中国地球物理学会代表会

学术报告

波动场讯息处理理论与应用

—论动校正、迭加、偏移、层速度的一次处理

顾功叙

顾功叙 遗赠

石油工业部石油地球物理勘探局研究院

目　录

波动场反射讯息处理理论与应用研究

——论动校正、迭加、偏移、层速度的一次处理

范祯祥　（物探局研究院）

陈亚浙　（北京大学数力系）

郑仙种　（物探局研究院）

〈摘　　要〉

波动方程偏移不论是有限差分法还是积分法，均采用与光学类似的模型，把反射界面作为置于均匀介质中的半透明挡板，以研究反射界面的位置。但是，实际反射界面应是非均匀介质中的间断面。本文提出波动方程反问题解法，研究介质速度分布，取得速度剖面与深度偏移剖面；同时，给出用波动方程一次计算实现动校正、多次波消除、加权水平迭加、深度偏移的数学模型，为用地震资料进行地层与岩性解释提供保真处理方法。并可推广应用到波阻抗转换技术，把反褶积处理、反射系数求取、波阻抗计算、速度密度分离等工序，也在波动场一次计算完成，用于岩性地震剖面解释。文中给出了相应的数学公式及其解法。它是一个由超定条件确定波动方程未知系数的问题，利用小参数法将问题线性化，应用 Kirchhoff 公式把线性化的近似问题化为积分方程，并给出速度计算公式，从地震记录得到二维速度分布剖面、深度偏移剖面以及合成声速测井曲线。

一、引　　言

波动场反射讯息处理研究，在 Claerbout J. F 提出波动方程偏移后，进展很快，出现了多种波动方程偏移方法。但对于应用波动方程求取地层介质真速度，仍处于研究探索阶段。本文在研究评述几种波动方程偏移问题的基础上，提出波动方程反问题解法，在波动场取得介质速度分布，用于岩性地震剖面解释。

波动方程偏移，目前采用的不论是差分法还是积分法，均采用与光学类似的模型，把地下作为一个均匀的介质，反射界面作为置于这个均匀介质中的半透明档板，然后根据从档板反射回地面的记录来寻找反射界面的位置。但实际的物理模型不是这样的，反射界面不是均匀介质中的档板，而是非均匀介质中的间断面。本文提出与此完全不同的数学方法，从地震记录直接取得地下介质的速度分布，从而得到介质的分界面。这是一个由超定条件确定波动方程未知系数的问题，它是一个非线性问题，利用小参数法将问题线性化，根据 Kirchhoff 公式把这种线性化的近似问题归结为积分方程，在二维非均匀介质的假定下，得到积分方程的近似解析解，为计算提供了方便的形式，应用这个公式，把时间场处理的动校正、去多次波、水平迭加、深度偏移，合成速度测井曲线等工序，全部在波动场一次计算中实现。同时，还可据各深度点下的介质速度分布曲线与声速测井曲线对比标定，处理出岩性地震剖面。为用地震资料解释地层、岩性与岩相，提

供了理论依据与应用方法。

POMAHOB 在 [二] 中也用小参数法处理了波动方程反问题，但他仍然采用时间场的射线法，同时，也没有给出适用于地震资料解释推断的计算形式。

二、波动方程归位问题

波动方程偏移，在原理上是假设地震波在地下传播是服从声波方程的，以地面观测资料为已知条件，用波动方程延拓波场，据反射映象原理，取其瞬间的上行波幅为归位结果。在数学上这是一个不适定问题。不适定性给波场延拓带来很大困难，当已知数据有微小变化时，它的解变化很大，任何一个地震干扰讯号，均能造成波场延拓的巨大畸变，使所得的解失去意义。Claerbout J. F 给出了近似的适定方法。近来出现了多种坐标变换，但坐标变换不能改变定解问题的不适定性，为此，注意研究适当的变换，使变换后的方程舍去影响较小的项，简化为抛物型方程，使定解问题变为适定的。

用有限差分法延拓波场，是对波动方程

$$P_{xx}+P_{zz}=\frac{4}{v^2}P_{tt} \qquad (2\text{—}1)$$

引进坐标变换 $x'=x$，$\tau=2z/v$，$t'=t+2z/v$，并略去波场对深度方向的二阶导数项，得近似延拓方程〔(六)〕〔(七)〕

$$\frac{v^2}{8}\hat{P}_{x'x'}+\hat{P}_{\tau t'}=0 \qquad (2\text{—}2)$$

由于舍去项，反射界面对解的精度有较大影响，所以，差分法仅适用于小倾角地层的归位。当然，选择一个稳定的、收敛的差分格式，虽可使计算量少精度又能保证；但是，由于近似公式与差分格式所造成的波散现象，是无法解决的。为说明差分法的波散现象，我们在式（2—1）中引入坐标变换 $x'=x$，$z'=z$，$t'=t+z2/v$，略去深度方向二阶导数项，得近似公式

$$\hat{P}_{x'x'}+\frac{4}{v}\hat{P}_{z't'}=0$$

考虑一个园频率为 ω，波数 $k=\sqrt{k_x^2+k_z^2}$ 的上行平面波 $\exp\{i(k_x x'+k_z z'-\omega t')\}$ 代入，得波散关系式

$$\omega=-\frac{v}{4}\cdot\frac{k_x^2}{k_z}$$

显然有 $\omega/k\neq$ 常数，表明近似延拓方程可以造成波散；同样，若考虑在方程

$$P_{xx}=\frac{1}{v^2}P_{tt}$$

中代以差分方程，即

$$\frac{P(x+\Delta x)-2P(x)+P(x-\Delta x)}{\Delta x^2}=\frac{P(t+\Delta t)-2P(t)+P(t-\Delta t)}{v^2\Delta t^2}$$

以 $p=e^{i(kx-\omega t)}$ 代入，得波散关系式

$$\omega=\pm\frac{2}{\Delta t}\sin^{-1}\left(\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{k\Delta x}{2}\right)$$

