投 人 产 出 分 析

黄 伟 峰　编

北 方 工 业 大 学

目　　录

第一章　全国价值型投入产出模型及应用

第二章　全国实物型投入产出模型及应用

第三章　投入产出表的编表方法

第四章　工业企业投入产出模型

附　　录

第一章　全国价值型投入产出模型及应用

§1. 投入产出方法发展概况

每个国家的国民经济中都包括许多部门。在生产建设中，各个部门间的生产和消耗有着密切的联系，有直接联系和间接联系。为了使国民经济能更快地发展，必须分析和了解各部门间的关系。使各部门的经济能够协调发展。投入产出方法就是分析各部门间数量依存关系的有效方法。

我国是一个社会主义国家，国民经济是有计划按比例发展的。投入产出方法在国民经济计划的制定、调整和进行经济分析中起着重要的作用。

在国民经济中，社会各部门进行物质生产时，需要消耗各种原料、材料、燃料、动力和劳动力等，称为投入。同时，各部门又生产出一定的产品(或提供生产性服务)，分配给其他部门用于消费、积累和出口等，称为产出。国民经济各部门的投入和产出是互相依存、互相制约的。投入产出方法就是将各部门的投入和产出编成表格，在一定的经济理论指导下，运用数学方法，使用电子计算机，分析和揭示国民经济各部门产品生产与消耗之间的数量依存和平衡关系。这种表格称为投入产出表。利用投入产出表可以编制和调整计划，可以进行综合平衡和经济预测。因此，投入产出方法是一种数量经济分析方法，是现代管理科学中的重要方法之一。

投入产出方法的产生，可以追溯到1758年法国经济学家弗拉索·奎奈(Francois Quesnay)发表的一张“经济表”，它揭示了经济活动过程中的依存关系。

1874年，瑞士里昂·瓦尔拉斯(Leon walras)在《纯政治经济学基础》一文中，阐述了“全部均衡理论”的主要思想。他指出，经济上各种现象是相互制约、相互依存的。

1924年，苏联中央统计局曾经编制了1923年—1924年国民经济平衡表。但是，他们还没有利用数学方法，系统地分析表中各产品间的投入产出数量关系。

美国经济学家瓦西里·列昂节夫(wassily Leontief)吸取苏联编制的经济平衡表的经验，首先提出投入产出方法。最初没有得到美国政府和经济界的重视，他依靠助手的帮忙，于1930年编制出美国1919年和1929年投入产出表，并于1936年在《经济与统计评论》上，发表了“美国经济系统中的投入和产出的数量关系”一文。列昂节夫不仅编制了投入产出表，而且建立了数学模型，提出理论分析方法。

第二次世界大战前后，由于美国和其他国家经济发展的需要，投入产出方法受到普遍的重视，得到广泛的应用。到1979年全世界有九十多个国家编制了投入产出表，取得

了很好的效果。由于列昂节夫在投入产出方面的创造性工作，1973年获得了诺贝尔经济学奖。

我国在六十年代初，有部分经济学家和理论工作者致力于投入产出方法的研究和推广工作中。1965年编制了鞍山钢铁公司的投入产出表，用于研究金属物料的平衡和管理、内部结算价格和产品出厂价格的制订等问题。1966年山西省准备编制地区投入产出表。1974年—1976年，在国家计算中心的主持和组织下，编制了我国《1973年国民经济投入产出表》(实物型)，并且计算出主要产品的直接消耗系数和间接消耗系数。为了研究我国国民经济调整的一系列问题，1980年—1981年编制了我国1979年投入产出估算表(价值型)。1982年—1983年在国家计委、国家统计局的组织下，编制了1981年实物型和价值型投入产出表。

我国部分省市、部和企业先后编制了各种类型的投入产出表，在经济分析和计划工作中得到广泛的应用。

§2. 全国价值型投入产出模型

为了说明问题方便，我们采用假设数据，并假定国民经济分为三个部门：工业部门、农业部门和其他部门。

例1—1.设调查收集到报告年各部门生产和消耗数据如下：

表1—1　　全国价值型投入产出表　　（单位：亿元）

		中间消耗（中间产品）				最终产品	总产品
		工业	农业	其他	小计		
生产部门（中间投入）	工业	4	1	0	5	15	20
	农业	2	2	2	6	4	10
	其他	4	0	2	6	4	10
	小　计	10	3	4	17		
固定资产折旧		2	2	3	7		
新创造价值	劳动报酬	4	3	2	9		
	社会纯收入	4	2	1	7		
总产品（总投入）		20	10	10	40		

