新數學

中學適用

半羣學社編著

第三册

下卷

聯合書院出版社

新數學

中學適用

半羣學社編著

第三冊

下卷

聯合書院出版社

總編輯

周紹棠 理學士（數學），哲學博士（數學）

編輯

潘海紅 理學士（數學）

鄭肇楨 文學士（數學）

潘煒棠 文學士（數學）教育文憑

T. McC. Chamberlain 文學碩士(數學)，教育學士

何兆倫 理學士（數學），英國 IMA 會士

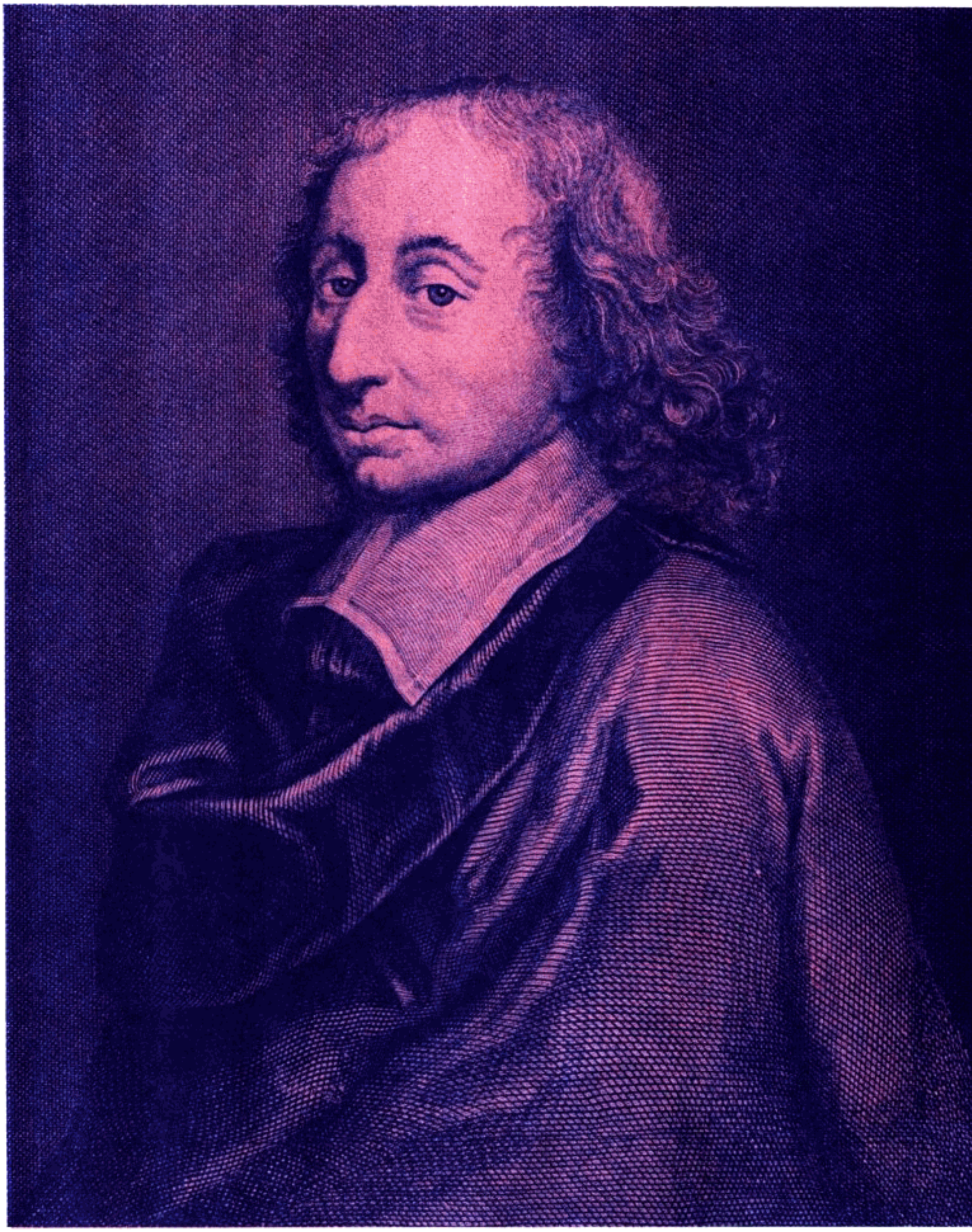
潘鎭邦 文學士（數學）

徐思明 文學士（數學） 教育文憑

經理編輯

彭錫恩 文學士

良友印刷有限公司印製
香港西灣河街九至十一號



拜來斯 • 巴斯加
Blaise Pascal
(1623–1662)

