小学教师业余进修试用课本

# 初等数学

武汉市教师进修学院编

一九七九年二月

# 目　　录

# 第一章　有理数及其运祘

## 第一节　数概念的发展

数（这里指自然数）的概念，对我们来说是已经非常习惯了，刚懂事的小孩子已经能够进行简单的计数，初步接触到了自然数里前面几个数。但是，从人类历史上来看，数的概念的形成，认识那些抽象的数，却经历了一段很长的时期。

一、数的形成和发展

人类在原始社会的时候，以狩猎、捕鱼和采集果实为生。当时，野兽、鱼和果实的有无，显然是人们最关心的问题。因此，人们很早就有了“有”和“无”的概念。数的概念是从认识“有”开始的。猎取了食物需要分配，在分配过程中伴随着“数一数”的活动，在制造打猎武器过程中又伴随着“量一量”的活动。这种无意识的“数一数”、“量一量”的举动，在长期的经验积累中逐渐形成了“多少”的概念。这样，人们对数的认识随着生产实践的发展而发展。首先是对物体的观察和比较，利用手的指头，辩别出物体的“多少”，逐步认识了一些简单而具体的数量，如一棵树、两头牛……等等。以后由于生产实践中记数的需要，人们把数和具体的物体分离开来，用一定的符号去代表数，例如在古代埃及，人们划一竖代表“1”，一直到九竖，然后换一个符号，后人对这种计数的方法加以发展，在用实物来计数时，用一个中间空的园珠代表“10”。通过千百万次的重复，最后引进了数字符号。正是用手指计数和数字符号的引进，给人

们对自然数的认识起了很重要的作用，于是关于抽象的数（自然数）的概念就形成了。

自然数可以用来数事物，表示事物的多少，也可以用来给事物编号，表示事物多少号。所以自然数有两种意义：用来表示事物多少的数，叫做基数；用来表示次序（几号）的数，叫做序数。例如，5 可以表示 5 件事物，也可以表示第 5 号。

在算术里，数的概念的第一次扩展，是引进数"零"，但是在数学的发展史上，零作为数被引入数的系统是比较迟的，而数的概念的最先一次的扩展则是正分数的引进。在测量工作中，人们发现选用的测量单位在被测物体上面放置的次数，不会总是自然数；往往是放置若干次以后，剩余的部分不够再放置一次，需要换用较小的测量单位去放置，才能把测量继续下去，为要能较确切地表示这种测量结果，就需要引进一种不同于自然数的新数，即分数。

生产实践的需要，反映在数学理论上，那就是运算的可实施的问题。在自然数范围内，除法运算的实施是有限制的，分数的引进也是为了使除法运算可以经常地实施。数概念的进一步发展，情况也都是这样。负数的引进，一方面是由于需表示具有相反方向或相反意义的量；另一方面也是为了使减法运算能畅行无阻。无理数的引进，一方面是测上需要表示出两条无公度线段的比值，另一方面也是为了使正数开方的运算总能实施。

由此可见，人类的社会实践是数概念产生的源泉，是推动数范围扩展的动力。从数的发展史上看，新数的引进与数理论的形成，其过程是错综复杂的。但是从大体上看，数的

概念的历史发展过程是按照以下的逻辑顺序：

$$\text{自然数}\xrightarrow{\text{(正分数)}}\text{正有理数}\xrightarrow{\text{(零、负有理数)}}\text{有理数}\xrightarrow{\text{(无理数)}}\text{实数}$$

人类在认识数和建立数理论的实践中发现，不能随便地引进新数和规定新数的顺序关系和运算关系；要使数的理论成为符合客观世界的真理，就必须遵循以下三条原则去办事：

1、新数的引进是为了解决旧数集无法解决的某一个矛盾，引进了新数就可以解决这个矛盾；

2、在新数与旧数合成的新数集中，规定的新的基本关系和运算，要能够使旧数集原有的主要性质（基本顺序律和基本运算律）仍然适用；

3、旧数集里的数，作为新数集合里的数时，新的运算关系与旧的运算关系意义相一致。

二、算术数的基本性质

为要由算术里的数扩展成为有理数，应该把算术里数的基本性质（顺序律和运算律）作一概括和复习。

算术里的数是自然数、零和正分数组成的，它的一般形式是$\frac{m}{n}$这里的n只能是自然数，而m可以是自然数或零，即有

$$\text{算术里的数}\frac{m}{n}\begin{cases}\text{自然数，} & \text{当n能整除m时；}\\ \text{零，} & \text{当m＝0零；}\\ \text{正分数，} & \text{当n不能整除m时。}\end{cases}$$