显然有 $\omega/k\neq$ 常数，说明差分格式引起波散。由此可见，波散现象是差分法的固有缺陷，特别在大倾角情况下，严重的波散现象，导致反射波的畸变。

Stolt R. H. 推广了 Claerbout J. F. 的有限差分法，解决了在大倾角与高频条件下的波散问题，提出了在频率域延拓波场的归位方法。

推广的差分法在频率域延拓波场，仍然是对式（2—1）引进坐标变换 $x'=x$，$\tau=z$，$D=\frac{vt}{2}+z$，在新坐标系中波场函数记为 $\hat{p}(x',\ \tau,\ D)$，于是有（〔五〕）

$$\hat{P}_{x'x'}+\hat{P}_{\tau\tau}+2\hat{P}_{\tau D}=0 \qquad (2\text{—}3)$$

对迭加剖面 $\hat{p}(x',\ 0,\ D)$ 作二维富氏变换

$$A(s,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int dx'\int dD\hat{P}(x',0,D)e^{i(sx'-2\omega D/v)}$$

反富氏变换为

$$\hat{P}(x',0,D,)=\frac{1}{2\pi}\int ds\int d\omega A(s,\omega)e^{-i(sx'-2\omega D/v)}$$

对于正深度、上行波而言，可推广为满足方程（2—3）的形式，即

$$\hat{P}(x',\tau,D)=\frac{1}{2\pi}\int ds\int d\omega A(s,\omega)e^{-i(sx'+q\tau-2\omega D/v)} \qquad (2\text{—}4)$$

$$q=\frac{2\omega}{v}-\sqrt{\frac{4\omega^2}{v^2}-s^2}$$

这时，偏移剖面有如下形式

$$\hat{P}(x',D,D)=\frac{1}{2\pi}\int ds\int d\omega A(s,\omega)\exp\{-i[sx'-\sqrt{4\omega^2/(v^2-s^2)}D]\} \qquad (2\text{—}5)$$

式（2—5）是从严格的波动方程经两次富氏变换所得的偏移公式，没有相位误差与波散现象。但离散计算式所造成的假频仍然存在。从理论上，空间变速很难实现，虽然它容易推广到三维情况，运算速度也快，但用于岩性研究，显然受到限制。

波场向下延拓可以利用惠更斯原理，把地面接收点作为二次震源，随时间返回原来的状态，以寻找反射界面的波场函数来确定界面。从能量的角度来看，是把分散在各记录道中同一反射界面所反射回来的能量，聚焦在反射界面的原二次震源上，从而正确显示反射界面的空间位置，即积分法偏移。当时深 $\tau=2z/v$，震源点 $Q_s(x_s,y_s,0)$ 到介质点 $P(x,y,z)$ 的倍程旅行时间 $t=2r/v$，$r=\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+(v^2\tau^2)/4}$ 时，则偏移时间剖面公式为（〔七〕）

$$f(x,y,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_s\int\frac{1}{r}\cos\theta\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right]F(x_s,y_s,t)dx_sdy_s \qquad (2\text{—}6)$$

式中F为自激自收记录道，它反映波传播的基本规律，标志反射界面的数量与振动强度，值得重视的是它的频率特征。为此，我们不妨设 $f(0,0,\tau)$ 为输出道，$F(x_s,0,t)$ 为记录道，于是，在共地面中心点附近 Δs 的偏移时间剖面近似表达式为

$$\Delta f(0,0,\tau)=-\frac{1}{\pi v^2}\frac{1}{t}\left[\frac{2\tau}{t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\right]F\left(x_s,0,\sqrt{\tau^2+\frac{4x_s^2}{v^2}}\right)\Delta s \qquad (2-7)$$

若以时间剖面记录道 $F(x_s,0,t)$ 为输入，$\Delta f(0,0,\tau)$ 为输出看作一个滤波过程，那末，这个过程由两个滤波过程串联得到。第一个滤波过程以 $F(x_s,0,t)$ 为输入，以

$$\Phi(\tau)=F\left(x_s,0,\sqrt{\tau^2+\frac{4x_s^2}{v^2}}\right) \qquad (2-8)$$

为输出，它是绕射双曲线的取值过程；第二个滤波过程是以 $\Phi(\tau)$ 为输入，按式

$$\Delta f(0,0,\tau)=-\frac{1}{\pi v^2}\frac{1}{t}\left[\frac{2\tau}{t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\right]\Phi(\tau)\Delta s \qquad (2-9)$$

得到输出 $\Delta f(0,0,\tau)$ 的过程。式（2—8）的过程相当于低通滤波，考虑时深由 τ_0 至 $\tau_0+\Delta\tau$ 时，时深间隔为 $\Delta\tau$，这时在时间剖面记录道上取值的时间间隔为

$$\Delta t=\sqrt{(\tau_0+\Delta\tau)^2+\frac{4x_s^2}{v^2}}-\sqrt{\tau_0^2+\frac{4x_s^2}{v^2}}$$

$$=\frac{2\tau_0\Delta\tau+\Delta\tau^2}{\sqrt{(\tau_0+\Delta\tau)^2+4x_s^2/v^2}+\sqrt{\tau_0^2+4x_s^2/v^2}}<\Delta\tau$$

当时间剖面记录道与时间剖面输出道间的偏离距 x_s 越大，则 Δt 越小于 $\Delta\tau$，也就是说 $\Phi(\tau)$ 把时间剖面记录道 $F(x_s,0,t)$ 的波形拉长了，即 $\Phi(\tau)$ 与 $F(x_s,0,t)$ 相比频谱的低频成份增加，讯号动力学特征受到畸变。式（2—9）的过程，相当于高通滤波器。方法的意图是使二者在相互作用下，对时间剖面记录道取得综合效果以保持波形特征。但是，由于式（2—9）的富氏变换式

$$\Delta\hat{f}(0,0,\omega)=-\frac{1}{2\pi v x_s}\left[\frac{iv^2}{2x_s^2}\frac{\partial\hat{\Phi}(\omega)}{\partial\omega}+i\omega\hat{\Phi}(\omega)\right] \qquad (2-10)$$

