维”这个主题进行的。现在随着教学目的观的转变（由培养知识型人才转向培养智能型人才）把发展学生思维作为中学教学的主要目标应该说是时侯了。

对中学数学教学来讲，它在很大程度上就是解题教学，而解题离不开思维，因此学思维就应是解题教学的“灵魂”。可是世界上的事就是那么蹊跷，虚假的弄惯了，看到真的反而会瞠目结舌！是吗？天真的学生总以为老师真神，添辅助线总是“马到成功”，列方程总是“胸有成竹”。有的老师也认为数学是严谨的，怎能让学生乱猜？时间是有限的，怎能让学生胡想？与其让学生七嘴八舌探讨一题，还不如自己讲三题四题来得干脆，实惠。再者如果也讲自己碰过壁，甚至有时也糊涂过，那不有损自己的威信？其实这是误解。这个误解往往导致好学生越学越蠢，差学生越学越厌，教师威信越来越低。

很多优秀教师的经验表明，解题教学是最能激发学生兴趣，开发学生智力，培养学生欣赏数学美的教学。他们向学生展现的不光是解法，还有侦破解法的“破案史”。它有时是“山重水复”，有时是“柳暗花明”，有时是“曲径通幽”，有时是“波浪起伏”。许多数学家迷上数学就是从解题开始的。一般地讲，一个学生只要能完成数学作业，他就不会对数学课产生恶感或者厌恶情绪。苏霍姆林斯基说过，他从未给学生补过课。他的办法是给掉队的孩子一本特别的习题集，集中每个题目都是引人入胜的小故事。它们多数并不需要复杂的计算，主要是靠动脑子思考。“思考”把孩子领进一个有趣的天地，不知不觉使孩子们明白了：他也能解数学题。每解出一道题，他都感到是一次巨大的胜利。事实上苏氏办法就是教学生“学思维”。下面我们从几何、代数两方面谈谈如何教学生“学思维”。

（一）几何证题中如何帮助学生“学思维”？

下面让我们举个例子谈谈如何发挥数学的魅力，把学生带进“思考的王国”。

〔例一〕过正方形顶点A的直线MN ∥ BD，在MN上取一点E，使BE＝BD，BE交AD于F，求证DE＝DF。

1、从哪儿开始？

没有一个老师不会说解题从审题开始，但只要留心观察一下学生，情况就远不是那么简