算术里的数保留了自然数的顺序关系（规定零是算术里

最小的数）和基本顺序律。自然数的顺序关系，可以由自然数的形成去说明。

自然数是一个接一个地累积而形成的。第一个自然数是单位1；添上一个单位，就得到第二个自然数2；再添上一个单位，就得到第三个自然数3，……逐个逐个地累计下去，将得到任何自然数。对于每个自然数添上一个单位，就得到它的唯一的后继数。因此，自然数的个数是无限的；对于任何两个自然数，总可以分辨出谁前谁后。显然，从自然数的前后关系，也就是由小到大的顺序关系中可以看出，自然数集中最小的数是1，但没有最大的数。

自然数的顺序关系，满足以下的五条基本顺序律：

1、三歧性：任意两个自然数$a$、$b$，必定满足以下三种关系之一，而且只能满足其中的一种，这三种关系是$a<b$，$a=b$，$a>b$。

2、不等的对逆性：如果$a<b$，那么$b>a$；

如果$a>b$，那么$b<a$。

3、不等的传递性：

如果$a<b$，$b<c$，那么$a<c$；

如果$a>b$，$b>c$，那么$a>c$。

4、相等的传递性：

如果$a=b$，$b=c$，那么$a=c$。

5、相等的反射性：

对于任何自然数，都有$a=a$。

这些基本顺序律，可以用自然数的前后关系去说明。

算术里的数也保留了自然数的运算关系和基本运算律。自然数的运算，也可以用自然数的形成去说明。把自然数的

累计办法加以概括，可得到自然数相加的概念。

自然数m加上自然数n，就是在自然数m上逐个逐个地添上一个单位，总共添了n次。即规定：

$$m+n=\{[(m+\underbrace{1)+1]\cdots\cdots+1\}+1}_{n次}$$

自然数m乘以自然数n，就是n个m接连相加，即规定：

$$m\times n=\underbrace{m+m+m\cdots\cdots+m}_{n个}$$

由于自然数集没有最大的数，对于任何两个自然数m和n，它们相加或相乘的结果，必然还是一个自然数，而且只有一个自然数，这表明在自然数范围内，加法与乘法总可以单值地实施。

根据自然数的形成方式，以及加法和乘法的意义，不难说明自然数的加法和乘法满足以下的五条基本运算律：

1、加法交换律　$a+b=b+a$；

2、加法结合律　$a+(b+c)=(a+b)+c$；

3、乘法交换律　$a\cdot b=b\cdot a$；

4、乘法结合律　$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$；

5、乘法对加法的分配律　$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$。

在算术里，已经把自然数的运算推广到算术数的运算。在算术数的运算中，只有加法、乘法、除法（除数不为零）三种运算能够永远单值地实施，即对于任意的两个算术里的数，加法、乘法、除法运算的结果，仍然是唯一的一个算术里的数。但减法运算，只有在被减数不小于减数时，才能单值地实施，当被减数小于减数时，减法运算的结果就不再是算

术里的数了。

## 第二节 有理数的概念

### 一、负数的引进

#### 1、为什么要引进负数

在某些实际问题中，如果不指明有关方向的意义，问题的答案将不能确定。例如，甲乙两个学生放学后在同一条路上行走，甲走了3里，乙走了2里，问他们相距有多远？

这样的问题，其答案是不确定的。如果甲乙两人朝同一方向走，那么两人相距 $3-2=1$（里）；如果甲乙两人朝相反方见走，那么两人相距为 $3+2=5$（里），可见，单单说明两个人行走的路程是不够的，还必须指明两人行走的方向，这个问题才能有确定的答案。

这个例子表明方向的重要性。在实际问题中，通常只考虑两种相反的情形。如，直线运动的同方向与反方向，水位的上升与下降，重量的增加与减少，某一时刻以后与以前的时间，温度计的零上温度与零下温度……等等，都是一对具有相反方向或相反意义的量。

如要把具有方向意义的量完全表达出来，把方向或意义相反的两种量区别开来，单单给出一个数值是不够的。算术里的数只能表达出量的大小，不能把量的方向意义同时表达出来，所以在实际问题中，利用算术里的数去表达时，往往用附加的语言去说明量的方向。例如，零上4度或零下4度，上升2米或下降2米，等等。但是，这种带有说明语的数字，用于计算是很不方便的，必须用某种统一的符号取代说明语才行。这就需要采用一种新的数，使得只用一个数，就足以把量的大小和方向同时都表达出来。也就是说，需要

