

Z.K.Y.Y.A2R0030

內 部

中国科学院原子能研究所

在 104 型电子计算机上 计算 Bessel 函数值的标准程序

陶 大 堃

一九六二年十一月

在 104 型电子计算机上 计算 Bessel 函数值的标准程序

在許多数学和物理問題中，常常会遇到要計算各类貝塞尔函数值。本文将拟对 $J_n(x)$ 、 $Y_n(x)$ 、 $I_n(x)$ 、 $K_n(x)$ 等函数編制出标准程序，以供使用。

一、計 算 公 式

当自变量小时，用下列公式[1]：

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2s}}{s!(n+s)!},$$

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2s} + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2s}}{s!(n+s)!} \left[2 \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \psi(s+1) - \psi(n+s+1) \right] \right\},$$

$$I_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2s}}{s!(n+s)!},$$

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2s} - (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2s}}{s!(n+s)!} \left[2 \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \psi(s+1) - \psi(n+s+1) \right] \right\},$$

其中 $\psi(s+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s}$, $\psi(1) = -\gamma$, γ 为 Euler 常数 $= 0.57721567$ 。

当自变量大时用下列漸近表示式[2][3]：

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_n(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) - Q_n(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right],$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[Q_n(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) + P_n(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right],$$

$$P_n(x) \sim 1 - \frac{(\mu-1^2)(\mu-3^2)}{2!(8x)^2} + \frac{(\mu-1^2)(\mu-3^2)(\mu-5^2)(\mu-7^2)}{4!(8x)^4} - \dots,$$

$$Q_n(x) \sim \frac{(\mu-1^2)}{8x} - \frac{(\mu-1^2)(\mu-3^2)(\mu-5^2)}{3!(8x)^3} + \dots,$$

$$\mu = 4n^2$$

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 - \frac{(\mu-1)}{8x} + \frac{(\mu-1^2)(\mu-3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right],$$

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \frac{(\mu-1^2)}{8x} + \frac{(\mu-1^2)(\mu-3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right].$$

在編制程序时，为方便起见，将小自变量的函数表示式用递推关系来表示。若記

$$C_0(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!}, \quad C_s(x) = C_{s-1}(x) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{s(n+s)},$$

則

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s C_s(x),$$

$$I_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s(x).$$

若記

$$A_0(x) = (n-1)! \left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}, \quad A_s(x) = A_{s-1}(x) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{s(n-s)},$$

$$B_0(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!} \left[2 \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \psi(1) - \psi(n+1) \right],$$

$$B_s(x) = B_{s-1}(x) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{s(n+s)} \cdot \frac{\left[2 \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \psi(s+1) - \psi(s+n+1) \right]}{\left[2 \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \psi(s) - \psi(s+n) \right]},$$

則

$$Y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \left[- \sum_{s=0}^{n-1} A_s(x) + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s B_s(x) \right],$$

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s A_s(x) - (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} B_s(x) \right].$$

二、功 能

(1) 本程序仅对于自变量为正的实数与貝塞尔函数的阶 n 为从 0 到 4 的整数阶有效。

(2) 按要求給出各种不同的信息，本程序就能分別算出 $I_n(x)$ 、 $Y_n(x)$ 、 $J_n(x)$ 、 $K_n(x)$ 、 $e^{-\mu}I_n(x)$ 、 $e^{\mu}K_n(x)$ 、 $e^{-x}I_n(x)$ 、 $e^xK_n(x)$ 等函数值来，其中 μ 为視需要而引入的比例因子。它的引入，能避免因 $I_n(x)$ 过大而产生溢出停机现象或因 $K_n(x)$ 过小而損失其精确性。但它必須滿足 $|x-\mu| \leq 21.5$ 。

(3) 使用本程序所算出的函数值，其精确度一般都达到八位有效数，唯有 $K_n(x)$ ，在 $x \in [4, 7.5]$ 时，只能准确到六位到七位有效数（准确到小数点后第九位），这是由于公式中正負項相抵消而引起的。为保持程序的簡炼，对上述范围的 $K_n(x)$ ，沒有做另外处理来提高精确度。