中的第二项包括 ω 的因子，它对记录的高频成份具有强烈的放大作用，而扫描迭加道数是有限的，实质上这种波动场的绕射扫描迭加，不仅不能保持波的动力学特征，而且还有较强的迭加干扰背景。虽然在大倾角时方法的归位效果较好，但不宜用于解释地层与岩性的保真处理。

对以上波动方程偏移问题的分析研究，发现它们有三个共同点，第一点，均系给定速度的迭加偏移；第二点，均以时间场处理的时间剖面为输入讯息；第三点，讯号的动力学特征得不到保真。显然，这种处理技术适用于构造地震学，不宜用于地层地震学，它仍然是定性地研究地层与岩性，在用地层地震学研究碳氢显示的今天，必需研究波动场反射讯息处理的应用理论与处理技术，在特殊的保真处理方面取代时间场处理。因为在时间场处理的水平迭加时间剖面，尽管采用了振幅补偿处理，反射波动力学特征仍然

受到严重的畸变，在此基础上的波动方程偏移，即使波场延拓与差分格式不造成畸变，也无助于反射讯息的保真；当然，选择适当的偏移方法，可以使偏移过程中的反射讯息不再增加更多的畸变量；此外，要在时间场取准地层介质速度，是很困难的，特别是求准每一个深度点下的介质真速度，难度更大；问题归结到一点，就是如何在波动场求准每一个深度点下的介质真速度。本文研究解决了这一问题，由此，可推广应用到波阻抗转移技术。

三、波动场反射讯息处理理论

问题的提法

选取直角坐标系Oxyz，以地面为xoy平面，测线方向为x轴，z轴铅直向下。设在坐标原点O置一能量为Q的震源，在t=0时刻激发，在下半空间产生波场u（x，y，z，t），满足波动方程

$$\frac{1}{v^2}u_{tt}=\Delta u+4\pi Q\delta(x,y,z,t) \qquad (3—1—1)$$

式中$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，v=v（x，y，z）是介质的波速。由于介质在震源激发前处于静止，u（x，y，z，t）满足初始条件

$$\begin{cases}u(x,y,z,0)=0\\u_t(x,y,z,0)=0\end{cases} \qquad (3—1—2)$$

波场在地面观测所得地震记录φ（x，y，t），因此波场满足边界条件

$$u|_{z=0}=\varphi(x,y,t) \qquad (3—1—3)$$

此外，地面是自由边界，波场u（x，y，z，t）在地面上还必须满足自由边界条件。

下面讨论自由边界条件的给法。在〔 〕中Claerbout给出关系式

$$\begin{bmatrix}P\\W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-\frac{b}{a}&\frac{b}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U\\D\end{bmatrix} \qquad (3—1—4)$$

式中P表示声压，W表示质点速度的垂直分量，U，D分别表示上行波与下行波，a、b是常数。在地面上所观测的波场是速度的垂直分量W，它相当于方程（3—1—1），（3—1—2），（3—1—3）中的u（x，y，z，t）。自由边界条件容易用声压表示，即

$$P|_{z=0}=0 \qquad (3—1—5)$$

在均匀介质的情况下，由〔-〕可得上行波与下行波的表示式

$$U=U_0e^{-ik_zz},\qquad D=D_0e^{ik_z} \qquad (3—1—6)$$

由（3—1—4），P=U+D，条件（3—1—5）可表为

$$U_0=-D_0 \qquad (3—1—7)$$

我们将它转换为观测波场W的条件，由（3—1—4）

$$W = -\frac{b}{a}(U-D) = -\frac{b}{a}(U_0 e^{-abz} - D_0 e^{abz}) \tag{3—1—8}$$

则由条件（3—1—5）或（3—1—7），可得

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

即观测波场在自由界面的条件。

在（3—1—1）、（3—1—2）、（3—1—3）中，观测波场为u（x，y，z，t），它的自由边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \tag{3—1—9}$$

这样波场u对空间变量z给出三个边界条件：（3—1—3），（3—1—9）及充分远处波场消失。原来波场对空间变量z只能给出两个边界条件，这就构成方程（3—1—1）的超定边界条件，现在的问题是由这些超定边界条件反过来寻求波动方程（3—1—1）的系数v（x，y，z）——介质的波速。即波动方程的反问题。

我们把波动方程反问题（3—1—1）、（3—1—2）、（3—1—3）、（3—1—9）略微变换一下形式。将介质对xoy平面作偶开拓，即设想介质充满全空间，它们关于xoy平面是对称的，这样u（x，y，z）是z的偶函数。在这虚设的空间中，同样在坐标原点激发地震波，方程（3—1—1）及条件（3—1—2）仍成立，显然在全空间的波场u（x，y，z，t）是z的偶函数，因此条件（3—1—9)自然满足。

对于全空间而言，如果介质速度v（x，y，z）已知，则问题（3—1—1），（3—1—2）唯一地确定了整个波场，这就是波动方程正问题，在地面上的观测条件(3—1—3)成为多余的过剩的超定条件。现在波速v（x，y，z）未知，反问题就是由超定条件（3—1—3）来确定方程的未知系数v（x，y，z）、这时我们要求u（x、y，z)是z的偶函数，且是二次连续可微的。当然在实际中v（x，y，z）是不连续，而且我们的主要任务是寻求速度的分界面。可是当v（x，y，z）有间断面时，波动方程（3—1—1）在间断面上还必须满足接触条件，问题就复杂化了。我们可以把问题简化为当v（x，y，z）具有间断面时，它仍然是连续可微的，只是在间断面处变化急剧而已。

应用小参数法线性化

由（3—1—1）、（3—1—2）、（3—1—3）确定速度v（x，y，z）的问题是一个非线性问题，我们用小参数法将它线性化。为简单起见，令

$$n(x, y, z) = 1/v(x, y, z), \tag{3—2—1}$$

假定n(x，y，z)的相对变化是较小的，更确切地说，假定常数n_0是对n(x，y，z)的已知的估计值。差$n_1(x, y, z) = n(x, y, z) - n_0$和对于$n_0$而言是较小的。即

$$n(x,y,z) = n_0 + n_1(x,y,z) \tag{3—2—2}$$

其中$|n_1(x, y, z)|/n_0$较小于1。问题在于要依据(3—1—1)、(3—1—2)、(3—1—3)得到速度估计n_0的修正值$n_1(x, y, z)$。