表中的横粗线和纵粗线把表分成四个部分，如下图所示：

Ⅰ	Ⅱ
Ⅲ	Ⅳ

分别称四个部分为第Ⅰ象限、第Ⅱ象限、第Ⅲ象限和第Ⅳ象限。

第Ⅰ象限是一个正方形表格，其表头横行和纵列由相同个数按相同次序排列的生产部门构成。用于反映各个部门间的生产消耗关系；反映各部门间的生产技术联系。每一横行表示一个部门提供给各个部门用于生产消耗的产品（在价值型表中，产品均指产品的价值，仍简称为产品），称为部门间的流量。例如，上表的第一行表示，工业部门提供给工业部门、农业部门和其他部门用于生产消耗的产品分别是4亿元、1亿元、0亿元。其余各行也有类似的意义。每一纵列表示一个部门在生产中需要消耗各部门的产品，即各部门对该部门的产品投入，称为中间投入。例如，上表的第一列表示，工业部门在生产中需要消耗工业部门、农业部门和其他部门的产品分别为4亿元、2亿元、4亿元。

第Ⅱ象限用于反映每个生产部门提供的总产品和最终产品情况。所谓最终产品是指整个生产领域的最后成果，在本年度不再参加生产周转，而供积累、消费和出口等方面使用的产品。例如，第一行表示，工业部门本年度生产的总产品为20亿元，其中有15亿元的产品提供作为最终产品。

第Ⅰ、第Ⅱ象限综合起来，每一横行表示一个部门产品的产出和分配使用情况。例如，第一横行表示，工业部门本年度生产的产品总共为20亿元，其中用于工业部门、农业部门和其他部门生产中消耗的产品分别为4亿元、1亿元、0亿元；提供15亿元的最终产品。从第一行的数据可以得到下面的等式：

$$(4+1+0)+15=20$$

其余各行也有类似的关系式。

第Ⅲ象限反映各部门固定资产折旧和新创造价值的情况。新创造价值即指劳动报酬和社会纯收入（利润、税金等）。因此，第Ⅲ象限用于反映国民收入的初次分配情况。例如，第一列表示，工业部门所消耗的固定资产折旧费为2亿元，支付劳动报酬4亿元，为社会创造的社会纯收入为4亿元。固定资产折旧、劳动报酬和社会纯收入总称为原始投入。原始投入和中间投入总称为总投入。

第Ⅰ、第Ⅲ象限综合起来，每一纵列表示一个部门总产品的价值构成。例如，第一列表示，工业部门本年度总产品为20亿元，是由工业部门、农业部门和其他部门分别投入4亿元、2亿元、4亿元。除此以外，原始投入为固定资产折旧费2亿元、劳动报酬4亿元、社会纯收入4亿元。因此，总投入也为20亿元。可见，在投入产出表中，总产品列的数据与总投入行的数据是一一对应相等的。

第Ⅳ象限用于反映国民收入的再分配情况，目前编表时常常略去。

现在，我们来考虑一般的投入产出表，并用数学符号来表示。

设国民经济有n个生产部门，那么，全国价值型投入产出表的格式如下：

表1—2　　一般全国价值型投入产出表　　（单位：亿元）

		中间产品				最终产品	总产品
		1	2	……	n		
生产部门（中间投入）	1	X_{11}	X_{12}	……	X_{1n}	Y_1	X_1
	2	X_{21}	X_{22}	……	X_{2n}	Y_2	X_2
	⋮	……				⋮	⋮
	n	X_{n1}	X_{n2}	……	X_{nn}	Y_n	X_n
原始投入	固定资产折旧	D_1	D_2	……	D_n		
	劳动报酬	V_1	V_2	……	V_n		
	社会纯收入	M_1	M_2	……	M_n		
总投入		X_1	X_2	……	X_n		

其中　X_{ij}—第j部门消耗i部门的产品。

Y_i—第i部门提供的最终产品。

D_j—第j部门的固定资产折旧费。

V_j—第j部门支付的劳动报酬。

M_j—第j部门创造的社会纯收入。

X_i—第i部门生产的总产品(或总投入)。

称矩阵$(X_{ij})_{n\times n}$为流量矩阵，X_{ij}为第i部门到第j部门的流量。

在全国价值型投入产出表中从横行看，每个部门的总产品等于中间产品与最终产品之和。于是，有如下一组关系式：

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+\cdots\cdots+X_{1n}+Y_1=X_1 \\ X_{21}+X_{22}+\cdots\cdots+X_{2n}+Y_2=X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n1}+X_{n2}+\cdots\cdots+X_{nn}+Y_n=X_n \end{cases} \tag{1.1}$$

