

十二年制学校初級中学課本

# 代 数

DAISHU

(試教本)

第 四 册

(供三年級用)

人 民 教 育 出 版 社

十二年制学校初級中学課本代数(試教本)第四冊

目 录

第十六章 二元二次方程組 .....	1
第十七章 常用对数 .....	35
I 对数的意义和性质 .....	35
II 常用对数 .....	46
第十八章 函数和它的图象 .....	74
I 函数 .....	74
II 正比例函数、反比例函数 .....	93
III 一次函数 .....	117
IV 二次函数 .....	135

## 第十六章 二元二次方程組

**16.1 二元二次方程組** 我們來看下面的兩個問題:

1. 一個數比另一個數多 5, 這兩個數的平方和等於 625, 求這兩個數.

設大數是  $x$ , 小數是  $y$ , 那麼根據題意就得到方程組:

$$\begin{cases} x = y + 5, & (1) \\ x^2 + y^2 = 625. & (2) \end{cases}$$

解這個方程組就可以求得這兩個數.

2. 一個人民公社的兩個生產隊收割小麥, 甲隊收小麥 23,744 斤, 乙隊收小麥 16,200 斤. 已知乙隊的麥地比甲隊的麥地少 40 畝, 並且每畝平均多收 13 斤. 求每隊的麥地畝數和每畝的平均產量.

設甲隊有麥地  $x$  畝, 每畝的平均產量是  $y$  斤, 那麼, 乙隊有麥地  $(x - 40)$  畝, 每畝的平均產量是  $(y + 13)$  斤. 根據題意就得到方程組:

$$\begin{cases} xy = 23744, & (1) \\ (x - 40)(y + 13) = 16200. & (2) \end{cases}$$

整理後得:

$$\begin{cases} xy - 23744, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy + 13x - 40y = 16720. & (4) \end{cases}$$

解这个方程组就可以求得每队的麦地亩数和每亩的平均产量。

从上面两个问题得出的方程组来看，每个方程组里的两个方程都含有两个未知数。第一个方程组中的方程(1)，含有未知数的项的次数都是1；第二个方程组中的方程(2)和第三个方程组中的方程(3)，含有未知数的项的次数都是2；第四个方程组中的方程(4)，含有未知数的项的次数最高的是2。

一个整式方程，如果含有 $m$ 个未知数，并且含有未知数的项的次数最高的是 $n$ ，这个方程就叫做 **$m$ 元 $n$ 次方程**。例如，上面第一个方程组中的方程(2)以及第二个方程组中的方程(3)和(4)是二元二次方程；方程 $x^3 + y^3 = 9$ 和 $2x^3y + x - 3y = 7$ 是二元三次方程；方程 $x^3 + y - z = 3$ 是三元二次方程。

由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组，或者由两个二元二次方程组成的方程组，叫做**二元二次方程组**。

我们知道，解二元一次方程组是根据方程组同解的三个性质。解二元二次方程组，除了要根据这些性质以外，还要根据下面的性质(4)。

**如果 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 都是整式，那么方程组**

$$\begin{cases} A=0, \\ BC=0 \end{cases}$$

和方程組

$$\begin{cases} A=0, \\ B=0; \end{cases} \quad \begin{cases} A=0, \\ C=0 \end{cases}$$

同解.

例如, 方程組

$$\begin{cases} x+y=3, \\ (x-y)(x-2y)=0 \end{cases}$$

和方程組

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ x-2y=0 \end{cases}$$

同解.

从方程組同解的性质(4)还可以推出:

如果  $A, B, C, D$  都是整式, 那么方程組

$$\begin{cases} AB=0, \\ CD=0 \end{cases}$$

和方程組

$$\begin{cases} A=0, \\ C=0; \end{cases} \quad \begin{cases} A=0, \\ D=0; \end{cases} \quad \begin{cases} B=0, \\ C=0; \end{cases} \quad \begin{cases} B=0, \\ D=0 \end{cases}$$

同解.