记 $N_1=\sup\{n_1(x, y, z)\}$，令

$$n_\varepsilon(x,y,z)=n_0\left(1+\varepsilon\frac{n_1(x,y,z)}{N_1}\right) \qquad (3—2—3)$$

其中$0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{N_1}{n_0}$，$\varepsilon$是一个小参数，当$\varepsilon=\frac{N_1}{n_0}$时，$n_\varepsilon(x, y, z)=n(x, y, z)$。求解初值问题

$$\begin{cases} n_\varepsilon^2 u_{tt}=\Delta u+4\pi Q\delta(x,y,z,t), & (3—2—4)\\ u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0 & (3—2—5)\end{cases}$$

它的解依赖于ε，记为$u(x, y, z, t; \varepsilon)$，将它按小参数$\varepsilon$展开

$$u(x,y,z,t;\varepsilon)=u_0(x,y,z,t)+\varepsilon u_1(x,y,z,t)+\varepsilon^2 u_2(x,y,z,t)+\cdots \qquad (3—2—6)$$

当$\varepsilon=\frac{N_1}{n_0}$，$u(x, y, z, t; \varepsilon)$即(3—1—1)、(3—1—2)的解$u(x, y, z, t)$。将(3—2—6)代入方程（3—2—4），按$\varepsilon$的方幂列出等式得

$$n_0^2 u_{0tt}=\Delta u_0+4\pi Q\delta(x,y,z,t) \qquad (3—2—7)$$

$$n_0^2 u_{1tt}=\Delta u_1-2\frac{n_0^2}{N_1}n_1(x,y,z)u_{0tt} \qquad (3—2—8)$$

由方程（3—2—7）与初始条件（3—2—5）可以解得$u_0(x, y, z, t)$，设

$$u_0(x,y,z,t)|_{z=0}=\varphi_0(x,y,t) \qquad (3—2—9)$$

由于ε较小，在$z=0$上展开式（3—2—6）可以忽略ε^2以上的项，且令$\varepsilon=N_1/n_0$，由观测条件（3—1—3）得

$$\varphi(x,y,t)=\varphi_0(x,y,t)+\frac{N_1}{n_0}u_1(x,y,z,t)|_{z=0} \qquad (3—2—10)$$

记 $$\psi(x,y,t)=\varphi(x,y,t)-\varphi_0(x,y,t) \qquad (3—2—11)$$

则由（3—2—10）得$u_1(x, y, z, t)$的边界条件

$$u_1(x,y,z,t)|_{z=0}=\frac{n_0}{N_1}\psi(x,y,t) \qquad (3—2—12)$$

现在的问题归结为由方程（3—2—8）、初始条件（3—2—5），超定条件（3—2—12）确定方程（3—2—8）的非齐次项$n_1(x, y, z)$，其中要求$n_1(x, y, z)$是z的偶函数，且是二次连续可微的，于是问题已化为线性问题。

问题归结为积分方程

方程(3—2—7)及初始条件(3—2—5)的解是由坐标原点激发的球面脉冲波，可以表为

$$u_0(x,y,z,t)=\frac{Q}{r}\delta(t-n_0 r) \qquad (3—3—1)$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2+Z^2}$。由Kirchhoff公式，方程(3—2—8)与初始条件(3—2—5)的解可以表为

$$u_1(M,t) = -\frac{Q}{4\pi}\iiint\limits_{r_{MP}\leqslant t/n_0}\frac{2n_0{}^2 n_1(\xi,\eta,\zeta)\delta_{11}(t-n_0 r_{MP}-n_0 r)}{N_1 r r_{MP}}dv_p \qquad (3—3—2)$$

其中M，P的坐标分别为(x，y，z)，(ξ，η，ζ)，

$$r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\quad,\quad r_{MP}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \qquad (3—3—3)$$

体积元素 dv_p 表 示积分是对p进行的。

从实际计算要求，我们仅取M点在测线x轴上，坐标为$(x_0,\ 0,\ 0)$，并设$x_0\geqslant 0$。另外，考虑到δ函数的性质，积分(3—3—2)的被积函数在 $r_{MP}+r\leqslant\frac{t}{n_0}+\varepsilon(\varepsilon>0)$外为0。这样，由地面条件(3—2—12)得

$$\psi(x_0,0,t) = -\frac{Q}{4\pi}\iiint\limits_{r_{MP}+r\leqslant t/n_0+\varepsilon}\frac{2n_0 n_1(\xi,\eta,\zeta)\delta_{11}(t-n_0 r_{MP}-n_0 r)}{r\, r_{MP}}dv_p$$

(3—3—4)

积分区域 $r_{MP}+r\leqslant\frac{t}{n_0}+\varepsilon$表示以O，M为焦点，$\frac{t}{n_0}+\varepsilon$为长轴的旋转椭球体。取x轴为极轴，考虑球坐标

$$\begin{cases}\xi=r\cos\theta\\ \eta=r\sin\theta\sin\varphi\\ \zeta=r\sin\theta\cos\varphi\end{cases} \qquad (3—3—5)$$

还引进参量

$$\tau=r_{MP}+r \qquad (3—3—6)$$

由此可解得

$$r=\frac{\tau^2-x_0{}^2}{2(\tau-x_0\cos\theta)} \qquad (3—3—7)$$

在积分(3—3—4)中，将积分变量(ξ，η，ζ)变换为变量(τ，θ，φ)，容易计算

$$\frac{dv_p}{r r_{MP}}=\frac{2r^2\sin\theta}{\tau^2-x_0{}^2}d\tau d\theta d\varphi \qquad (3—3—8)$$

