

几何与代数

(上)

吉林师范大学

目 录

第一章 行列式論.....	1—1
§ 1. 数环与数体.....	1—1
§ 2. 二、三阶行列式.....	1—5
§ 3. 排列与对换.....	1—15
§ 4. n 阶行列式的定义及其簡單性質.....	1—22
§ 5. 子式和代数余子式、行列式的展开.....	1—38
§ 6. 拉普拉斯定理、行列式乘法.....	1—52
§ 7. 克萊姆法则.....	1—5
第二章 一般綫性方程組.....	2—1
§ 8. 矩 陣.....	2—1
§ 9. 矩陣的初等变换.....	2—8
§ 10. 一般綫性方程組.....	2—19
§ 11. 齐次綫性方程組.....	2—27
第三章 数体上一个未知量的多項式.....	3—1
§ 12. 数体上一个未知量的多項式.....	3—1
§ 13. 多項式的整除性.....	3—5
§ 14. 多項式的最高公因子.....	3—15
§ 15. 多項式的因子分解.....	3—24
§ 16. 多項式的根.....	3—30
第四章 平面解析几何学.....	4—1
§ 1. 直綫和平面上的坐标系.....	4—1

1.	軸和軸上的綫段	4—1
2.	直線上点的坐标 (数軸)	4—3
3.	平面上点的笛卡尔直角坐标系	4—4
4.	平面上点的極坐标系	4—6
5.	直角坐标与極坐标的变换	4—8
§ 2.	平面解析几何的簡單問題	4—9
1.	有向綫段在軸上的射影	4—9
2.	兩点間的距离	4—11
3.	有向綫段的極角	4—12
4.	划分綫段成已知比	4—13
§ 3.	曲綫和方程	4—15
1.	方程确定的曲綫	4—15
2.	曲綫的方程	4—18
3.	曲綫的極坐标方程	4—20
4.	平面曲綫的参数方程	4—22
5.	二曲綫的交点	4—25
§ 4.	直綫	4—27
1.	直綫的角系数方程	4—27
2.	直綫的一般方程	4—29
3.	二直綫的相互位置	4—31
4.	直綫的法綫式方程	4—34
§ 5.	二次曲綫的标准方法	4—38
1.	直綫橢圓和它的标准方程	4—38
2.	橢圓的形狀	4—41
3.	橢圓的焦点半徑, 离心率和准綫	4—44
4.	双曲綫和它的标准方程式	4—49
5.	双曲綫的形狀	4—52
6.	双曲綫的焦点半徑、离心率和准綫	4—58
7.	抛物綫和它的标准方程式	4—64
8.	抛物綫的形狀	4—66
9.	橢圓、双曲綫和抛物綫的共同極坐标方程	4—68
10.	橢圓、双曲綫的参数方程式与作圖	4—72

6. 坐标变换和一般二次曲线方程的研究.....	4—75
1. 坐标变换.....	4—75
2. 二次曲线一般方程的研究.....	4—81

第五章 三维空间解析几何学..... 5—1

§ 1. 向量代数初步.....	5—1
1. 向量的概念.....	5—1
2. 向量的线性运算.....	5—3
3. 向量的数量积.....	5—12
4. 向量的向量积.....	5—15
5. 向量的混合积.....	5—21
6. 向量的线性相关性.....	5—24
§ 2. 坐标系.....	5—27
1. 三维空间的笛卡尔直角坐标系.....	5—27
2. 空间里点的极坐标.....	5—32
3. 向量运算的坐标表示.....	5—35
§ 3. 曲面和曲线的方程.....	5—42
1. 曲面与曲面的方程.....	5—42
2. 曲面的参数方程.....	5—44
3. 母线平行于坐标轴的柱面方程.....	5—46
4. 旋转曲面的方程.....	5—47
5. 曲面的方程.....	5—49
6. 曲面的参数方程.....	5—51
7. 曲面和曲线的交点.....	5—53
§ 4. 平面.....	5—54
1. 平面的一般方程.....	5—54
2. 平面的一般方程的特殊情形.....	5—56
3. 平面的截矩式方程.....	5—57
4. 两个平面的相互位置.....	5—59
5. 平面的法线式方程.....	5—61
6. 平面束的方程.....	5—65

§ 5. 直綫.....	5—67
1. 直綫的一般方程.....	5—67
2. 直綫的标准方程.....	5—68
3. 直綫的兩点式、参数式方程.....	5—70
4. 兩条直綫的相互位置.....	5—71
5. 直綫与平面的相互位置.....	5—75
§ 6. 二次曲面.....	5—76
1. 橢圓面.....	5—76
2. 双曲面.....	5—79
3. 二次錐面.....	5—83
4. 拋物面.....	5—85
5. 單頁双曲面的母綫.....	5—90
6. 双曲拋物面的母綫.....	5—93