记作 $$\sum_{j-1}^{n} X_{ij}+Y_i=X_i \qquad (i=1,2,\cdots n) \tag{1.1}$$

从纵列看，每个部门的产品价值是由中间投入和原始投入构成的。于是，有如下一组关系式：

$$
\begin{cases}
X_{11}+X_{21}+\cdots\cdots+X_{n1}+D_1+V_1+M_1=X_1 \\
X_{12}+X_{22}+\cdots\cdots+X_{n2}+D_2+V_2+M_2=X_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_{1n}+X_{2n}+\cdots\cdots+X_{nn}+D_n+V_n+M_n=X_n
\end{cases}
\qquad (1.2)
$$

$$\text{记作}\quad \sum_{i=1}^{n} X_{ij}+D_j+V_j+M_j=X_j \quad (j=1,2,\cdots n)\ (1.2)$$

以上两组关系式是投入产出表中的基本关系式，也是投入产出分析的基础。

§3. 直接消耗系数

在投入产出表的两组基本关系式(1.1)(1.2)中，如果令

$$a_{ij}=\frac{X_{ij}}{X_j} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

称 a_{ij} 为第j部门对第i部门的直接消耗系数。它表示第j部门生产一个单位产品直接消耗第 i 部门产品的数量。它反映第j部门和第i部门的生产技术联系，因此，直接消耗系数也称为技术系数或投入产出系数(也称为单耗)。用例1—1的数据来说明，有

$$a_{11}=\frac{4}{20}=0.2 \qquad a_{12}=\frac{1}{10}=0.1 \qquad a_{13}=\frac{0}{10}=0$$

$$a_{21}=\frac{2}{20}=0.1 \qquad a_{22}=\frac{2}{10}=0.2 \qquad a_{23}=\frac{2}{10}=0.2$$

$$a_{31}=\frac{4}{20}=0.2 \qquad a_{32}=\frac{0}{10}=0 \qquad a_{33}=\frac{2}{10}=0.2$$

把上面数据排成一个矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \text{即}A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

称A为直接消耗系数矩阵。

一般国民经济含有n个部门的投入产出表的直接消耗系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

由直接消耗系数的定义很容易看出，直接消耗系数有如下性质：

$$(1)\qquad a_{ij}\geqslant 0 \qquad (i,j=1,2,\cdots n)$$

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}<1 \qquad (j=1,2,\cdots n)$$

直接消耗系数a_{ij}的大小，取决于以下几个因素：

(1) 该部门的技术水平和管理水平；

(2) 该部门的产品结构。当一个部门生产若干种产品时，不同产品对其他产品的消耗水平相差很大。所以该部门的产品结构发生变化时，直接消耗系数也往往产生变化；

(3) 价格的变动。价值型投入产出表受价格的影响很大，价格的变动使直接消耗系数产生变化。

由直接消耗系数的定义可得

$$X_{ij}=a_{ij}X_j \qquad (i,j=1,2,\cdots\cdots n)$$

代入投入产出基本关系式(1.1)得：

$$\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+\cdots\cdots+a_{1n}X_n+Y_1=X_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+\cdots\cdots+a_{2n}X_n+Y_2=X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}X_1+a_{n2}X_2+\cdots\cdots+a_{nn}X_n+Y_n=X_n \end{cases}$$

即 $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underset{g_j}{\underline{X_j}}+Y_i=\underline{X_i} \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

用矩阵表示为

$$\underset{n\times n}{A}\underset{n\times 1}{X}+\underset{n\times 1}{Y}=\underset{n\times 1}{X}$$

其中

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad (I-A)X=Y \qquad (1.3)$$

其中 I 为n阶单位矩阵。称(I − A)为列昂节夫矩阵。

(1.3)式是投入产出模型的矩阵形式，它是投入产出分析的重要关系式。

在投入产出模型中，(I − A)是可逆矩阵。事实上，设(I − A)是不可逆矩阵，

则 $|I-A|=0$

∴ (I − A)的所有行向量线性相关，

即存在不全为0的实数d_1，d_2，……d_n。使

$$(d_1 d_2 \cdots\cdots d_n)\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