因此(3—3—4)变换为

$$\psi(x_0,0,t) = -\frac{Q}{\pi}\int_{x_0}^{t/n_0+\varepsilon}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{n_0 n_1\delta_{11}(t-n_0\tau)}{\tau^2-x_0{}^2}r^2\sin\theta d\varphi d\theta d\tau$$

$$= -\frac{Q}{\pi}\int_{x_0}^{t/n_0+\varepsilon}\frac{n_0\delta_{11}(t-n_0\tau)}{\tau^2-x_0{}^2}\left\{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}n_1 r^2\sin\theta d\varphi d\theta\right\}d\tau \qquad (3—3—9)$$

应用δ函数的性质，由(3—3—9)得 (3—3—10)

$$\psi(x_0,0,t)$$
$$= -\frac{Q}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{\frac{t^2}{n_0{}^2}-x^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}n_1(r\cos\theta, r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi)r^2\sin\theta d\varphi d\theta\right\}$$

$$r=\frac{t^2/n_0^2-x_0^2}{2(t/n_0-x_0\cos\theta)} \qquad (3-3-11)$$

由地震记录 $\psi(x_0, o, t)$确定 $n_1(x, y, z)$的问题，现在归结为微分——积分方程(3—3—10)，只要对 t 积分两次，就可化为纯积分方程。

二维非均匀介质的速度剖面

假定在与测线垂直的方向上介质是均匀的，按前面坐标系的选取，也就是假定波速 $v(x, y, z)$或 $n_1(x, y, z)$与变量 y 无关。这样 $n_1(x, y, z)$可用 $n_1(x, z)$表示。我们从积分方程(3—3—10)出发，求解 $n_1(x, z)$，因而可得速度剖面 $v(x, z)$。

考虑地面观测的地震记录，假设震源置于(s, 0, 0)处，炮检距为 f，所得到的地震记录道为 $R(s, f, t)$。在附注中考虑共地面中心点的地震剖面。当震源在坐标原点，炮检距为 f 时，在二维介质的假定下，式(3—3—10)简化为

$$\psi(f,0,t)=-\frac{Q}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{t^2/n_0^2-f^2}\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi}n_1(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi)r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\right\}$$

(3—4—1)

式中 $$r=\frac{t^2/n_0^2-f^2}{2(t/n_0-f\cos\theta)} \qquad (3-4-2)$$

由式(3—2—11)，并注意到这时震源在坐标原点，有

$$\psi(f,0,t)=R(0,f,t)-\varphi_0(f,0,t)$$

也就是说，$\psi(f, 0, t)$是由地震记录道 $R(0, f, t)$减去初始时刻震源脉冲波的影响，因而不妨将 $R(o, f, t)$作为 $\psi(f, 0, t)$，这样式(3—4—1)可写成

$$R(0,f,t)=-\frac{Q}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{t^2/n_0^2-f^2}\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi}n_1(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi)r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\right\}$$

(3—4—3)

当震源在 $O_s(s, 0, 0)$处，我们先将坐标原点平移到(s, 0, 0)点，在新的坐标系下，方程(3—4—3)成立，然后平移回原坐标系（球坐标的极点仍在震源处）得到

$$R(s,f,t)=-\frac{Q}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{t^2/n_0^2-f^2}\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi}n_1(s+r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi)r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\right\}$$

(3—4—4)

为简单起见，令

$$\varepsilon=\frac{n_0 f}{t}, \qquad p=\frac{t}{2n_0}(1-\varepsilon^2) \qquad (3-4-5)$$

这里 ε 是旋转椭球面 $r_{MP}+r_{O_sP}=\frac{t}{n_0}$的离心率。这时(3—4—2)可简写为

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta} \qquad (3-4-6)$$

将方程(3—4—4)对 t 积分两次后得

$$\frac{1}{t^2/n_0^2-f^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} n_1(s+r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi)r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{Q}\int_{n_0f}^{t} d\tau\int_{n_0f}^{\tau} R(s,f,\eta)d\eta + C(t-n_0f)+D \qquad (3\text{—}4\text{—}7)$$

一般可假定 $n_1(x, z)$在地面附近为常数。这样，容易确定

$$C=0, \qquad D=\pi n_1(s,0)$$

现在记

$$G(s,f,t)=\left(\frac{t^2}{n_0^2}-f^2\right)\left\{-\frac{\pi}{Q}\int_{n_0f}^{t}(t-\eta)R(s,f,\eta)d\eta+\pi n_1(s,0)\right\} \qquad (3\text{—}4\text{—}8)$$

这样，方程（3—4—7）可简写为

$$G(s,f,t)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} n_1(s+r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi)r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta \qquad (3\text{—}4\text{—}9)$$

我们的主要目的是进一步简化方程(3—4—9)。首先对变量 s 作富氏变换，函数 $u(s,t)$ 对变量 s 的富氏变换记为

$$\hat{u}_\lambda(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s}u(s,t)ds \qquad (3\text{—}4\text{—}10)$$

在这种记号下，方程（3—4—9）两边对 s 作富氏变换得

$$\hat{G}_\lambda(f,t)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\hat{n}_{1\lambda}(r\sin\theta\cos\varphi)e^{i\lambda r\cos\theta}r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta \qquad (3\text{—}4\text{—}11)$$

简化（3—4—11)的积分，对变量 φ 作变数替换

$$\eta=r\sin\theta\cos\varphi \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

则 $$\hat{G}_\lambda(f,t)=2\int_0^{\pi}e^{-i\lambda r\cos\theta}r^2\sin\theta\, d\theta\int_{-r\sin\theta}^{r\sin\theta}\frac{\hat{n}_{1\lambda}(\eta)}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-\eta^2}}d\eta \qquad (3\text{—}4\text{—}12)$$

下面分成两种情况：

1）当 $f=0$ 时，即零炮检距的情况。这时 $\varepsilon=0, p=\frac{t}{2n_0}$。由(3—4—6)式，$r=p$，式（3—4—12）为

$$\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)=2\int_0^{\pi}e^{-i\lambda p\cos\theta}p^2\sin\theta\, d\theta\int_{-p\sin\theta}^{p\sin\theta}\frac{\hat{n}_{1\lambda}(\eta)}{\sqrt{p^2\sin^2\theta-\eta^2}}d\eta$$

$$=8p^2\int_0^{\pi/2}\cos(\lambda p\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\int_0^{p\sin\theta}\hat{n}_{1\lambda}(\eta)/\sqrt{p^2\sin^2\theta-\eta^2}\, d\eta \qquad (3\text{—}4\text{—}13)$$