拜來斯·巴斯加

(1623—1662)

巴斯加比一般傑出的數學家短命，且在一生中健康不佳。在他短短的一生中，又在健康情況不良之下能够對數學及自然科學有這樣大的貢獻，實在是非常難能可貴的。

巴斯加出生於法國，在他孩童時代，他的天才已很著名。在他十六歲時已寫了一本關於圓錐曲綫的書；幾年後他發明了一架計算機，這就是現已流行於商業界的計算機的前身。在他還未到二十歲時，已參加每週一次的數學研討會；這些研討會是巴黎的天才的集會，用來報導他們的發明以及研討别人的成就的。

巴斯加對於當時數學的各門都有涉及，並有顯著的貢獻，他對物理亦有顯著的貢獻。假如他能够活得長壽則他的成就更不止此。

第三册
下卷目錄

5

第 五 章

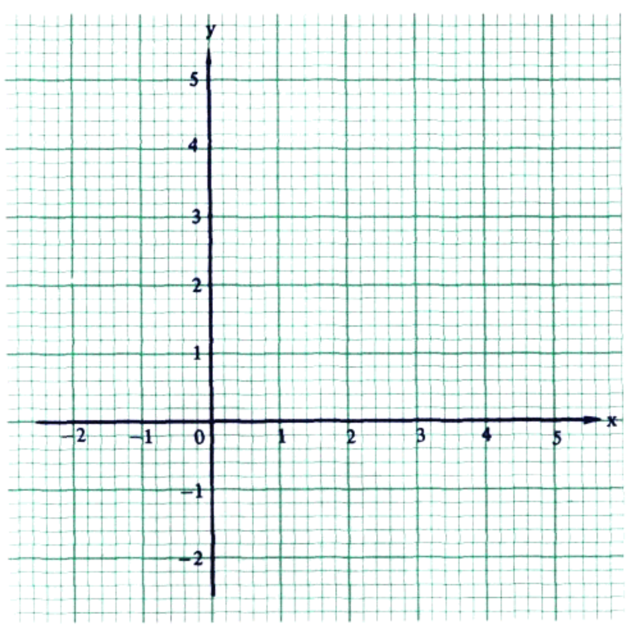
解 析 幾 何 I

在本書第一冊節 2.3，我們曾學過直角坐標，又在第二冊節 4.3 再學過直角坐標標，並用一集序偶來表示關係。在本章裏我們將應用坐標來研究幾何，這種幾何稱爲解析幾何。這裏我們將全用直角坐標系，坐標系所在的平面稱爲卡氏平面。

5.1 面積及距離

5.11 兩點間的距離

5.1



在圖 5.1 的方格紙上畫出坐標軸和兩點 A(1, 1) 及 B(5, 4)•聯 AB ，用方格紙上的單位來量度 AB 的長度•過 A 作綫平行 x 軸，過 B 作綫垂直 x 軸，兩綫交於 R，則 R 的坐標是甚麼？AR 和 BR 的長度是甚麼？ΔABR 是一個直角三角形，試計算 $\sqrt{AR^2 + BR^2}$ 並比較 AB 的長度•

如圖 5.2，設 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是坐標平面上兩點，作 P_1Q 垂直 x 軸，作 P_2Q 平行 x 軸，二綫交於 Q，則 ΔP_1P_2Q 是一個直角三角形•