第一章 行列式論

§ 1. 数环与数体

对于任意給定的多項式和方程來說，它是被它的系数和次数所决定的。而多項式与方程的系数取在那个范围，对于多項式和方程的討論來說，有很大关系，比方說，对多項式

$$x^5 + x^4 - 4x - 4$$

作因子分解。

在整数或有理数的范围内，它的結果是：

$$(x+1)(x^2-2)(x^2+2).$$

在实数范围内它的結果是：

$$(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2)$$

在复数范围内它的結果是：

$$(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$$

因此可見，在不同的范围内討論多項式，所得的結果可能不同，所以系数取在那个范围，对于多項式理論的探討是有很大的关系的。在中学代数里，多項式的系数在初中阶段是取在所有整数和有理数这个范围内；而在高中一年級多項式的系数則是取在所有实数这个范围；最后当数的知識擴張到复数以后，那时多項式的系数則是取在所有复数这个范围之内。不过在当时沒有把这个問題特殊明确出来。为了明确多項式和

方程的系数范围，我們先来介紹数环和数体的概念。

为了以后叙述問題方便起見，我們把若干个数的全体叫做数集，并且把在中学代数里所曾遇到过的所有整数的全体叫做整数集；所有有理数的全体叫做有理数集，所有实数的全体叫做实数集；所有复数的全体叫做复数集；并且分別用 Z, R, D, K 来表示它們。下面我們就来研究一下，什么样的数集可以取为多項式和方程的系数范围，来研究多項式。

为此，我們先来考查一下，在討論多項式时， Z, R, D, K 这四个数集可以作为多項式的系数范围，到底是由于它們具备那些特性？

先来看，由 1, 2, 3, 4, 5 五个数所組成的数集。这个数集不能作为多項式的系数范围来討論多項式。这是因为，对于系数是取自这个数集的某两个多項式來說，比如

$$x+3 \quad 3x+4$$

的系数属于給定的数集，但是，当把它們加一加，減一減，乘一乘，这时所得的多項式其系数就都已不在上面給定的数集里边了。由此可見，若以这个数集作为討論多項式的系数范围，甚至连最基本的加、減、乘三个运算都不能作，当然更談不到对多項式作进一步的討論。

現在我們再反回来观察一下， Z, R, D, K 这四个数集。

首先看整数集 Z 。我們知道，任意兩整数的和，差，积，自然是一个整数，其結果仍然在整数集里边。至于 R, D, K 这三个数集，它們也具有上面这个特征。其和，差，积仍然属于原来的数集。事实上，正由于这四个数集具有这个共同特征，才使得它們可以作为多項式的系数范围。为了把具有上述性質的数集与其他数集区分开，我們把这样的数集命名为数环。

定义1. 令 S 是一个数集。結果对于 S 中任意二元素 a, b 來說， $a+b, a-b, a \cdot b$ 也属于 S 时，則称 S 为数环。

Z, R, D, K 这四个数集都是数环。除此之外，还有很多数环。我們看几个例子。

例1. 数零組成一个数环。

例2. 全体偶数組成一个数环。

事实上，任意二偶数之和，差，积仍为偶数。

例3. 令 a 是一个固定整数，則一切形如 na 的数，組成一个数环，此处 n 为任意整数。

事实上，对于任意形如 na 的二数，

$$n_1 a \text{ 与 } n_2 a, \text{ 由于 } n_1 a \pm n_2 a = (n_1 \pm n_2) a$$

而 $n_1 \pm n_2$ 仍为整数，所以由定义，此数集是一个数环。

例4. 一切形如 $a + b\sqrt{2}$ 的数，組成一个数环。此处 a, b 是任意有理数。

事实上，令 $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2}$ 是此数集中任意二数，由于

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2}$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 a_2 + 2b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{2}$$

所以此数集是数环。

例5. 全体奇数不是一个数环。

事实上，二奇数之和已不是奇数，所以此数集不是数环。

数环的例子是不胜枚举的，同学们可以自己再去找一些例子。

在数环当中，还有一种比較特殊的数环，这种数环就是数体。

定义2. 令 P 是一个数环。結果下列条件成立，即 P 叫做一个数体

(域)

1) P 至少含有一个不等于零的数；

2) 对于 P 中的任意二数， a, b 来說当 $b \neq 0$ ， $\frac{a}{b}$ 也属于 P 。

容易看出， R, D, K 这三个数环是数体。

例6. 例4的数环 P 是数体。

事实上，設 $a_1 + b_1\sqrt{2}$, $a_2 + b_2\sqrt{2} \neq 0$ 是此数集中任意两个数，由于 $a_2 + b_2\sqrt{2} \neq 0$ ，故有

$$a_2 - b_2\sqrt{2} \neq 0.$$

反之，若 $a_1 - b_1\sqrt{2} = 0$ ，则由于 $\sqrt{2}$ 是无理数，必須 $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ 因而 $a_1 + b_1\sqrt{2}$ 也等于零。这与假设矛盾。因此