以上利用 $\hat{n}_{1\lambda}(z)$是 z 的偶函数。对 θ 作变数替换

$$\xi=p\sin\theta \qquad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

方程（3—4—13）变换为

$$\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)=8p^2\int_0^{p}\frac{\cos(\lambda\sqrt{p^2-\xi^2})\xi}{p\sqrt{p^2-\xi^2}}d\xi\int_0^{\xi}\frac{\hat{n}_{1\lambda}(\eta)}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}d\eta$$

交换积分次序后得

$$\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)=8p\int_0^p\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta\int_\eta^p\frac{\cos(\lambda\sqrt{p^2-\zeta^2})\zeta}{\sqrt{p^2-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2-\eta^2}}d\zeta \tag{3—4—14}$$

在内层积分中作替换

$$\zeta^2=p^2\sin^2\theta+\eta^2\cos^2\theta \qquad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

方程（3—4—14）简化为

$$\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)=8p\int_0^p\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta\int_0^{\pi/2}\cos(\lambda\sqrt{p^2-\eta^2}\cos\theta)d\theta \tag{3—4—15}$$

利用零阶贝塞尔函数的泊松积分表达式(〔四〕)

$$J_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\cos\theta)d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(z\cos\theta)d\theta \tag{3—4—16}$$

方程（3—4—15）简化为以贝塞尔函数为核的第一型伏特拉积分方程

$$\frac{1}{4\pi p}\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)=\int_0^pJ_0(\lambda\sqrt{p^2-\eta^2})\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta \tag{3—4—17}$$

方程两边对p微商可化为第二型积分方程

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{p}\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)\right]=\hat{n}_{1\lambda}(p)+\int_0^p\frac{\partial}{\partial p}\left[J_0(\lambda\sqrt{p^2-\eta^2})\right]\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta \tag{3—4—18}$$

由于$J_0'(z)=-J_1(z)$(〔四〕)，则（3—4—18）可写成

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{p}\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)\right]=\hat{n}_{1\lambda}(p)-\int_0^p\frac{\lambda pJ_1(\lambda\sqrt{p^2-\eta^2})}{\sqrt{p^2-\eta^2}}\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta \tag{3—4—19}$$

这个积分方程可用类似于(〔三〕)的方法求解。记虚宗量的贝塞尔函数为(〔四〕)

$$I_n(z)=(-i)^nJ_n(iz)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

可得积分等式(〔三〕)

$$\int_0^{\pi/2}J_1(z\sin\varphi)I_1(z\cos\varphi)d\varphi=\frac{1}{z}\left[I_1(z)-J_1(z)\right] \tag{3—4—20}$$

此式直接用贝塞尔函数的级数表示式也不难得证。利用式（3—4—20），可以验证

$$\hat{n}_{1\lambda}(p)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{p}\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)\right]+\frac{1}{4\pi}\int_0^p\frac{\lambda pI_1(\lambda\sqrt{p^2-\zeta^2})}{\sqrt{p^2-\zeta^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\zeta}\hat{G}_\lambda(0,2n_0\zeta)\right]d\zeta \tag{3—4—21}$$

是积分方程（3—4—19）的解。为此，只需将表示式(3—4—21)代入方程（3—4—19）的未知系数 $\hat{n}_{1\lambda}(p)$，证明等式成立。代入后，方程（3—4—19）的右端为

$$\hat{n}_{1\lambda}(p)-\int_0^p \frac{\lambda p J_1(\lambda\sqrt{p^2-\eta^2})}{\sqrt{p^2-\eta^2}}\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{p}\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)\right]+\frac{1}{4\pi}\int_0^p \frac{\lambda p I_1(\lambda\sqrt{p^2-\zeta^2})}{\sqrt{p^2-\zeta^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\zeta}\hat{G}_\lambda(0,2n_0\zeta)\right]d\zeta$$

$$-\int_0^p \frac{\lambda p J_1(\lambda_1\sqrt{p^2-\eta^2})}{\sqrt{p^2-\eta^2}}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{\eta}\hat{G}_\lambda(0,2n_0\eta)\right]d\eta$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^p \frac{\lambda p J_1(\lambda\sqrt{p^2-\eta^2})}{\sqrt{p^2-\eta^2}}d\eta\int_0^\eta \frac{\lambda\eta I_1(\lambda\sqrt{\eta^2-\zeta^2})}{\sqrt{\eta^2-\zeta^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\zeta}\hat{G}_\lambda(0,2n_0\zeta)\right]d\zeta$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{p}\hat{G}_\lambda(0,2n_0p)\right]+s_1+s_2+s_3 \qquad (3—4—22)$$

式中 s_1，s_2，s_3 分别表示相应的项。现在主要是化简 s_3，先交换积分次序，得

$$s_3=-\frac{1}{4\pi}\int_0^p\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\xi}\hat{G}_\lambda(0,2n_0\zeta)\right]d\zeta\int_\zeta^p\frac{\lambda^2 pJ_1(\lambda\sqrt{p^2-\eta^2})}{\sqrt{p^2-\eta^2}}\frac{I_1(\lambda\sqrt{\eta^2-\zeta^2})}{\sqrt{\eta^2-\zeta^2}}\eta d\eta$$

在内层积分中作替换

$$\eta^2=p^2\cos^2\theta+\zeta^2\sin^2\theta \qquad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