三、存儲單元分配

- (1) 0005 ———存自变量 x 的标准单元。
- (2) 0006 ———存函数值 y 的标准单元。
- (3) 1180÷1281——程序。
- (4) 1282+1283——工作单元。
- (5) 1284 ———存比例因子的幂次 μ 。
- (6) 1285 ———存貝塞尔函数的阶 n 。

四、程序使用說明

(1) 程序用了 104 机上的标准子程序 $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{x}$, e^x 和 $\ln x$ 。因此在使用本程序之前, 必須把上列标准子程序讀入内存。

(2) 本程序在中央控制系統工作, 使用本程序时, 必須在中央控制系統用操作碼为 ИММК 的无条件轉移指令轉向本程序, 而在本程序工作結束后将自动返回主程序工作。

(3) 本程序在計算了函数值后, 0005 单元中不再保留自变量 x 的值。

(4) 在 1284、1285 和 0005 单元中的数, 都要求以規格化的二进位制形式送入。因此, 使用本程序时, 在主程序中(在中央控制系統工作)需用下列指令:

K-3:	002	< μ >	0000	1284
K-2:	002	< n >	0000	1285
K-1:	002	< x >	0000	0005
K:	010	0000	0000	$z+1$
K+1:	002	0006	0000	< y >

若不是計算 $e^{-\mu} I_n(x)$ 或 $e^{\mu} K_n(x)$, 第 K-3 条指令将不起作用, 可以除去。

(5) 本程序还可用“广义轉向”。这比起用“非广义轉向”要方便些, 只需在主程序(在中央控制系統工作的)中用三条指令

K-2:	002	< μ >	0000	1284
K-1:	002	< n >	0000	1285
K:	010	< x >	< y >	z (詳見表 I)

即可。但要注意, 用“广义轉向”时, 必須先将 104 机上的“广义轉向”程序讀入内存。

(6) 由于机器所表示的数有一定的范围, 某些函数的自变量也就要受到一定的限制。在使用本程序时, 必須注意到这点(見表 II)。否則, 若自变量超出所規定的范围, 将会使函数值大得出机器能表示的数的范围而产生溢出停机。

(7) 本程序輸入时所用的 MA、MB 形式为:

016	0080	0000	1180
017	0000	0102	0000
115	0000	0000	0000

总孔数为 235(十六进数), 最后指令形式:

表 I

各 类 函 数	使 用 时 应 该 用 的 指 令			
$I_n(x)$	K:	010	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$ 1180
$Y_n(x)$	K:	010	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$ 1182
$I_n(x)$	K:	010	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$ 1184
$K_n(x)$	K:	010	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$ 1186
$e^{-\mu} I_n(x)$	K:	010	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$ 1188
$e^{\mu} K_n(x)$	K:	010	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$ 1180
$e^{-x} I_n(x)$	K:	010	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$ 1182
$e^x K_n(x)$	K:	010	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$ 1184

表 II 停 机 表

函 数 类 别	$I_n(x)$	$Y_n(x)$ 、 $K_n(x)$ 、 $e^{\mu} K_n(x)$ 、 $e^x K_n(x)$	$K_n(x)$ 、 $e^{\mu} K_n(x)$ 、 $e^x K_n(x)$
停机指令的地址	1151	1200	1281
指令的操作码	001	004	115
停 机 原 因	当 $n=0$, $x > 23.95$ $n=1$, $x > 24$ $n=2$, $x > 24.05$ $n=3$, $x > 24.15$ $n=4$, $x > 24.30$ 时, $I_n(x)$ 函数值超出机器表示范围而产生溢出停机。	当 $n=0$, $x \sim 0$ $n=1$, $x \sim 0$ $n=2$, $x \sim 0$ $n=3$, $x < 0.0024$ $n=4$, $x < 0.018$ 时, 函数值 $Y_n(x)$, $K_n(x)$ 超出机器表示范围而产生溢出停机。 $e^{\mu} K_n(x)$ 和 $e^x K_n(x)$ 为 e 和 $K_n(x)$ 的乘积, 因而也产生溢出停机。	当 $x > 4$ 时停机