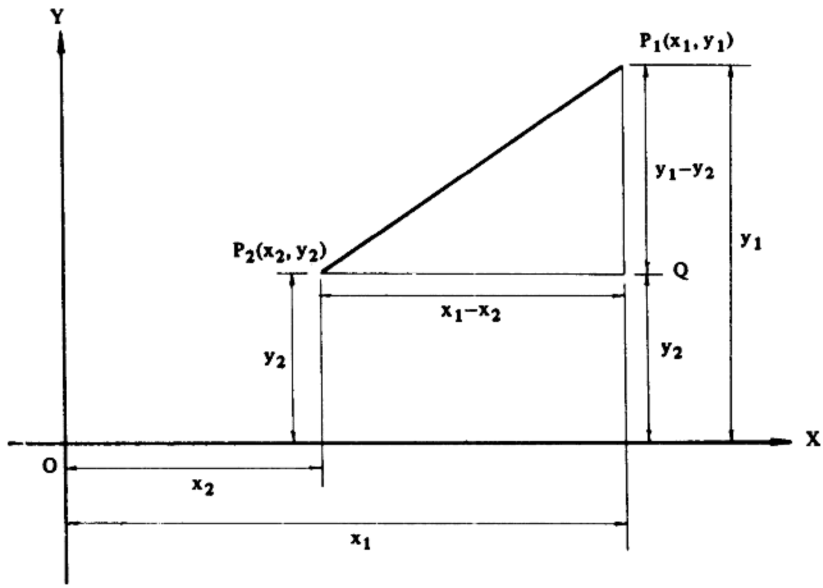


圖 5.2

由畢氏定理：

$$P_1P_2 = \sqrt{P_1Q^2 + P_2Q^2}.$$

而

$$P_1Q = y_1 - y_2$$

$$P_2Q = x_1 - x_2$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \quad .... \quad (1)$$

討論：

i) 若 P_1 P_2 位置互調，這公式仍成立嗎？

ii) 若 P_1, P_2 在其他象限內，(1) 式仍成立嗎？

例 1

試求兩點A(−3, 5)和B(2, −7)的距離•

解：

$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(-3-2)^2 + (5-(-7))^2} \\
&= \sqrt{25+144} \\
&= \sqrt{169} \\
&= 13.
\end{aligned}
$$

例 2

試求下列每對點間的距離：

i) (2, −3), (−4, −1)　　ii) (0, 7), (−5, 3)

5.12 三角形的面積

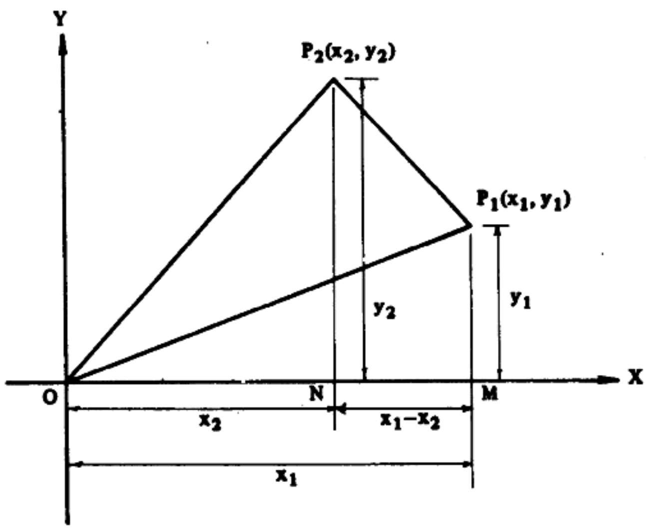


圖 5.3

如圖 5.3，ΔOP_1P_2 的一頂在原點O上，P_1，P_2 的坐標依次是 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 作 P_1M, P_2N 垂直x 軸•

$$\Delta OP_1P_2 = \Delta ONP_2 + \text{梯形 } NMP_1P_2 - \Delta OMP_1$$

而

$$
\begin{aligned}
\text{梯形 } NMP_1P_2 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2)
\end{aligned}
$$

$$\triangle OMP_1 = \frac{1}{2}x_1y_1$$
$$\triangle ONP_2 = \frac{1}{2}x_2y_2$$
$$\therefore \quad \triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 - x_1y_1)$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