把算术里的数扩大成新的数集，使得在新数集中，一部分的数能表示某种方向意义的量，另一部分的数能表示相反方向意义的量。这样就必须引进一种新数。

从减法运算的可实施性来看，也需要把数的范围由算术里的数加以扩大。在算术里，减法看作是加法的逆运算：即已知两个数的和a及其中的一个加数b，去确定另一个加数x。在代数里，这就是方程$x+b=a$的求解问题。这个方程的解，应该是$x=a-b$。在算术里，只有当$a\geqslant b$时，$a-b$才仍然是算术里的数，数$a-b$叫做a与b的差；当$a<b$时，$a-b$在算术里是没有意义的。为了使减法运算畅行无阻，也就是使$a-b$在任何情况下都有意义，都是一个确定的数，就必须引进一种新数。这种必须引进的新数，将叫做负数。

2、负数该怎样引进

由上面的讨论，可以看出，所要引进的新数应该符合要求：新数与算术里的数合在一起，就能够表示两种相反方向或相反意义的量；能够使$a-b$在任何情况下都有意义（这里a，b代表任意算术里的数）我们可依据这两个条件去引进负数。

既然新数集包括有算术里的数，不妨让算术里的数仍然表示一种方向的量，而用新数去表示相反方向的那种量。例如，零上4度仍然用算术里的数4表示，那么，零下4度就用新的数表示；这个新数，就其所表示量的大小而言，应该与算术里的数4相同，只不过它所表示的方向不同。因此，只要设法在算术里的数4上面添加一种符号，以便能区别出方向就行了。

添上哪种符号为宜？这可以再从运算角度去考虑。添上的

符号应该能使减法运算很方便，从运算上看，对于任何算术里的数a、b，新数应该能表示为$x=a-b$。这样的表示，意味着新数x的大小由两个算术里的数去确定。而上面已讲过，表示相反方向的量时，一个新数的大小只与一个算术里的数相同。因此，要把$a-b$的形式改变一下，使得只用一个算术里的数即可确定新数的大小。我们考虑，把a换成算术里的数中最小者o，即把新数表示成$x=o-b$的形式，那么，由于加上加数o，不会影响数的大小，所以这样的表示，说明新数x的大小可由一个算术里的数b去确定，并且把新数表示成$x=-b$的形式（其中b是任意的算术里的数）。

由此得到结论：对于任何算术里的数b，只要在它前面添上符号“—”，就得到一个新数$-b$，它的数值大小与算术里的数b相同，它所表示量的方向或意义却与b所表示的量的方向或意义相反。

符号“—”读做“负号”，新数$-b$叫做“负数”；与之相对应，算术里的数b叫做“正数”，并可表示成$+b$的形状，符号“+”读做“正号”。但是在应用或计算时，为了简便，常把正数的正号略去不写。

利用正数与负数，可以把相反意义的两种量简明地区别开来。例如，零上4°C表示为$+4°C$；零下4°C表示为$-4°C$。对于其它的具有相反意义的量，习惯上规定，代表着增加方向的量，用正数表示；代表着减数少方向的量，用负数表示。例如，含有增大、上升、前进、超过、收入等意义的量，用正数表示；含有减少、下降、后退、不足、支出等意义的量，用负数表示，时间以向后算的为正数，以向前算的为负数。

但是要注意，实际问题中的量，并不都是具有相反意义

的量。例如，重量、体积、物体的比重、一个生产队的亩数、一个班级的人数、两地之间的距离等等，都不是具有相反意义的量，对于这种量，习惯上都用正数表示，这样的规定，可使它们与具有相反方向的量不发生混淆。

二、有理数集

所有的正有理数、负有理数，再加添零组成的数集，叫做有理数集。全部有理数的系统，可以有两种办法去表示。一种是按正数与负数区别去分类，即

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

另一种是按照整数与分数的区别去分类，即

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整　数}\begin{cases}\text{正理数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分　数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

这两张表，实际上都是双层的分类表，前者是：先依减法运算的结果去分类，再依除法运算结果去分类；后者是：先依除法运算结果去分类，再依减法运算结果去分类。因此，从运算角度看，这两张表说明，由自然数集扩展成有理数集，就能使加法与乘法（即自然数集最基本的两