• 附貝塞尔函数标准程序。

	編碼	操作碼	第一地址	第二地址	第三地址	注	附
$J_n \Rightarrow$	1180	011	0000	0004	1351		
	1	011	0000	1280	1106		
$Y_n \Rightarrow$	2	011	0000	0004	1351		
	3	011	0000	1280	1115		
$I_n \Rightarrow$	4	011	0000	0004	1351		
	5	011	0000	1280	1100		
$K_n \Rightarrow$	6	011	0000	0004	1351		
	7	011	0000	1280	1110		
$e^{-\mu} I_n \Rightarrow$	8	011	0000	0004	1351		
	9	011	0000	1280	1105		
$e^{\mu} K_n \Rightarrow$	0	011	0000	0004	1351		
	1	011	0000	1280	1130		
$e^{-x} I_n \Rightarrow$	2	011	0000	0004	1351		
	3	011	0000	1280	1102		
$e^x K_n \Rightarrow$	4	011	0000	0004	1351		
	5	011	0000	1280	1126		
	1190	011	0000	0000	1202		
	1	011	0000	0000	1204		
	2	011	0000	0000	1219		
	3	114	1285	1100	1209	輔助指令	
	4	011	0000	0000	1260		
	5	011	0000	0000	1271		
	6	011	0000	0000	1278		
	7	001	0245	0082	1343		$\bar{7} = 0.57721567$
	8	002	0243	0311	1132		$\ln 10$
	9	003	0380	0000	0000		7
	0	004	0220	0000	0000		11
	1	005	0280	0000	0000		20
	2	002	1324	0151	0202		$-\pi$
	3	001	0324	0151	0202		$\pi/2$
	4	000	0281	1330	0362	常數	$2/\pi$
	5	003	0300	0000	0000		6
	1100	100	0000	0000	0000		0
	1	001	0200	0000	0000		1
	2	002	0200	0000	0000		2
	3	002	0300	0000	0000		3
	4	003	0200	0000	0000		4
	5	003	0220	0000	0000		5.5
	6	014	1190	0005	1230	$\frac{L}{J} P_1(11 < x \frac{J'}{L})$	
	7	000	1191	0000	1155	$\frac{L}{2} \left[\frac{47}{81} \right] \Rightarrow L_2$	
	8	000	1218	0000	1206	$\left[\frac{81}{81} \right] \Rightarrow L_3$	

編碼 操作碼 第一地址 第二地址 第三地址

附

注

1109	011	0000	0000	1113
0	000	1218	0000	1206
1	011	0000	0000	1112
2	014	1191	0005	1236
3	003	0005	0000	1281
4	011	0000	0000	1111
5	014	1191	0005	1238
1110	003	1284	0000	1281
1	000	1213	0000	1206
2	000	1201	0000	1155
3	012	1140	1157	1151
4	011	0000	0000	1141
5	014	1190	0005	1232
6	000	1190	0000	1155
7	000	0000	0000	1211
8	000	0000	0000	1215
9	011	0000	0000	1135
0	014	1101	1285	1113
1	014	0005	1105	1124
2	011	0000	0000	1122
3	014	1103	1285	1120
4	014	0005	1195	1124
5	011	0000	0000	1122
1120	014	1104	1285	1281
1	014	0005	1199	1124
2	003	0005	0000	1281
3	011	0000	0000	1235
4	000	1218	0000	1212
5	011	0000	0000	1132
6	014	1101	1285	1129
7	014	0005	1105	1124
8	011	0000	0000	1233
9	014	1103	1285	1122
0	014	0005	1195	1124
1	011	0000	0000	1233
2	014	1104	1285	1281
3	014	1199	0005	1233
4	000	0005	0000	1281