討論：若將 P_1， P_2 的位置互調則 $\triangle OP_1P_2$ 的數值等於甚麼？

例 1

求圖 5.4. 內$\triangle OAB$的面積。

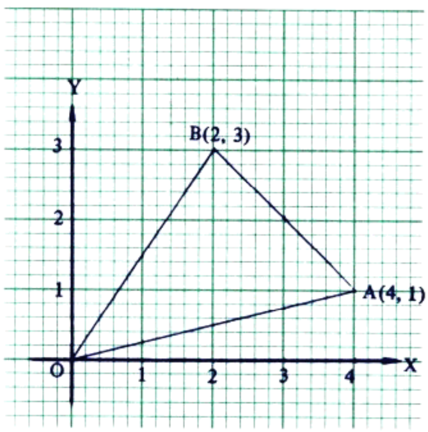


圖 5.4

解：

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}(4 \times 3 - 1 \times 2)$$
$$= \frac{1}{2}(12 - 2)$$
$$= 5 \text{ 平方單位}$$

而

$$\triangle OBA = \frac{1}{2}(2 \times 1 - 3 \times 4)$$
$$= -5 \text{平方單位}$$

由例 1 知若三角形頂點的次序是照反時鐘方向的，則計算得的面積是正；若次序是順時鐘的，則面積是負。幾何圖形的面積在普通情形下祇取正值，故計算時頂點次序取反時鐘方向。

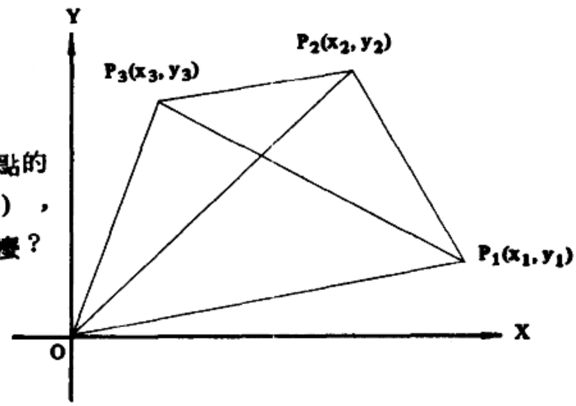
例2

已知下列各三角形的頂點，試求面積：

i) (0, 0), (2, 7), (5, 4)

ii) (0, 0), (1, 8), (6, 3)

iii) (0, 0), (3, −2), (−5, −7)



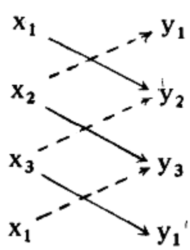
如圖 5.5，設$\Delta P_1P_2P_3$ 三頂點的坐標是 $P_1(x_1, y_1)$， $P_2(x_2, y_2)$ ，P_2 (x_3, y_3)這三角形的面積是甚麼？

聯 OP_1 OP_2 及 OP_3，則

圖 5.5

$$
\begin{aligned}
\Delta P_1P_2P_3 &= \Delta OP_1P_2 + \Delta OP_2P_3 - \Delta OP_1P_3 \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) - \frac{1}{2}(x_1y_3 - x_3y_1) \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)
\end{aligned}
$$

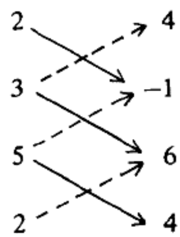
要記憶這結果，可將各點坐標列成下面次序，依着由左至右向下的直綫，將兩數相乘，然後相加；依着由左至右向上的虛直綫將兩數相乘，變號相加，則兩數的和之半便是三角形的面積。