设 $\max\limits_{(1\leqslant i\leqslant n)} |d_i| = |d_k|$ 则有

$$d_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ik} d_i = 0$$

$$\therefore \left|d_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} d_{ik} d_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|a_{ik} d_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|d_i\right|$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)|d_k| < |d_k|$$

这一矛盾证明了(I − A)是可逆矩阵。

由于(I − A)是可逆矩阵，(1.3)式可以化为

$$X=(I-A)^{-1}Y \qquad (1.4)$$

在投入产出分析中，如果已知最终产品列向量 Y，我们可以利用 (1.4) 式求出总产品列向量X。

用例1—1的数据来说明，列昂节夫矩阵为

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

由此，$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1.28 & 0.16 & 0.04 \\ 0.24 & 1.28 & 0.32 \\ 0.32 & 0.04 & 1.26 \end{pmatrix}$

矩阵$(I-A)^{-1}$的经济意义是：它的第j列表示为了得到j部门一个单位的最终产品，j部门对各部门产品的需求量。例如在上面例1—1中，第1列表示工业部门为了得到一亿元的最终产品，工业部门、农业部门和其他部门分别要生产1.28亿元、0.24亿元和0.32亿元的总产品。第2列和第3列分别表示为了得到农业部门和其他部门各一亿元的最终产品，各部门必需提供的总产品数量。

把$X_{ij}=a_{ij}X_j$代入投入产出基本关系式(1.2)，则可化为

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}X_j+D_j+V_j+M_j=X_j \qquad (j=1,2,\cdots\cdots n)$$

记 $D=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$ $V=\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$ $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$

$$\hat{C}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} a_{i2} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} \end{pmatrix}$$

则上式可用矩阵表为

$$\hat{C}X+D+V+M=X$$

$$\therefore \quad (I-\hat{C})X=D+V+M$$

很容易得出，$(I-\hat{C})$是可逆矩阵。

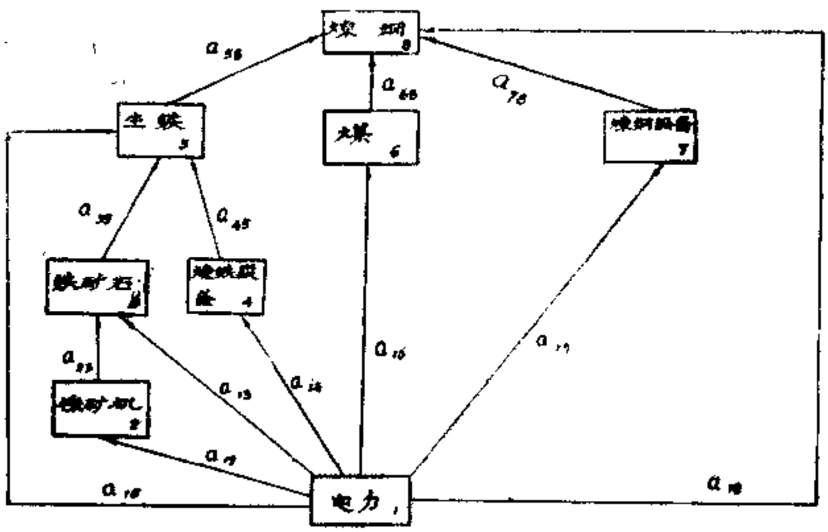
$$\therefore \quad X=(I-\hat{C})^{-1}(D+V+M)$$

这是投入产出基本关系式(1.2)的另一种表示方式。

矩阵$\hat{C}$称为中间投入系数矩阵或劳动对象投入系数矩阵。$\hat{C}$是一个对角矩阵，主对角线元素$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$表示，第j部门的中间投入在总投入中的比重。

§ 4. 完全消耗系数

国民经济各个部门之间的物质消耗，不仅存在直接消耗关系，而且存在间接消耗关系。例如在炼钢过程中，要直接消耗电力、生铁、煤和炼钢设备。只对电力而言，炼钢对电力有直接消耗关系。但生产生铁、煤和炼钢设备，又都需要直接消耗电力。这样，炼钢通过直接消耗生铁、煤和炼钢设备，间接地又消耗了电力，称为炼钢对电力的一次间接消耗。同样地，炼钢对电力还有二次间接消耗、三次间接消耗等等。用下图表示直接消耗和间接消耗的关系。