例如, 方程組 
$$\begin{cases} x(x-y+3)=0, \\ (y-1)(x+y-6)=0 \end{cases}$$

## 和方程組

$$\begin{cases} x=0, \\ y-1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ x+y-6=0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-y+3=0, \\ y-1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+3=0, \\ x+y-6=0 \end{cases}$$

同解。

### 练习

1. 說明上面的結論是怎样推出來的。
2. 說出下列方程組同解的根据是什么：

$$(1) \begin{cases} x+y=5, \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} y=5-x, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y=5-x, \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} y=5-x, \\ x^2+(5-x)^2=13. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x^2+y=7 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} y^2-y=6, \\ x^2+y=7. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} (x-3)(x-4)=0, \\ 3x+4y=5 \end{cases} \quad \text{和}$$
$$\begin{cases} x-3=0, \\ 3x+4y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x-4=0, \\ 3x+4y=5. \end{cases}$$

$$3. \text{ 方程組 } \begin{cases} (2x-3y)(3x+4y)=0, \\ (x+y-5)(x+y+4)=0 \end{cases}$$

和哪些方程組同解？

## 16.2 由一个二元一次方程和一个二元二次方程組

成的方程組 我們來看下面的方程組:

$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 11, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

這個方程組依次和下面的方程組同解:

I.  $\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 11, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$  [方程組同解的性質(1)]

II.  $\begin{cases} 5x^2 - (2x - 1)^2 = 11, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$  [方程組同解的性質(2)]

III.  $\begin{cases} (x - 2)(x + 6) = 0, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$  [方程組同解的性質(1)]

IV.  $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$   $\begin{cases} x + 6 = 0, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$   
[方程組同解的性質(4)]

這兩個二元一次方程組的解分別是

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6, \\ y = -13. \end{cases}$$

所以原方程組的解是

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6, \\ y = -13. \end{cases}$$

在解題時可以採用下面的簡單寫法。

例 1 解方程組:

$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 11, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1. & (2) \end{cases}$$

解 从(2),  $y = 2x - 1.$  (3)

代入(1), 得  $5x^2 - (2x - 1)^2 = 11.$

整理后得  $x^2 + 4x - 12 = 0.$

解这个方程, 得  $x_1 = 2, \quad x_2 = -6.$

分别代入(3), 得  $y_1 = 3, \quad y_2 = -13.$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 2, & y_1 = 3; \\ x_2 = -6, & y_2 = -13. \end{cases}$$

从这个例子可以看出, 解出一个二元一次方程和一个二元二次方程組成的方程組的一般步骤是:

1. 把二元一次方程里的一个未知数用另一个未知数的代数式来表示;

2. 把这个代数式代入二元二次方程里, 得到一个一元方程;

3. 解这个一元方程, 求得第二个未知数的值;

4. 把所求得的值代入第一步所得的代数式里, 求得第一个未知数的值;

5. 把求得两个未知数的相应的值按組写在一起, 就是原方程組的解.

例2 解方程組:

$$\begin{cases} x - 3y - 2 = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 + 2x - 3y + 14 = 0. & (2) \end{cases}$$



解 从(1),  $x = 3y + 2$ . (3)

代入(2), 得

$$(3y + 2)^2 - 2(3y + 2)y - 3y^2 + 2(3y + 2) - 3y + 14 = 0.$$

整理后得

$$11y + 22 = 0,$$

$$\therefore y = -2.$$

代入(3), 得

$$x = -4.$$

$$\therefore \begin{cases} x = -4, \\ y = -2. \end{cases}$$

### 练习

1. 解方程组:

$$(1) \begin{cases} x = y + 5, \\ x^2 + y^2 = 625; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y = 1, \\ x^2 - 4y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

2. 由一个二元一次方程和一个二元二次方程組成的方程組至多可以有几組解? 为什么?

某些方程組, 經過变形以后, 如果可以化成由一个二元二次方程和一个二元一次方程組成的方程組, 那么就可以用上述的方法来解. 但是必須注意, 如果解方程組时, 曾經把方程的两边同乘以一个含有未知数的代数式, 或者把方程的两边同次乘方, 那么最后求得的解, 必須代入原方程組里的每一个方程进行檢驗.