并利用式（3—4—20），则

$$s_3=-\frac{1}{4\pi}\int_0^p\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\zeta}\hat{G}_\lambda(0,2n_0\zeta)\right]d\zeta\int_0^{\pi/2}\lambda^2 pJ_1(\lambda\sqrt{p^2-\zeta^2}\sin\theta)I_1(\lambda\sqrt{p^2-\zeta^2}\cos\theta)d\theta$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_0^p\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\zeta}\hat{G}_\lambda(0,2n_0\zeta)\right]\frac{\lambda p}{\sqrt{p^2-\zeta^2}}[I_1(\lambda\sqrt{p^2-\zeta^2})-J_1(\lambda\sqrt{p^2-\zeta^2})]d\zeta$$

$$=-(s_1+s_2)$$

这样，由(3－4—22)，确实证明了(3—4—21)所给出的 $\hat{n}_{1\lambda}(p)$ 是积分方程（3—4—19）的解。

2）当 $f\neq0$ 的情况。这时由于 r 与 θ 有关，交换（3—4—12）式的积分次序比较麻烦。（3—4—12）的积分作为二重积分是在闭曲线

$$\eta=\pm r\sin\theta=\frac{\pm p}{1-\varepsilon\cos\theta}\cdot\sin\theta \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi) \qquad (3—4—23)$$

所围的面积上进行的。闭曲线（3—4—23）又可表成

$$\theta=\theta_k(\eta)=\arccos\frac{\varepsilon\eta^2+(-1)^k p\sqrt{p^2-\eta^2(1-\varepsilon^2)}}{\varepsilon^2\eta^2+p^2} \qquad (k=1,2) \qquad (3—4—24)$$

$$-\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\leqslant\eta\leqslant\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

这样（3—4—12）交换积分后得

$$\hat{G}_\lambda(f,t)=2\int_{-p/\sqrt{1-\varepsilon^2}}^{p/\sqrt{1-\varepsilon^2}}\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta\int_{\theta_1(\eta)}^{\theta_2(\eta)}\frac{e^{-i\lambda r\cos\theta}r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-\eta^2}}d\theta \qquad (3—4—25)$$

由于 $f\neq0$，因而 $\varepsilon\neq0$，据关系式（3—4—6）在内层积分中将变量 θ 替换为 r，注意到

$$r^2\sin\theta\, d\theta=-\frac{p}{\varepsilon}dr \qquad (3—4—26)$$

同时利用（3—4—24），对变量 r，相应的积分限为

$$r_k(\eta)=p/(1-\varepsilon\cos\theta_k(\eta))=[p+(-1)^k\varepsilon\sqrt{p^2-\eta^2(1-\varepsilon^2)}]/(1-\varepsilon^2)\quad(k=1,2) \qquad (3—4—27)$$

由关系式（3—4—6），方程（3—4—25）的被积函数中

$$r\cos\theta=(r-p)/\varepsilon \qquad (3—4—28)$$

$$r^2\sin^2\theta-\eta^2=-[(1-\varepsilon^2)r^2-2pr+(\varepsilon^2\eta^2+p^2)]/\varepsilon^2 \qquad (3—4—29)$$

容易看出，（3—4—29）的分子作为 r 的二次多项式，恰好以（3—4—27）式给出的 $r_k(\eta)$（$k=1,2$）为零点，因此式（3—4—29）可以写成

$$r^2\sin^2\theta-\eta^2=\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}(r-r_1(\eta))(r_2(\eta)-r) \qquad (3—4—30)$$

将（3—4—26），（3—4—27），（3—4—28），(3—4—30)代入积分（3—4—25）得

$$\hat{G}_\lambda(f,t)=2\int_{-p/\sqrt{1-\varepsilon^2}}^{p/\sqrt{1-\varepsilon^2}}\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta\int_{r_1(\eta)}^{r_2(\eta)}\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{e^{-i\lambda(r-p)/\varepsilon}}{\sqrt{(r-r_1(\eta))(r_2(\eta)-r)}}dr \qquad (3—4—31)$$

在内层积分中又作替换

$$r=r_1(\eta)\cos^2\theta+r_2(\eta)\sin^2\theta \qquad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

则方程（3—4—31）化为

$$\hat{G}_\lambda(f,t)=\frac{8p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\int_0^{p/\sqrt{1-\varepsilon^2}}\hat{n}_{1\lambda}(\eta)\,d\eta\int_0^{\pi/2}\exp\{-i\lambda[r_1(\eta)\cos^2\theta+ +r_2(\eta)\sin^2\theta-p]/\varepsilon\}d\theta$$

将 $r_k(\eta)$ 的表示式（3—4—27）代入，得到

$$\hat{G}_\lambda(f,t)=\frac{8p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\exp\left\{\frac{i\lambda p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right\}\int_0^{p/\sqrt{1-\varepsilon^2}}\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta\int_0^{\pi/2} \exp\{i\lambda\sqrt{p^2-\eta^2(1-\varepsilon^2)}\cos2\theta/(1-\varepsilon^2)\}d\theta \qquad (3—4—32)$$

利用贝塞尔函数的泊松表示式（3—4—16），（3—4—32）中的积分

$$\int_0^{\pi/2}\exp\{-i\lambda\sqrt{p^2-\eta^2(1-\varepsilon^2)}\cos2\theta/(1-\varepsilon^2)\}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\exp\{-i\lambda\sqrt{p^2-\eta^2(1-\varepsilon^2)}\cos\theta/(1-\varepsilon^2)\}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\lambda\sqrt{p^2-\eta^2(1-\varepsilon^2)}}{1-\varepsilon^2}\cos\theta\right)d\theta=\frac{\pi}{2}J_0\left(\frac{\lambda\sqrt{p^2-\eta^2(1-\varepsilon^2)}}{1-\varepsilon^2}\right)$$

这样，方程（3—4—32）简化为

$$\hat{G}_\lambda(f,t)=\frac{4\pi p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\exp\left\{\frac{i\lambda p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right\}\int_0^{p/\sqrt{1-\varepsilon^2}}J_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sqrt{\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}-\eta^2}\right)\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta$$

（3—4—33）

在推导方程(3—4—33)的过程中假定 $\varepsilon\neq0$，但当 $\varepsilon=0$ 时，方程（3—4—33）就是（3—4—17），就是说，方程（3—4—33）包含了零炮检距情况。