图中分别用数字 1 — 8 代表各个生产部门。例如用 1 表示电力部门，用 2 表示采矿机部门等等。用a_{ij}($i,j=1,2,\cdots\cdots8$)表示第j部门对第i部门的直接消耗系数。例如，a_{18}表示炼钢对电力的直接消耗系数，a_{58}表示炼钢对生铁的直接消耗系数，a_{45}表示生铁对炼铁设备的直接消耗系数等等。

称炼钢对电力的一次间接消耗、二次间接消耗、……的和为炼钢对电力的间接消耗。称炼钢对电力的直接消耗与间接消耗的和为炼钢对电力的完全消耗。生产一个单位的钢铁对电力的完全消耗称为炼钢对电力的完全消耗系数。一般地，可用类似方法定义第j部门对第i部门的间接消耗、完全消耗和完全消耗系数。用b_{ij}表示第j部门对第i部门的完全消耗系数。

$$
记\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

称B为完全消耗系数矩阵。

现在说明完全消耗系数 b_{ij} 的求法。首先，根据上图来求炼钢对电力的完全消耗系数b_{18}。因为生产一个单位的钢铁需要直接消耗 a_{18} 单位的电力，对电力的一次间接消耗为

$$(a_{15}a_{58}+a_{16}a_{68}+a_{17}a_{78})$$

二次间接消耗为

$$(a_{13}a_{35}a_{58}+a_{14}a_{45}a_{58})$$

三次间接消耗为 $(a_{12}a_{23}a_{35}a_{58})$

所以，按上图炼钢对电力的完全消耗系数为

$$b_{18}=a_{18}+(a_{15}a_{58}+a_{16}a_{68}+a_{17}a_{78})+(a_{13}a_{35}a_{58}+a_{14}a_{45}a_{58})$$
$$+(a_{12}a_{23}a_{35}a_{58})$$

由此可见，如果国民经济中有n个部门，则

$$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}+\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{km}a_{mj}+\cdots\cdots \quad (i,j=1,2,\cdots n)$$

用完全消耗系数矩阵B和直接消耗系数矩阵A表示，则上式可表为：

$$B=A+A^2+A^3+\cdots\cdots$$

可以证明： $$B=A+A^2+A^3+\cdots\cdots=(I-A)^{-1}-I \qquad (1.6)$$

我们也可以从完全消耗系数定义得出下式：

$$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj} \qquad (i,j=1,2,\cdots\cdots n)$$

用矩阵表示为

$$B=A+BA$$

$$\therefore \quad B(I-A)=A$$

$$\therefore \quad B=A(I-A)^{-1}=[I-(I-A)](I-A)^{-1}$$
$$=(I-A)^{-1}-I$$

同样得到(1.6)式。比较矩阵A和B，可以得到

$$a_{ij}\leqslant b_{ij} \qquad (i,j=1,2,\cdots\cdots n)$$

上式的经济意义是很显然的，它表示第j部门生产一个单位的产品完全消耗第i部门产品，不少于第j部门生产一个单位的产品直接消耗第i部门的产品。

用例1—1的数据来说明，已知

$$A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1.28 & 0.16 & 0.04\\ 0.24 & 1.28 & 0.32\\ 0.32 & 0.04 & 1.26\end{pmatrix}$$

则 $$B=(I-A)^{-1}-I=\begin{pmatrix}1.28 & 0.16 & 0.04\\ 0.24 & 1.28 & 0.32\\ 0.32 & 0.04 & 1.28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.28 & 0.16 & 0.04\\ 0.24 & 0.28 & 0.32\\ 0.32 & 0.04 & 0.26\end{pmatrix}$$

即得所求的完全消耗系数矩阵。矩阵B的经济意义是：第一列表示工业部门为了得到1亿元的产品，工业部门要完全消耗工业部门、农业部门和其他部门的产品分别为0.28亿元、0.24亿元和0.32亿元。这样，为了得到工业部门1亿元的最终产品，工业部门、农业部门和其他部门分别要提供1.28亿元、0.24亿元和0.32亿元的总产品。矩阵B的其余各列也有类似的经济意义。 $1.28=1+0.28$