$\frac{7}{\sqrt{81}} \Rightarrow L_3$
$\frac{6}{\sqrt{e^{-x}1}} P_3(20 < x)$
$\frac{5}{\sqrt{-x}} \Rightarrow \beta$
$\frac{e^{-\mu}1}{\sqrt{e^{-\mu}1}} P_4(20 < x)$
$\frac{-\mu}{\sqrt{-\mu}} \Rightarrow \beta$
$\frac{80}{\sqrt{48}} \Rightarrow L_3$
$\frac{48}{\sqrt{43}} \Rightarrow L_2$
$\frac{43}{\sqrt{36}} \Rightarrow L_1$
$\frac{Y}{\sqrt{P_2(11 < x)}} \Rightarrow Y'$
$\frac{46}{\sqrt{9}} \Rightarrow L_2$
$\frac{0'}{\sqrt{0'}} \Rightarrow L_4$
$\frac{0'}{\sqrt{0'}} \Rightarrow L_5$
$\frac{12}{\sqrt{P_{10}(1 < n)}} \Rightarrow K$
$\frac{17}{\sqrt{P_{11}(x < 5.5)}} \Rightarrow K$
$\frac{14}{\sqrt{P_{12}(3 < n)}} \Rightarrow K$
$\frac{17}{\sqrt{P_{13}(x < 6)}} \Rightarrow K$
$\frac{16}{\sqrt{P_{14}(4 < n)}} \Rightarrow K$
$\frac{17}{\sqrt{P_{15}(x < 7)}} \Rightarrow K$
$\frac{16}{\sqrt{-x}} \Rightarrow \beta$
$\frac{e^{\mu}K}{\sqrt{e^{\mu}K}} \Rightarrow K$
$\frac{81}{\sqrt{17}} \Rightarrow L_6$
$\frac{34}{\sqrt{P_{18}(1 < n)}} \Rightarrow e^xK$
$\frac{20}{\sqrt{P_{19}(x < 5.5)}} \Rightarrow e^xK$
$\frac{22}{\sqrt{P_{20}(3 < n)}} \Rightarrow e^xK$
$\frac{24}{\sqrt{P_{21}(x < 6)}} \Rightarrow e^xK$
$\frac{22}{\sqrt{P_{22}(4 < n)}} \Rightarrow e^xK$
$\frac{24}{\sqrt{P_{23}(7 < x)}} \Rightarrow e^xK$
$\frac{24}{\sqrt{x}} \Rightarrow \beta$

編 碼	操 作 碼	第一地址	第二地址	第三地址	附 注
1125	011	0000	0000	1131	$\frac{33}{\Gamma}$
1130	014	1101	1285	1133	$\frac{L}{e^{\mu}K} P_{25}(1 < n \frac{27}{\square})$
1	014	0005	1105	1130	$P_{26}(x < 5.5 \frac{32}{\square})$
2	011	0000	0000	1138	$\frac{31}{\Gamma}$
3	014	1103	1285	1136	$P_{27}(3 < n \frac{29}{\square})$
4	014	0005	1195	1130	$P_{28}(x < 6 \frac{32}{\square})$
5	011	0000	0000	1138	$\frac{31}{\Gamma}$
6	014	1104	1285	1281	$P_{29}(4 < n \frac{32}{\square})$
7	014	0005	1199	1130	$P_{30}(x < 7 \frac{32}{\square})$
8	002	1284	0005	1281	$\frac{L}{31} \mu - x \Rightarrow \beta$
9	011	0000	0000	1235	$\frac{e^{\mu}K'}{\Gamma}$
0	000	1284	0000	1281	$\frac{L}{22} \mu \Rightarrow \beta$
1	000	1159	0000	1212	$\frac{L}{33} y \Rightarrow Y_1 ' \Rightarrow L_0$
2	000	1155	0000	1155	$\frac{L}{34} \left[\frac{57}{164} \right]' \Rightarrow L_2$
3	000	1204	0000	1211	$\left[-C_n \Rightarrow C_n \right]' \Rightarrow L_4$
4	000	1192	0000	1215	$\left[\frac{56}{\Gamma} \right]' \Rightarrow L_5$
5	000	0000	0000	1151	$\frac{L}{35} 0' \Rightarrow L_1$
1140	000	1193	0000	1206	$\left[P(n=0 \frac{50}{\square}) \right]' \Rightarrow L_3$
1	000	1100	0000	1282	$\frac{L}{36} 0 \Rightarrow S$
2	000	1100	0000	1283	$0 \Rightarrow M$
3	000	1101	0000	1255	$1 \Rightarrow n_2$
4	000	1100	0000	1234	$\frac{L}{37} 0 \Rightarrow n_1$
5	007	0005	0035	1285	$\frac{x}{2} \Rightarrow x_2$
6	003	1285	1285	1286	$x_2^2 \Rightarrow x_1$
7	000	1101	0000	1265	$1 \Rightarrow \delta$
8	000	1101	0000	1282	$1 \Rightarrow C_n$
9	114	1285	1100	1141	$P_{33}(n=0 \frac{39}{\square})$
0	011	0000	0000	1151	$\frac{42}{\Gamma}$
1	003	1265	0000	1265	$\frac{L}{38} - \delta \Rightarrow \delta$
2	001	1284	1101	1284	$n_1 + 1 \Rightarrow n_1$
3	004	1285	1284	1280	$C_n \frac{x_2}{n_1} \Rightarrow C_n$
4	003	1280	1282	1282	
5	114	1284	1285	1141	$P_{40}(n_1 = n \frac{39}{\square})$
1150	003	1285	1282	1276	$\frac{L}{41} n \cdot C_n \Rightarrow \alpha$
1	000	0000	0000	0000	$\frac{L}{42} L_1$
2	000	1286	0000	0005	$x_1 \Rightarrow x$
3	010	0000	0000	1240	$\frac{\log x}{\Gamma}$