例 3

試求以 (2, 4), (5, 6) 及 (3, −1)爲頂的三角形的面積。

解：　先畫出各點如圖 5.6



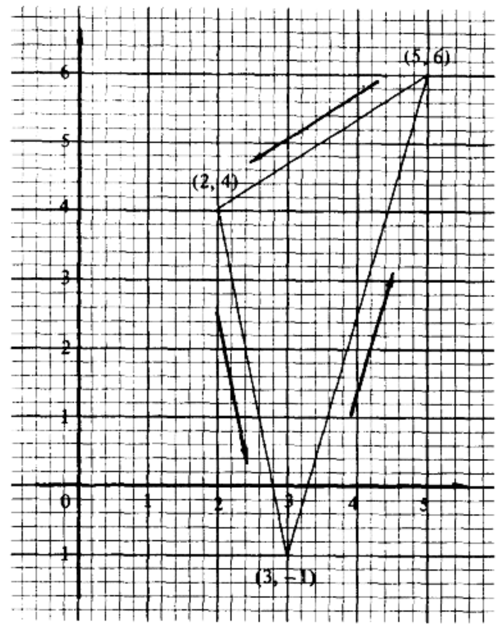


圖 5.6

三角形面積 $= \frac{1}{2}[2\times(-1) + 3\times6 + 5\times4 - 3\times4 - 5\times(-1) - 2\times6]$

$= 8\frac{1}{2}$ 面積單位。

例 4

求以下列各點爲頂的三角形的面積：

i)　(−3, 4), (3, 1), (0, −2)　　ii)　(5, 1), (2, −3), (−2, −4)

討論：

試討論求出四邊形和五邊形的面積的方法。

5.13　四邊形的面積

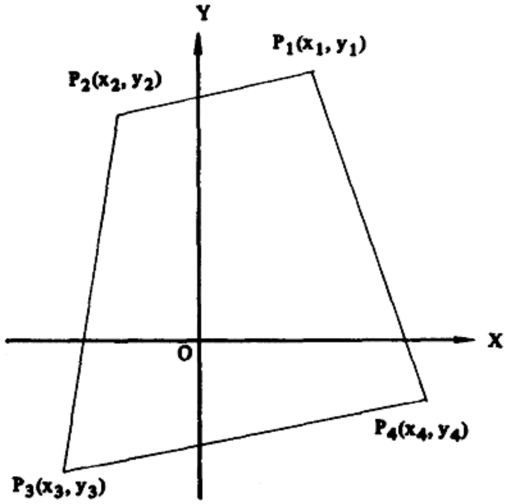
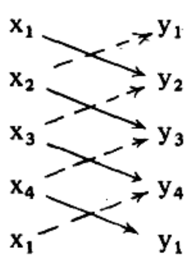


圖 5.7

設四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 的頂點坐標為$P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$ $P_3(x_3, y_3)$及 $P_4(x_4, y_4)$，如圖 5.7，四點分佈成反時鐘方向，則$P_1P_2P_3P_4$的面積等於兩三角形的面積的和：

$$
\begin{aligned}
& \Delta P_1P_2P_4 + \Delta P_4P_2P_3 \\
= & \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_4 - x_4y_2 + x_4y_1 - x_1y_4) + \\
& \frac{1}{2}(x_4y_2 - x_2y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3) \\
= & \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4)
\end{aligned}
$$

這結果也可以將各點列出如下圖，依上節方法相乘相加而得四邊形的面積：



習題 5A

1) 求下列各對點的距離：

i) (2, 13), (−1, 10) ii) (7, −3), (0, 8)

iii) (π, −5), (π, 2) iv) (a + b, b + c), (b + c, b + a)

2) 求以下列各點爲頂的三角形的面積：

i) O(0, 0), A(1, 2), B(−7, 8) ii) A(4, 5), B(0, 7), C(8, 9)
iii) P(−3, −1), Q(−5, −6), R(−2, −3)

3) 求以下列各點爲頂的多邊形的面積：

i) (0, 0), (4, 0), (6, 2), (3, 4)
ii) (4, 0), (−1, 3), (−4, 0), (−1, −5), (2, −5)

4) 求以 (−4, 2), (3, 1) 及 (0, −5) 爲頂的三角形的周長。

5) A(0, −1), B(2, 1), C(−1, 2)是 △ABC的三頂點。試證明這三角形是等腰三角形。

5.2 線段的分點

已知兩點P_1及P_2同在一卡氏平面上，Q 是 P_1P_2 上一點。若Q在 P_1P_2 內則Q稱爲P_1P_2 的內分點，若Q在 P_1P_2 的延綫上則稱爲 P_1P_2 的外分點。