矩阵$(B+I)=(I-A)^{-1}$称为完全需要系数矩阵。以例1—1的数据来说明，

$$B+I=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1.28 & 0.16 & 0.04\\ 0.24 & 1.28 & 0.32\\ 0.32 & 0.04 & 1.26\end{pmatrix}$$

§5．全国价值型投入产出模型的应用

投入产出模型已经广泛应用于经济活动分析中，主要是用于国民经济计划的编制、调整和经济预测中，下面从几个方面来说明投入产出模型的主要应用：

(1)应用模型$X=(I-A)^{-1}Y$编制计划

如果我们利用报告年的具体数据，编制了该年的投入产出表，得到了直接消耗系数矩阵A。当计划年离报告年很近，经济活动中又没有发生重大的变化，可以认为经济发展具有稳定性。因此，直接消耗系数矩阵A没有发生大的变动，可以用A作为计划年的

直接消耗系数矩阵。这样，就可以应用模型$X=(I-A)^{-1}Y$编制计划年的国民经济计划。一般地，国家根据社会需求和计划年各方面的情况，确定最终产品列向量Y^*，作为编制计划的出发点。利用$X^*=(I-A)^{-1}Y^*$即得计划年总产品列向量，再由$(X^*_{ij})=A\hat{X}^*$即得计划年的流量矩阵(X^*_{ij})，综合其他有关数据编制计划年的投入产出表。

用例1—1的数据来说明。设我们已经编制了报告年的投入产出表（见表1—1），得到直接消耗系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$$

而且A可以用于计划年(比如下一年)。计划年的最终产品列向量确定为

$$Y^*=\begin{pmatrix}16\\ 5\\ 5\end{pmatrix}$$

那么，我们可以先求出计划年的总产品列向量X^*。

$$\because\quad (I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1.28 & 0.16 & 0.04\\ 0.24 & 1.28 & 0.32\\ 0.32 & 0.04 & 1.26\end{pmatrix}$$

$$\therefore X^*=(I-A)^{-1}Y^*=\begin{pmatrix}1.28 & 0.16 & 0.04\\ 0.24 & 1.28 & 0.32\\ 0.32 & 0.04 & 1.26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\ 5\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21.48\\ 11.84\\ 11.62\end{pmatrix}$$

以上结果说明，为了保证计划年工业部门、农业部门和其他部门分别提供16亿元、5亿元和5亿元的最终产品，工业部门、农业部门和其他部门必须生产的总产品分别为21.48亿元、11.84亿元和11.62亿元。

其次，我们可以求计划年流量矩阵(X^*_{ij})，从而得到每一部门必须向各部门提供的中间产品。

$$记\quad \hat{X}^*=\begin{pmatrix}21.48 & 0 & 0\\ 0 & 11.84 & 0\\ 0 & 0 & 11.62\end{pmatrix}$$

$$则\ (X^*_{ij}) = A\hat{X}^* = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21.48 & 0 & 0 \\ 0 & 11.84 & 0 \\ 0 & 0 & 11.62 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4.296 & 1.184 & 0 \\ 2.148 & 2.368 & 2.324 \\ 4.296 & 0 & 2.324 \end{pmatrix}$$

第一行的数字表示，为了保证计划年生产出所需的最终产品，工业部门必须向工业部门、农业部门和其他部门分别提供4.296亿元、1.184亿元和0亿元的中间产品。

我们还需要了解计划年各部门的原始投入数据，才能编制计划年投入产出表。为此，可先求出报告年各部门固定资产折旧、劳动报酬和社会纯收入占该部门总产品的比值，分别称为固定资产折旧系数、劳动报酬系数和社会纯收入系数。用公式表示为

$$\frac{D_j}{X_j}, \quad \frac{V_j}{X_j}, \quad \frac{M_j}{X_j} \quad (j=1,2,3)。$$

$$即 \quad \frac{D_1}{X_1} = \frac{2}{20} = 0.1; \quad \frac{D_2}{X_2} = \frac{2}{10} = 0.2; \quad \frac{D_3}{X_3} = \frac{3}{10} = 0.3;$$

$$\frac{V_1}{X_1} = \frac{4}{20} = 0.2; \quad \frac{V_2}{X_2} = \frac{3}{10} = 0.3; \quad \frac{V_3}{X_3} = \frac{2}{10} = 0.2;$$

$$\frac{M_1}{X_1} = \frac{4}{20} = 0.2; \quad \frac{M_2}{X_2} = \frac{2}{10} = 0.2; \quad \frac{M_3}{X_3} = \frac{1}{10} = 0.1。$$