編碼	操作碼	第一地址	第二地址	第三地址	附	注
1154	001	0006	1197	1287		$y + \bar{y} \Rightarrow x$
5	011	0000	1225	1214		$\frac{57}{164}$
6	003	1282	1288	1282		$C_n \phi \Rightarrow C_n$
7	000	1100	0000	0006	$\frac{43}{43}$	$0 \Rightarrow y$
8	001	1282	1101	1282	$\frac{44}{44}$	$S + 1 \Rightarrow S$
9	000	0006	0000	1283		$y \Rightarrow Y_1$
0	001	1282	0006	0006		$C_n + y \Rightarrow y$
1	001	1285	1282	1280	$\frac{45}{45}$ }	$C_n \frac{x_1}{s(n+s)} \Rightarrow C$
2	003	1282	1280	1280		
3	004	1286	1280	1280		
4	003	1282	1280	1282		
5	000	0000	0000	0000		
1200	003	1282	1288	1282		L_2
1	011	0000	0000	1205		$C_n \phi \Rightarrow C_n$
2	011	0000	1225	1214	$\frac{46}{46}$	$\frac{57}{164}$
3	003	1282	1288	1282		$C_n \phi \Rightarrow C_n$
4	003	1282	0000	1282	$\frac{47}{47}$	$-C_n \Rightarrow C_n$
5	114	0006	1283	1158		$P_{48}(y = Y_1 \frac{44}{44})$
6	000	0000	0000	0000		L_3
7	000	1100	0000	1289	$\frac{49}{49}$	$0 \Rightarrow Q_n$
8	011	0000	0000	1215		$\frac{55}{55}$
9	004	1101	1276	1282	$\frac{50}{50}$	$1/\alpha \Rightarrow C_n$
0	000	1282	0000	1289		$C_n \Rightarrow Q_n$
1	014	1285	1102	1215		$P_{51}(n < 2 \frac{44}{44})$
2	000	1101	0000	1282	$\frac{52}{52}$	$1 \Rightarrow S$
3	002	1285	1282	1280	$\frac{53}{53}$ }	$C_n \frac{x_1}{s(n-s)} \Rightarrow C_n$
4	003	1282	1280	1280		
5	004	1286	1280	1280		
1210	003	1282	1280	1282		
1	000	0000	0000	0000		L_4
2	001	1289	1282	1289		$Q_n + C_n \Rightarrow Q_n$
3	001	1282	1101	1282		$S + 1 \Rightarrow S$
4	114	1282	1285	1203		$P_{54}(s = n \frac{44}{44})$
5	000	0000	0000	0000	$\frac{55}{55}$	L_5
6	002	1289	0006	0006		$Q_n - y \Rightarrow y$
7	004	0006	1192	0006		$y / -\pi \Rightarrow y$
8	011	0000	0000	1280	$\frac{81}{81}$	
9	003	1265	0006	0006	$\frac{56}{56}$	$\delta y \Rightarrow y$
0	002	1289	0006	0006		$Q_n - y \Rightarrow y$