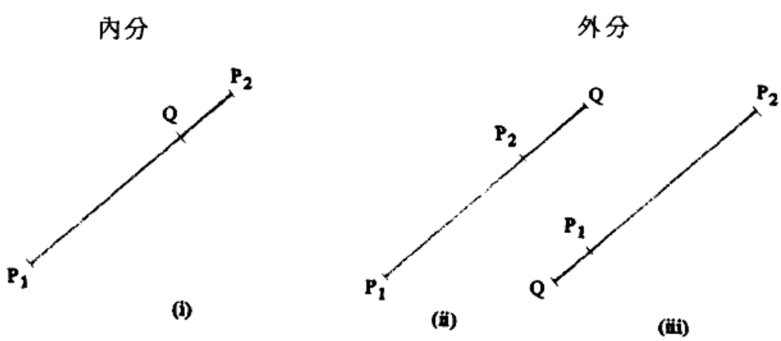


圖.5.8

一般情形Q稱爲 P_1P_2 的分點，比值 $r=\dfrac{P_1Q}{QP_2}$ 稱爲分割比値。 P_1Q 和 QP_2 是有向綫。若由P_1至P_2是正向則圖 5.8 (i)內P_1Q和 QP_2都是正；在圖5.8 (ii)，QP_2是正而QP_2是是負；在圖 5.8 (iii),內 P_1Q 是負而 QP_2 是正。在 (i) 裏比値 r是正，在 (ii) 及 (iii)裏是負。

討論：
試決定下列各圖內 $r=\dfrac{P_1Q}{QP_2}$ 的符號：

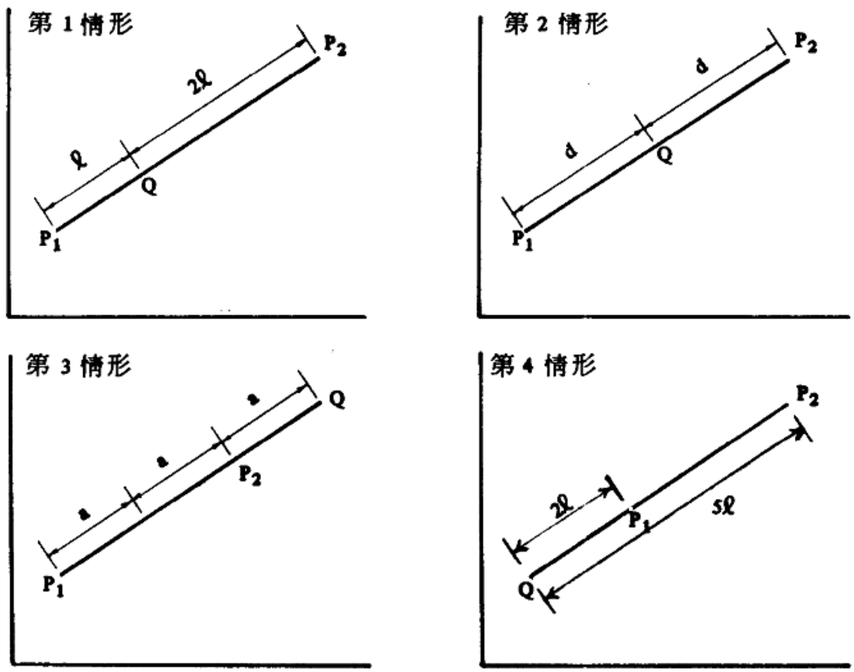
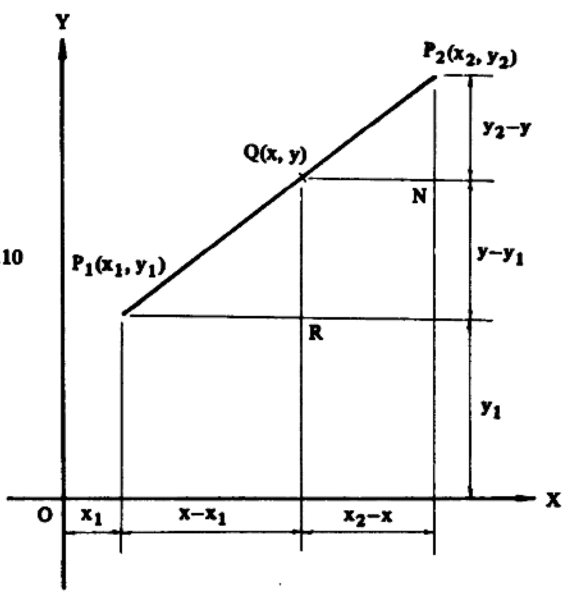