**例3** 解方程組:

$$\begin{cases} \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x+3} = \frac{2}{y}. & (2) \end{cases}$$

解 把(1)的两边同乘以 $(x-1)(y+1)$ , 整理后得

$$xy + 6x - 5y - 10 = 0. \quad (3)$$

把(2)的两边同乘以 $y(x+3)$ , 再同除以3, 得

$$y = \frac{2}{3}(x+3). \quad (4)$$

解方程組

$$\begin{cases} xy + 6x - 5y - 10 = 0, \\ y = \frac{2}{3}(x+3). \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -10, \\ y_2 = -\frac{14}{3}. \end{cases}$$

这两組解代入 $(x-1)(y+1)$ 和 $y(x+3)$ 都不为零, 所以都是原方程組的解.

**例4** 解方程組:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 10. & (2) \end{cases}$$

解 把(1)的两边平方,得

$$\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} = \frac{9}{4}. \quad (3)$$

把(3)的两边同乘以 $4xy$ ,整理后得

$$4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0,$$

就是

$$(4x - y)(x - 4y) = 0.$$

解方程组

$$\begin{cases} 4x - y = 0, \\ x + y = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4y = 0, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 8. \end{cases}$$

把 $x_1 = 8, y_1 = 2$ 代入(1), 左边 $= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ; 代入(2), 左边 $= 8 + 2 = 10$ , 所以是原方程组的解.

把 $x_2 = 2, y_2 = 8$ 代入(1), 左边 $= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \neq \frac{3}{2}$ , 所以不是原方程组的解.

$$\therefore \begin{cases} x = 8, \\ y = 2. \end{cases}$$

注意如果方程组中的一个二元二次方程可以分解成两个一次因式, 就分别把这两个一次因式同另一个二元一次方程组成两个二元一次方程组求解.

例5 解方程組:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 20, \\ \frac{4}{x^2} + \frac{25}{y^2} = 200. \end{cases}$$

解 設  $\frac{2}{x} = u$ ,  $\frac{5}{y} = v$ , 那么  $\frac{4}{x^2} = u^2$ ,  $\frac{25}{y^2} = v^2$ , 原方程組就变形成

$$\begin{cases} u + v = 20, \\ u^2 + v^2 = 200. \end{cases}$$

解这个方程組, 得

$$\begin{cases} u_1 = 10, & u_2 = 10, \\ v_1 = 10; & v_2 = 10. \end{cases}$$

就是

$$\begin{cases} \frac{2}{x_1} = 10, & \frac{2}{x_2} = 10, \\ \frac{5}{y_1} = 10; & \frac{5}{y_2} = 10. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}, & x_2 = \frac{1}{5}, \\ y_1 = \frac{1}{2}; & y_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

### 练习

1. 解下列方程組时, 应当怎样把它們变形成整式方程組? 求得的整式方程組的解为什么必須进行檢驗?

$$(1) \begin{cases} 2x+3y=-10, \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x-\sqrt{y^2+3}=4, \\ x+y=3. \end{cases}$$

2. 用換元法把下列方程組變形成由一個二元一次方程和一個二元二次方程組成的方程組，應當設什麼為  $u$ ，什麼為  $v$ ？

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{13}{36}; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{4}{x^2}+\frac{9}{y^2}=\frac{1}{2}, \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{y}}=3, \\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{12}; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{y-1}=1, \\ x+y=5. \end{cases}$$

### 習題六十四

1. 下列方程是幾元幾次方程？

$$(1) 2x^2-3y=5x-6; \quad (2) xy=1;$$

$$(3) 8-4y^2=7y; \quad (4) x^2+3xy+y^2-x+3=0.$$

2. 下列  $x$  和  $y$  的值是不是方程組  $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$  的解？為什麼？

$$(1) x=2, y=3; \quad (2) x=3, y=2;$$

$$(3) x=4, y=1; \quad (4) x=-3, y=-2.$$

3. 設  $A, B, C, D, E$  都是整式，方程組  $\begin{cases} ABC=0, \\ DE=0 \end{cases}$  和哪些方程

組同解？

解下列方程組（第 4 題——第 6 題）：

4.  $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7. \end{cases}$       5.  $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 2x^2 - xy - 6y^2 + y = 21. \end{cases}$
6.  $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + y^2 + 10x + 12y = 100, \\ 2x - 3y - 1 = 0. \end{cases}$

7. 下列解法是否正确? 为什么?