种运算）的逆运算——减法与除法都可以畅行无阻（零不能做除数）。但从教学角度来看，这两张表的作用，主要是使学生明了在有理数范围内，各个数概念所包含的范围以及它们互相之间的从属关系。

三、数轴

在生产斗争和科学实验中，常用到温度计，它上面的刻度表表示温度计，它上面的刻度表示温度的度数。如果将温度计横放，可以看出以零为界，一边的刻度表示负的度数，另一边的刻度表示正的度数。从这个事实出发，经过数学的抽象，我们可以用直线上的点来表示有理数。

画一条水平方向的直线，规定从左到右的方向为正的，与它相反的方向为负的，在直线上任取一点O作原点，表示零，再任取一条线段 l 作长度单位

$\underline{l}$，

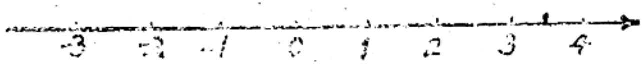


图 1—1

那么，在直线上原点的右边，离原点一个单位长的点就表示 + 1，离原点两个单位长的点就表示 + 2……，在直线上原点的左边，离原点一个单长的点就表示 − 1，离原点两个单位长的点就表示 − 2。对于任意分数，我们也可以用直线上的点把它表示出来，例如 $+\frac{1}{2}$ 就可以用原点右边离原点半个单位长的点来表示。这样，所有的有理数都可以用这条直

线上的点来表示。

规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴。

因为在数轴上可以把全部有理数都表示出来，所以，从数轴可以直观地看到有理数的整个形象。但是，数轴不是有理数的几何形象，数轴上只有一部分的点能用有理数表示，另一部分的点却要用无理数去表示。

根据负数的意义，在任何非零有理数前面，如果放上"—"号，在得到与原数的方向或意义相反的数，即确定：有理数a与有理数$-a$是一对相反数。如果从数轴上看，这一对相反数就比较形象的表示出来。即在数轴上原点的两边，离开原点的距离相等的两个点所表示的两个数，叫做互为相反的数。

但是要注意，对于任意有理数a，$-a$不一定就是负数。事实上，若a是正数，则$-a$就是负数；若a是负数，则$-a$就是正数。有理数变号的这个法则，可以写成以下的形式：

$$+(+a)=+a,\qquad +(-a)=-a,$$
$$-(+a)=-a,\qquad -(-a)=+a,$$

这里a代表正数·括号外面的符号，代表使有理数变号的符号；括号内的符号及等号右边的符号，都表示数是正数还是负数，这种符号叫做有理数的性质符号。

上述有理数的变号法则，实际上也包含着去括号的法则。

四、绝对值

与算术里的数比较，有理数只不过多了一种表示方向的符号。每个算术里的数都只有一个要素，即表示量的大小的要数；每个有理数都具有两个要素，一个表示量的大小，一

的表示量的方向、在建立有理数集的理论时，为了能与算术里的数的理论进行比较，往往把有理数的两个要素分开来考虑。如果把表示方向的要素暂时撇开，只考虑表示大小的要素，那么，有理数就与算术里的数一样，就可以把算术里数的许多性质推广到有理数去。有理数绝对值的概念、就是为此缘故而引进的。

把有理数所表示方向的要素撇去不管，只考虑表示大小的要素，就得到有理数绝对值的概念。例如，前进3步与后退3步，用有理数表示为+3与-3。但就走的路程来看，离开原出发点的远近是一样的，都是3步，也就是说，如果撇去方向不管，可以用算术里的数3去表示。这个算术里的数就是有理数+3与-3的绝对值。我们知道，在有理数中，正数和零就是原来的算术里的数。由此推广，就得到一般有理数绝对值的概念：

一个正数或零的绝对值，就是这个数本身，一个负数的绝对值，就是和它相反的正数。如果以a代表任意有理数，那就写成

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{如果}a\text{是正数；} \\ 0, & \text{如果}a\text{是零；} \\ a & \text{如果}a\text{是负数。} \end{cases}$$

记号$|a|$就表示数a的绝对值。

在一般教材上，通常利用数轴上表示互为相反数的两个点与原点的距离相等，直观地用距离去定义绝对值概念，即在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离就叫做这个数的绝对值。既然绝对值是两点间的距离，那就不可能是负的。从绝对值所用的符号就是距离间隔符号“| |”，这一点也反