第 1 情形
P_1
Q
P_2
ℓ
2ℓ
第 2 情形
P_1
Q
P_2
d
d
第 3 情形
P_1
P_2
Q
a
a
a
第 4 情形
Q
P_1
P_2
2ℓ
5ℓ

圖 5.9

圖 5.10


Y
X
O
$P_1(x_1, y_1)$
$Q(x, y)$
$P_2(x_2, y_2)$
N
R
y_2-y
$y-y_1$
y_1
x_1
$x-x_1$
x_2-x

如圖 5.10，設 Q(x, y) 內分 P_1P_2，比值是 r : 1。試作 P_1R, QR, QN 及 P_2N 使 $P_1R \perp QR$，$QN \perp P_2N$。則兩直角三角形 ΔP_1QR 和 ΔQP_2N 相似。(兩三角形的對應角等，對應邊成比例則相似。)

則

$$P_1R : QN = P_1Q : QP_2 = r$$
$$QR : P_2N = P_1Q : QP_2 = r.$$

$$\therefore \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r \Rightarrow x - x_1 = rx_2 - rx$$
$$\Rightarrow x(1+r) = rx_2 + x.$$
$$\Rightarrow x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

同法可求得：
$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

討論：

若Q外分 P_1P_2 又如何？上式適合嗎？如不適合試求一適合的公式。

例 1

求一點分 (2, 1), (5, 4) 所聯成的綫段成 1 : 2。

解： 設Q (x, y)是分點，則

$$x = \frac{2 + \frac{1}{2} \times 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4+5}{2+1} = 3$$

$$y = \frac{1 + \frac{1}{2} \times 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2+4}{2+1} = 2$$

$\therefore$ Q 的坐標是 (3, 2)。

例 2

已知二點 A(−3, 1), B(2, $3\frac{1}{2}$)，試求二點各內分及外分 AB 成 2 : 5。

解： 設 Q_1 是內分點，則它的坐標是：

$$x = \frac{-3 + \frac{2}{5} \times 2}{1 + \frac{2}{5}} = -\frac{11}{7}$$

$$y = \frac{1 + \frac{2}{3} \times \frac{7}{2}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{12}{7}$$

故 Q_1 是 $\left(-\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right)$。

設 Q_2 是外分點則它的坐標是：

$$x = \frac{-3 - \frac{2}{5} \times 2}{1 - \frac{2}{5}} = -\frac{19}{3}$$

$$y = \frac{1 - \frac{2}{5} \times \frac{7}{2}}{1 - \frac{2}{5}} = -\frac{2}{3}$$

故 Q_2 是 $\left(-\frac{19}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ •

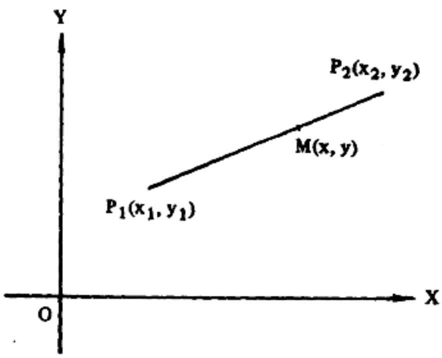


圖 5.11

如圖 5.11 設 $M(x, y)$ 是 P_1P_2 的中點，則

$$P_1M = MP_2$$

$$r = \frac{P_1M}{MP_2} = 1$$

由是得M的坐標如下：

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

例 3

求兩點 $(-3, 5), (9, -1)$ 聯綫的中點•

解：

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3+9}{2} = 3 \\ y = \dfrac{5+(-1)}{2} = 2 \end{cases}$$

中點是 $(3, 2)$ •

例 4

求下列各對點聯綫的中點：

i) $(7, -3), (2, 10)$　　　　ii) $(4, 4), (-9, 12)$