用矩阵表示为

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

称P为原始投入系数矩阵。我们可以认为原始投入系数矩阵P也可用于计划年。由此即可求出计划年各部门的固定资产折旧、劳动报酬和社会纯收入的数据。

$$\because \quad P\hat{X}^* = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21.48 & 0 & 0 \\ 0 & 11.84 & 0 \\ 0 & 0 & 11.62 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.148 & 2.368 & 3.486 \\ 4.296 & 3.552 & 2.324 \\ 4.296 & 2.368 & 1.162 \end{pmatrix}$$

这就是计划年的原始投入矩阵。它的第一列表示，计划年内工业部门的固定资产折旧、劳动报酬和社会纯收入分别为2.148亿元、4.296亿元和4.296亿元。

综合以上数据，得计划年投入产出表如下：

表1—3　　计划年投入产出表　　（单位：亿元）

		中间产品			最终产品	总产品
		工业	农业	其他		
生产部门	工业	4.296	1.184	0	16	21.48
	农业	2.148	2.368	2.324	5	11.84
	其他	4.296	0	2.324	5	11.62
固定资产折旧		2.148	2.368	3.486		
新创造价值	劳动报酬	4.296	3.552	2.324		
	社会纯收入	4.296	2.368	1.162		
总产品		21.48	11.84	11.62		

(2)应用模型$X=(I-A)^{-1}Y$调整计划

在国民经济计划的执行过程中，可能出现某种先进技术、新产品、原材料供应的变化或某种意料不到的变动，使原计划已经不能适应新的形势。这时，计划必须进行调整，才能保证各部门经济的协调发展。投入产出模型是调整计划的有效工具。

设Y_i^{*}和Y_i分别是i部门最终产品的新计划量和原计划量，那么，需要调整的最终产品量为

$$\Delta Y_i = Y_i^{*} - Y_i \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

$\Delta Y_i>0$、$\Delta Y_i=0$、$\Delta Y_i<0$分别表示第i部门的最终产品量需要增加、不变、减少。

设X_i^{*}和X_i分别是第i部门总产品的新计划量和原计划量，那么，需要调整的总产品量为

$\Delta g_i = X^{*}-X_i$

$$\Delta X_i = X_i^{*} - X_i \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

用ΔX和ΔY分别表示总产品和最终产品的调整列向量。即

$$\Delta X=\begin{pmatrix}\Delta X_1\\ \Delta X_2\\ \vdots\\ \Delta X_n\end{pmatrix},\quad \Delta Y=\begin{pmatrix}\Delta Y_1\\ \Delta Y_2\\ \vdots\\ \Delta Y_n\end{pmatrix}$$

则 $$\triangle X = (I-A)^{-1}\triangle Y$$

由此，当最终产品调整列向量为$\triangle Y$时，即可求得总产品的相应调整列向量$\triangle X$。

用例1—1的数据来说明。假设由于某种原因，上面所编制的计划年投入产出表（表1—3）必须调整。已知工业部门的最终产品需减少5亿元；农业部门的最终产品需增加2亿元；其他部门的最终产品保持不变。那么，计划年的投入产出表应该怎样进行调整呢？

$$\because \quad \triangle Y = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \triangle X = (I-A)^{-1}\triangle Y = \begin{pmatrix} 1.28 & 0.16 & 0.04 \\ 0.24 & 1.28 & 0.24 \\ 0.32 & 0.04 & 1.26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.08 \\ 1.36 \\ -1.52 \end{pmatrix}$$

于是计划调整后，总产品列向量为

$$X^* = X + \triangle X = \begin{pmatrix} 21.48 \\ 11.84 \\ 11.62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6.08 \\ 1.36 \\ -1.52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.4 \\ 13.2 \\ 10.1 \end{pmatrix}$$

计划调整后，最终产品列向量为

$$Y^* = Y + \triangle Y = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

现在可以求出计划调整后的流量矩阵(X_{ij}^*)为

$$(X_{ij}^*) = A\hat{X}^* = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.4 & 0 & 0 \\ 0 & 13.2 & 0 \\ 0 & 0 & 10.1 \end{pmatrix}$$

$A\hat{Q}^*$

$$= \begin{pmatrix} 3.08 & 1.32 & 0 \\ 1.54 & 2.64 & 2.02 \\ 3.08 & 0 & 2.02 \end{pmatrix}$$