編 碼	操 作 碼	第一地址	第二地址	第三地址	附 注
1211	007	0006	0035	0006	$y/2 \Rightarrow y$
2	000	0000	0000	0000	L_5
3	011	0000	0000	1273	$\sqrt[80]{}$
4	000	1100	0000	1289	L_{57}
5	000	1282	0000	1280	$0 \Rightarrow Q_n$
1220	001	1282	1285	1285	$S \Rightarrow P_n$
1	114	1285	1100	1223	$s + n \Rightarrow x_2$
2	011	0000	0000	1227	$P_{53}(n=0 \sqrt[59]{})$
3	001	1280	1101	1280	$\sqrt[61]{}$
4	004	1101	1280	0005	L_{59}
5	001	0005	1289	1289	$P_n + 1 \Rightarrow P_n$
6	114	1280	1285	1223	$\frac{1}{P_n} + Q_n \Rightarrow Q_n$
7	114	1282	1100	1229	$P_{50}(P_n = x_2 \sqrt[59]{})$
8	011	0000	0000	1221	$P_{51}(s=0 \sqrt[62]{})$
9	004	1102	1282	0005	$\sqrt[63]{}$
0	001	1283	0005	1283	L_{62}
1	001	1283	1289	1284	$M + \frac{2}{S} \Rightarrow M$
2	002	1287	1284	1284	L_{63}
3	004	1284	1255	1288	$x - M - Q_n \Rightarrow n_1$
4	000	1284	0000	1255	$n_1/n_2 \Rightarrow \phi$
5	000	0000	0000	0000	$n_1 \Rightarrow n_2$
1230	000	0000	0000	1265	L_{64}
1	011	0000	0000	1233	$\sqrt[65]{}$
2	000	1194	0000	1265	$\sqrt[76]{}$
3	000	1204	0000	1259	L_{65}
4	000	0000	0000	1255	$\sqrt[77]{}$
5	011	0000	0000	1242	$0' \Rightarrow L_8$
6	000	1218	0000	1276	$\sqrt[68]{}$
7	011	0000	0000	1230	L_{69}
8	002	0005	1284	1281	$\sqrt[81]{}$
9	000	1159	0000	1276	L_{70}
0	000	0000	0000	1259	$\sqrt[66]{}$
1	000	1195	0000	1255	$x - \mu \Rightarrow \beta$
2	011	0000	0000	1242	$\sqrt[78]{}$
3	000	1218	0000	1272	$\sqrt[67]{}$
4	011	0000	0000	1240	$\sqrt[81]{}$

編碼	操作碼	第一地址	第二地址	第三地址	附注
1235	000	1159	0000	1272	$\frac{L}{67} \quad y \Rightarrow Y_n \Rightarrow L_{10}$
1240	000	0000	0000	1259	$\frac{L}{67} \quad 0' \Rightarrow L_{11}$
1	000	1196	0000	1255	$\frac{L}{67} \quad \left\lceil \frac{79}{\Gamma} \right\rceil' \Rightarrow L_7$
2	007	1285	0001	1284	
3	003	1284	1284	1284	$\frac{L}{68} \quad 4n^2 \Rightarrow n_1$
4	007	0005	0003	1286	$8x \Rightarrow x_1$
5	000	0005	0000	1285	$x \Rightarrow x_2$
6	000	1101	0000	1282	$\frac{L}{69} \quad 1 \Rightarrow C_n$
7	000	1101	0000	1280	$1 \Rightarrow P_n$
8	000	1100	0000	1289	$0 \Rightarrow Q_n$
9	000	1101	0000	1282	$1 \Rightarrow S$
0	007	1282	0001	1211	$\frac{L}{70} \quad \left. \begin{array}{l} (2s-1)^2 \Rightarrow \alpha_1 \\ (2s+1)^2 \Rightarrow \beta_1 \end{array} \right\}$
1	002	1211	1101	1206	
2	003	1206	1206	1206	
3	001	1211	1101	1211	
4	003	1211	1211	1211	$s \cdot x_1 \Rightarrow \psi$
5	003	1282	1286	1287	$n_1 - \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1$
1250	002	1284	1206	1206	$P_{71}(0 < \alpha_1 \frac{72}{\Gamma})$
1	014	1100	1206	1253	$P_{72}(\psi < \alpha_1 \frac{L}{\Gamma})$
2	015	1287	1206	1255	$\frac{L}{72} \quad \alpha_1/\psi \Rightarrow \phi$
3	004	1206	1287	1288	$\phi \cdot C_n \Rightarrow \phi$
4	003	1288	1282	1288	
5	002	1284	1211	1211	$\left. \begin{array}{l} n_1 - \beta_1 \\ \psi - x_1 \end{array} \right\} \cdot \phi \Rightarrow C_n$
6	001	1287	1286	1287	
7	004	1211	1287	1211	
8	003	1211	1288	1282	
9	000	0000	0000	0000	L_{11}
0	001	1280	1282	1280	$P_n + C_n \Rightarrow P_n$
1	000	1289	0000	1283	$Q_n \Rightarrow M$
2	001	1289	1288	1289	$Q_n + \phi \Rightarrow Q_n$
3	001	1282	1102	1282	$S + 2 \Rightarrow S$
4	114	1289	1283	1240	$P_{73}(Q_n = M \frac{\Gamma}{70})$
5	000	0000	0000	0000	L_7
1260	007	1101	0035	0005	$\frac{L}{74} \quad \left. \begin{array}{l} x_2 - \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\pi \Rightarrow \lambda \\ \sin x \end{array} \right\}$
1	001	1285	0005	0005	
2	003	1193	0005	0005	
3	002	1285	0005	0005	
4	010	0000	0000	1313	$\frac{\sin x}{x}$
5	000	0000	0000	0000	L_8