在方程（3—4—33）中，令

$$z=p/\sqrt{1-\varepsilon^2}\qquad(3—4—34)$$

则 $t=n_0\sqrt{f^2+4z^2}$，代入方程（3—4—33），得

$$\frac{e^{-i\lambda f/2}}{4\pi z}\hat{G}_\lambda(f,n_0\sqrt{f^2+4z^2})=\int_0^z J_0\left(\lambda\sqrt{\frac{4z^2+f^2}{4z^2}}\sqrt{z^2-\eta^2}\right)\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta)$$

（3—4—35）

这个积分方程不易求解，在炮检距 f 较小时，方程（3—4—35）近似地简化为

$$\frac{e^{-i\lambda f/2}}{4\pi z}\hat{G}_\lambda(f,n_0\sqrt{f^2+4z^2})=\int_0^z J_0(\lambda\sqrt{z^2-\eta^2})\hat{n}_{1\lambda}(\eta)d\eta\qquad(3—4—36)$$

近似方程（3—4—36）完全与（3—4—17）类似，因此由（3—4—21），我们立即可得方程（3—4—36）的解

$$\hat{n}_{1\lambda}(z)=\frac{e^{-i\lambda f/2}}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{z}\hat{G}_\lambda(f,n_0\sqrt{f^2+4z^2})\right]\right.$$

$$\left.+\int_0^z\frac{\lambda z I_1(\lambda\sqrt{z^2-\zeta^2})}{\sqrt{z^2-\zeta^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\zeta}\hat{G}_\lambda(f,n_0\sqrt{f^2+4\zeta^2}\right]d\zeta\right\}\qquad(3—4—37)$$

注意这个解当 $f=0$ 时是精确的，而且它就是式（3—4—21）；当 $f\neq0$ 时是近似的。现在不必再分二种情况讨论，可以直接应用解（3—4—37）。

现在给出$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{z}\hat{G}_\lambda(f,n_0\sqrt{f^2+4z^2})\right]$的具体形式。由式（3—4—8），对变量 s 作富氏变换得

$$\hat{G}_\lambda(f,t)=\left(\frac{t^2}{n_0^2}-f^2\right)\left\{-\frac{\pi}{Q}\int_{n_0 f}^{t}(t-\eta)\hat{R}_\lambda(f,\eta)d\eta+\pi\hat{n}_{1\lambda}(0)\right\}$$

因此

$$\frac{1}{z}\hat{G}_\lambda(f,n_0\sqrt{f^2+4z^2})=$$

$$=4z\left\{-\frac{\pi}{Q}\int_{n_0f}^{n_0\sqrt{f^2+4z^2}}(n_0\sqrt{f^2+4z^2}-\eta)\hat{R}_\lambda(f,\eta)d\eta+\pi\hat{n}_{1\lambda}(0)\right\}$$

$$=4z\left\{-\frac{\pi n_0^2}{Q}\int_{f}^{\sqrt{f^2+4z^2}}(\sqrt{f^2+4z^2}-\eta)\hat{R}_\lambda(f,n_0\eta)d\eta+\pi\hat{n}_{1\lambda}(0)\right\}.$$

对 z 微商后得

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{z}\hat{G}_\lambda(f,n_0\sqrt{f^2+4z^2})\right]$$

$$=-\frac{4\pi n_0^2}{Q}\int_{f}^{\sqrt{f^2+4z^2}}\left(\frac{f^2+8z^2}{\sqrt{f^2+4z^2}}-\eta\right)\hat{R}_\lambda(f,n_0\eta)d\eta+4\pi\hat{n}_{1\lambda}(0)$$

$$(3\text{—}4\text{—}38)$$

将(3—4—38)代入(3—4—37)，由于一般 $\hat{n}_{1\lambda}(0)$ 具有 $\delta(\lambda)$ 的性质，$\hat{n}_{1\lambda}(0)$ 在代入(3—4—37)式的积分中的项可以去掉，因此

$$\hat{n}_{1\lambda}(z)-\hat{n}_{1\lambda}(0)=-\frac{n_0^2e^{-\lambda f/2}}{Q}\left\{\int_{f}^{\sqrt{f^2+4z^2}}\left(\frac{f^2+8z^2}{\sqrt{f^2+4z^2}}-\eta\right)\hat{R}_\lambda(f,n_0\eta)d\eta+\right.$$

$$\left.+\int_0^z\frac{\lambda zI_1(\lambda\sqrt{z^2-\zeta^2})}{\sqrt{z^2-\zeta^2}}d\zeta\int_{f}^{\sqrt{f^2+4\zeta^2}}\left(\frac{f^2+8\zeta^2}{\sqrt{f^2+4\zeta^2}}-\eta\right)\hat{R}_\lambda(f,n_0\eta)d\eta\right\}$$

式中最后的积分交换次序后可得

$$\hat{n}_{1\lambda}(z)-\hat{n}_{1\lambda}(0)$$

$$=-\frac{n_0^2e^{-\lambda f/2}}{Q}\left\{\int_{f}^{\sqrt{f^2+4z^2}}\left(\frac{f^2+8z^2}{\sqrt{f^2+4z^2}}-\eta\right)\hat{R}_\lambda(f,n_0\eta)d\eta+\right.$$

$$+\int_{f}^{\sqrt{f^2+4z^2}}\hat{R}_\lambda(f,n_0\eta)d\eta\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2-f^2}}^{z}\frac{\lambda zI_1(\lambda\sqrt{z^2-\zeta^2})}{\sqrt{z^2-\zeta^2}}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{f^2+8\zeta^2}{\sqrt{f^2+4\zeta^2}}-\eta\right)d\zeta\right\}\qquad(3\text{—}4\text{—}39)$$

公式(3—4—39)可以简化为

$$\hat{n}_{1\lambda}(z)-\hat{n}_{1\lambda}(0)=\int_{f}^{\sqrt{f^2+4z^2}}K(\lambda,z,f,\eta)\hat{R}_\lambda(f,n_0\eta)d\eta\ ,\qquad(3\text{—}4\text{—}40)$$

其中