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})}{(a_2 + b_2\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})} = \\ &= \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

由于 a_1, a_2, b_1, b_2 都是有理数，所以

$$\frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}, \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}$$

也都是有理数。則 $\frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}}$ 属于 P ，故 P 是数体。

例7. 一切形如 $a + bi$ 的数组成一个数体，此处 a, b 是任意有理数（証法与例6类似）

下面我們証明数体的一个重要性質。

定理. 任何数体都包含有理数体。

証明. 設 P 是任意一个数体。因为 P 至少含一个不等于零的数 a 。因此，由数体定义的条件2) 知 $\frac{a}{a} = 1$ 也属于 P ，以1与自己重复相加則得出全体正整数，因而全体正整数都属于 P 。另一方面， $a - a = 0$ 也属于 P （由数体定义的前提），从而0与任意正整数之差也含在 P 里边。因此 P 含全体負整数。从而， P 含全体整数。于是 P 也包含任意二整数之商（分母不为零），因而 P 包含全体有理数，定理得到証明。

以后我們將以数体作为我們討論問題的范围，所以如此，是由于在

数体内，加，减，乘，除这四种运算都可以施行，也就是说，对于数体中任意二数之和，差，积，商（分母不为0）仍然属于此数体。

而在我们的讨论当中，只能遇到这四种运算，所以数体作为我们讨论问题的范围，恰好够用。

另一方面，由于就着任一数体所讨论的结果，对于任一具体的数体都能适用，所以就不必将一个结论就着各个具体数体都做讨论，这样一来，既简化了讨论的程序又使所得的结果能以有广泛的应用。

習 題

1. 試判定下列数集是否是数环。

1) 全体正整数；

2) 全体真分数；

3) 一切形如 $\frac{\beta}{2^k}$ 的数所组成的数集（ β 为奇数， k 为一切非负整数）

2. 試証任意数环都含有数0。

3. 試証一切形如 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{4}$ 的数所组的数集构成数环。

（ a, b, c 为任意有理数）。

4. 設 P_1 和 P_2 是两个数体， P 是一切既属于 P_1 又属于 P_2 的数所组成的数集。試証 P 是一个数体。

5. 有沒有只含两个数的数环？假如有，举出实例；假如沒有，严格証明之。

§ 2. 二、三阶行列式

在中学我們曾經討論了二元和三元一次联立方程組，知道了求解的方法。但通常会遇到未知量的个数和方程的个数多于三个的方程組。为

討論綫性方程組的問題，主要是判斷方程組是否有解？有若干個解？如何求解？關於它的普遍理論要在第二章中討論。在本章只討論比較特殊的綫性方程組，即方程的個數與未知量的個數相等，而且僅有一個解的情形。

這種情形的討論我們要以行列式為工具，行列式是一個很重要的概念，它在數學及其它科學部門中都有著廣泛的應用，其功用並不僅限於解綫性方程組。比如，在數學分析上，連分數理論上，幾何學上，特別是解析幾何上都有廣泛的應用。

行列式的概念，起源於解含二個和三個未知量的綫性方程組。

我們考慮含有兩個未知量的綫性方程組：

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

我們假定組(2)有解，為了求這個方程組的解，我們用 a_{21} 乘第一個方程，用 $-a_{11}$ 乘第二個方程，然後相加，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2. \quad (3_1)$$

類似的，用 $-a_{21}$ 和 a_{11} 分別乘第一個和第二個方程可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \quad (3_2)$$

我們現在來研究一下(3₁)與(3₂)這兩個方程。在這兩個方程里 x_1 與 x_2 的係數都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ，它只含有方程組(2)的未知量係數。如果把(2)的係數排成下表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \quad (4)$$

那麼就可以看出來(3₁)與(3₂)這兩個方程中 x_1 與 x_2 的係數，可經表(4)的數按下述的規則表示出來，它等於左上角與右下角這兩個數的乘積減去位於右上角與左下角的兩個數的乘積。我們把代數和

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 叫做二阶行列式，并用下面符号表示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

乘积 $a_{11}a_{22}$ 及 $a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的项。而 a_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2$) 称为二阶行列式的元素。

一般地，对于数体 P 中任意四个数： $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 所组成的代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 叫做元素在数体 P 上的二阶行列式，并且用记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (4)'$$