編碼	操作碼	第一地址	第二地址	第三地址	附	注
1266	003	1280	0007	0007	$\begin{matrix} L_{75} \\ \} \end{matrix}$	$P_n z - Q_n y \Rightarrow Y_1$
7	003	1289	0006	0006		
8	002	0007	0006	1283	$\begin{matrix} 77 \\ \sqrt{} \end{matrix}$	
9	011	0000	0000	1263		
0	003	1289	0007	0007	$\begin{matrix} L_{76} \\ \} \end{matrix}$	$Q_n z + P_n y \Rightarrow Y_1$
1	003	1280	0006	0006		
2	001	0007	0006	1283		
3	004	1194	1285	0005	$\begin{matrix} L_{77} \\ \} \end{matrix}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x_2}} Y_1 \Rightarrow y$
4	010	0000	0000	1215		
5	003	0006	1283	0006		
1270	011	0000	0000	1280	$\begin{matrix} 81 \\ \sqrt{} \end{matrix}$	
1	002	1280	1289	1283	$\begin{matrix} L_{78} \\ \} \end{matrix}$	$P_n - Q_n \Rightarrow Y_1$
2	004	1194	1285	0005		
3	010	0000	0000	1215		
4	007	0006	0035	0006		$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x_2}} \cdot Y_1 \Rightarrow y$
5	003	0006	1283	0006		
6	000	0000	0000	0000	L_9	
7	011	0000	0000	1273	$\begin{matrix} 80 \\ \sqrt{} \end{matrix}$	
8	001	1280	1289	1283	$\begin{matrix} L_{79} \\ \} \end{matrix}$	$P_n + Q_n \Rightarrow Y_1$
9	004	1193	1285	0005		
0	010	0000	0000	1215		$\sqrt{\frac{\pi}{2x_2}} \cdot Y_1 \Rightarrow y$
1	003	0006	1283	0006		
2	000	0000	0000	0000	L_{10}	
3	002	1281	0000	0005	$\begin{matrix} L_{80} \\ \} \end{matrix}$	$\beta \Rightarrow x$
4	010	0000	0000	1254	$\begin{matrix} c^x \\ \sqrt{} \end{matrix}$	
5	003	0006	1283	0006		$y \cdot Y_1 \Rightarrow y$
1280	000	0000	0000	0000	$\begin{matrix} L_{81} \\ \} \end{matrix}$	∇
1281	115	0000	0000	0000		Ω

参 考 文 献

- (1) G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Chap. II, London, Cambridge Univ. Press, 1952.
- (2) 同上书 Chap. VII.
- (3) Fox, L, A Short Table for Bessel Functions of Integer Orders and Large Arguments, prepared on behalf of the Mathematical Tables Committee of the Royal Society. London, Cambridge Univ. Press, 1954.