映这种观念。在直观定义了数的绝对值概念后，再指出对于正数、零、负数的绝对值应该怎样取法，那是因为先以几何方法比以代数方法容易被接受的缘故。

根据绝对值的定义，就可以把一对相反的数说成是：绝对值相等而符号相反的两个数叫做互为相反数。

五、有理数的大小比较

有理数是由正数、零及负数组成的，两个正数之间以及正数与零之间的大小比较，可以沿用在算术里的规定，只要再补充规定正数与负数、零与负数、负数与负数的大小比较法则，问题就得到解决。因此，可以分如下三方面去研究：

（1）正数与负数比较　从正数与负数代表的量的意义上看，代表着量的增加方向一般用正数，代表着量的减少方向的一般用负数，这就很自然地想到“正数比负数大、负数比正数小”。从实际问题上看，温度计的任何零上温度高于任何零下温度，也说明了同样的结论。

（2）零与负数比较　从所代表的量的意义上，从温度计上，都可以说明负数小于零。

（3）负数与负数的比较　同样是零下温度，显然，在零下2°C时，比在零下5°C时，天气略为暖和，也即：零下2°C高于零下5°C，因此有：$-2>-5$ 或 $-5<-2$。但是就绝对值来讲，$|2|<|5|$。可见，负数与负数比较时，绝对值较小的负数大，绝对值较大的负数小。

在教材上一般利用数轴，结合着温度的高低来说明的，并把有理数大小比较法则归纳为以下的三条：

（1）正数大于零、负数小于零、正数大于负数；

（2）两个正数中绝对值大的数大；

（3）两个负数中绝对值大的数反而小。

## 第三节　有理数的四则运算

单单有数，只能表达实际问题的量，要解决实际问题，还必须能对数进行运算。因此，在建立有理数的顺序关系之后，紧接着就要建立有理数的运算关系。我们将以算术数的四则运算为基础，去规定有理数的四则运算。

一、有理数的加法

与算术数的加法一样，有理数的加法也是一种求和的运算。对于任意两个有理数，它们的和应该是唯一的一个有理数。

一个数增添另一个数的运算，叫做加法；所得的结果，叫做两数的和；参与加法运算的每一个数，叫做加数。这些名词或概念的意义，在算术里已经很清楚了，在讨论有理数的加法时，我们也要用到这些概念。

因为有理数都可以用它的绝对值与符号去表示，所以就从绝对值与符号两方面去规定两个有理数的和。这种规定，在一般代数课本上，有的写成定义，有的写成法则，写出的条数也可能不同，但总不外乎以下三方面的内容：

（1）同号两数相加，和的符号与加数的符号相同，和的绝对值等于加数的绝对值之和，也就是：

$$(+a)+(+b)=+(a+b)$$

$$(-a)+(-b)=-(a+b)$$

其中a、b代表正数。

（2）异号两数相加，和的符号与加数中绝对值较大的符号相同，和的绝对值等于两个加数绝对值之差（当然是从较大的减去较小的）；也就是：

$$(+a)+(-b)=\begin{cases}+(a-b), & \text{如果}a>b;\\ -(b-a), & \text{如果}a<b;\\ 0 & \text{如果}a=b。\end{cases}$$

其中a、b代表正数。

（3）与零相加，任何有理数与零相加，和仍然是这个有理数，也就是

$$a+o=a \qquad o+a=a$$

其中a代表有理数。

这样的规定表明，有理数的加法，实际上是转化为算术数的加法去实施的；转化的办法是：把有理数的两个要素分离开来，考察表示方向的要素，规定出和的符号；考察表示大小的要素，规定出和的绝对值。实际演算，只是绝对值的演算，所以有理数加法运算结果的存在性和唯一性，就象算术里数的加法运算一样，是有保障的。有理数的乘法等运算，也都是如此。

上述规定的导出，也就是有理数加法运算意义的说明，在一般代数课本上是以水库水位两次变化的总结果为例来讲解的。也有用温度的两次变化、或直线上两次运动（如行车、走路）的总结果为例来讲解。因为这种变化或运动，可以用类似数轴的直线图作出直观说明。事实上，任何一类具有相反方向的量，都可以作为说明有理数加法的实例。

把这些实例概括起来，可以看出，有理数加法的理论根据，就是直线上有向线段的求和法则。

规定了方向的直线，叫做有向直线。数轴就是一条有向直线。在有向直线上，线段也是有方向的，叫做有向线段；通常用它的两个端点来表示。例如，以A、B、C代表某有向