来表示。

这里的 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 并不一定非是二元一次方程的系数。

我们约定在一个行列式里，把横排叫做行，纵排叫做列。

现在再来考查一下 (3₁) 与 (3₂) 两式的常数项。比较这两个常数项与未知量的系数，我们看到把未知量系数中的 a_{11}, a_{21} 依次换成方程组 (2) 的常数项 b_1 与 b_2 ，就得到 (3₁) 的常数项；把未知量系数中的 a_{12} 与 a_{22} 依次换成常数项 b_1 与 b_2 ，就得到 (3₂) 的常数项。于是用二阶行列式的记法，这两个常数项可写成：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

我们称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为组 (2) 的系数行列式。

当组 (2) 的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，则有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (5)$$

將組 (5) 代入方程組 (2) 后，可以驗證組 (5) 是組 (2) 的一个解。而且組 (5) 是組 (2) 的唯一解。

事实上，令 x'_1 与 x'_2 是方程組的一个解。代入組 (2) 后得到两个等式：

$$a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 = b_1$$

$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 = b_2$$

經過与消去 x_1 或 x_2 的相同步驟，即可得到：

$$x'_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x'_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

这就是說，組 (5) 是組 (2) 的唯一解。

由于組 (2) 是任意一个二元綫性方程組，所以对于任意一个含有两个二元一次方程的方程組，当它的系数行列式不等于零时，都可用 (5) 式求出解来。

例1. 解方程組

$$2x_1 + x_2 = 7,$$

$$x_1 - 3x_2 = -2.$$

这个方程組的系数行列式为

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

其值不为零，故可应用公式 (5) 求解，分子各数：

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11.$$

于是得到方程组的解为

$$x_1 = \frac{19}{7}, \quad x_2 = \frac{11}{7}.$$

现在我们来看一个含有三个未知量三个方程的线性方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

此线性方程组的系数可排成下表：

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad (7)$$

与解组(2)同样我们假定方程组(6)有解，为了求方程组(6)的解，我们分别用 $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ ， $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ ， $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ 乘第一，第二，第三个方程，然后相加。经过计算，得出 x_1 与 x_3 的系数等于零，把 x_2 与 x_3 这两个未知量同时消去。我们得出方程：

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_2 + \\ & + a_{13}b_2a_{22} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}. \end{aligned} \quad (8)$$

在(8)式中， x_1 的系数是 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$
 $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$. (9)

我们把这个代数和叫做一个三阶行列式，并用下面符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示。

一般地，我們把数体 P 上的元素 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ 所構成的代数和：

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

叫做元素在数体 P 上的三阶行列式，并且用記号：

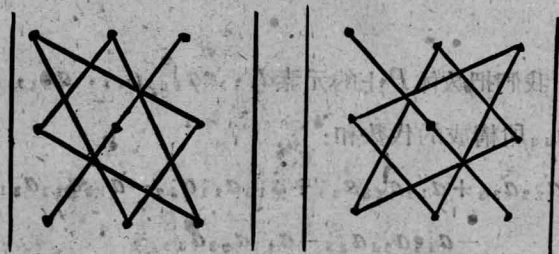
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (10)$$

来表示。

这里的 a_{ij} 并不一定必須是方程的系数。与二阶行列式类似，我們把 (10) 中的橫排叫做行，縱排叫做列。 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ 等叫做三阶行列式的元素。

从形式上看，三阶行列式是很繁杂的，但是通过表(7)上的元素，再利用所謂对角綫規則来表述它时，將变得很簡單。为此，先介紹两个术语。

在行列式的記号中，从左上角到右下角的对角綫称为第一对角綫（或称为主对角綫。）从右上角到左下角的对角綫叫做第二对角綫。在表示式(9)中，有三項符号是正的。其中的一項是位在主对角綫上三个元素的乘积；其它兩項中的每一項都是位在主对角綫的一条平行綫上的两个元素与对角上元素的乘积。利用第二对角綫可以类似的得出(9)式中有負号的三項的構成規律。这样我們就得到了計算三阶行列式的一个方法。这个方法通常被叫做对角綫規則。我們把計算規則用下面两个圖来表示：



右圖指出計算三階行列式的正項的規則，左圖指出計算負項的規則。

例 2:

$$(10) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) \cdot 5 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = 30 + 2 - 24 - 12 + 20 - 6 = 10.$$

例 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + (-5)(-2)(-2) - (+5) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot (-2) = -20 + 15 + 1 = -1.$$

例 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 5 = 30 - 24 + 2 - 12 - 6 + 20 = -10 + 20 = 10.$$

現在我們再來看 (8) 式，它的右端剛好就是把左端 x_1 的係數中的 a_{11} , a_{21} , a_{31} 分別換成 (6) 的常數項 b_1 , b_2 , b_3 ，換句話說，就是把行列式 (10) 的第一列換成 (6) 的常數項而得到的一個三階行列式，這個行列式用 d_1 表示：

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若以 d 表示行列式 (10) (d 叫做方程組 (6) 的係數行列式)，那麼