解方程组:

$$\begin{cases} y^2 = 5 - x^2, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 1. & (2) \end{cases}$$

解 从(2),  $y = x + 1.$  (3)

代入(1), 整理后得

$$x^2 + x - 2 = 0. \quad (4)$$

解这个方程, 得

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2.$$

把  $x_1 = 1$  代入(1), 得

$$y^2 = 4.$$

$$\therefore y = \pm 2.$$

把  $x_2 = -2$  代入(1), 得

$$y^2 = 1.$$

$$\therefore y = \pm 1.$$

因此, 方程组的解是:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=-2; \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=1; \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases}$$

解下列方程组(第8题——第17题):

8.  $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1. \end{cases}$

$$9. \begin{cases} (x-3)(y+2) = (x+4)(y-5), \\ 2x^2 - y^2 - xy = 2. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases} \quad 11. \begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} + \frac{2y-3}{y-1} = 2, \\ 3x - 4y = 1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} (x+2)(y-2) = xy, \\ \sqrt{(x+1)(y+4)} + x + 3 = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{13}{36}. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 1. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x - y = 2, \\ y + z = 7, \\ x^2 + z^2 = 41. \end{cases} \quad \text{提示: 把前两个方程里的 } x \text{ 和 } z \text{ 都用 } y \text{ 的代数式来表示.}$$

$$16. \begin{cases} x + y = 5, \\ x + z = 6, \\ xy + xz + yz = 29. \end{cases} \quad 17. \begin{cases} x - 2y + z = -1, \\ 3x - 5y + 2z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 49. \end{cases}$$

18. 解下列关于  $x, y$  的方程组:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4. \end{cases}$$

19.  $k$  等于什么值时, 下列方程组有相等的两组实数解?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = k. \end{cases}$$

20. 已知下列方程组有相等的两组实数解, 解这方程组:

$$\begin{cases} y^2 - 4x - 2y + 1 = 0, \\ y = kx + 2. \end{cases}$$

列出方程組解下列应用題:

21. (我国古代問題)\* 长方形田的面积等于 864 平方步, 长与寬的和是 60 步. 长和寬各多少步?

22. 要把一根长 28 厘米的铁絲折起来, 圍成面积是 48 平方厘米的长方形零件. 这长方形的长和寬应当各是多少?

23. 机器制造厂制成一种新式机器, 用 875 公斤的鋼所制出的新式机器比用 900 公斤的鋼所制出的旧式机器多 3 台. 已知一台旧式机器比两台新式机器重 100 公斤, 一台旧式机器和一台新式机器各重多少公斤?

24. 一个打麦組打麦子, 如果先用第一台打麦机打一半, 然后用第二台打剩下的, 一共要打 9 天. 如果两台一起打, 4 天就打完了. 每一台打麦机单独打所有的麦子各要多少天?

25. 甲乙两列车从相距 360 公里的两城相向开行. 如果乙車比甲車早出发 1 小时 30 分, 那么两車就可以在路途的中点相遇; 如果同时出发, 那么出发后 5 小时两車还相距 90 公里. 求各車的速度.

**16.3 由两个二元二次方程組成的方程組** 这种形式的方程組, 消去一个未知数以后, 一般要得出一个一元四次方程. 例如, 方程組

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x = y^2 - 2, \end{cases}$$

---

\* 这題选自宋代楊輝著的“田亩比类乘除算法”(1275年). 原題是: “畝田积八百六十四步, 只云长闊共六十步. 問闊及长各几步? 答曰: 闊二十四步, 长三十六步.”



消去  $y$ , 就得出

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0.$$

这个四次方程我們还不会解.

但是在某些特殊情况下, 有些二元二次方程組可以化成我們会解的方程組. 下面是比較常見的几种情况.

### (1) 可以消去二次項的

**例 1** 解方程組:

$$\begin{cases} x + y + xy = 5, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - xy = 2. & (2) \end{cases}$$

这个方程組的特点是: 两个方程都只含有一个二次項  $xy$ .

解 (1)+(2),  $3x + 2y = 7$ ,

$$\therefore y = \frac{1}{2}(7 - 3x). \quad (3)$$

代入(1), 整理后得

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

解这个方程, 得

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

代入(3), 得  $y_1 = 2, y_2 = 2$ .

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

**例 2** 解方程組: