新數學

中學適用

半羣學社編著

第一冊

上卷

聯合書院出版社

新數學

中學適用

半羣學社編著

第一冊

上卷

聯合書院出版社

總　編　輯

周紹棠 理學士（數學），哲學博士（數學）

編　輯

潘海紅 理學士（數學）

鄭肇楨 文學士（數學）

潘煒棠 文學士（數學）教育文憑

T. McC. Chamberlain 文學碩士(數學)，教育學士

何兆倫 理學士（數學），英國 IMA 會士

潘鎮邦 文學士（數學）

徐思明 文學士（數學）　教育文憑

經 理 編 輯

彭 錫 恩 文學士

良友印刷有限公司印製

香港西灣河街九至十一號

序　　言

在本港英文中學就讀的學生，1969年會考時，參加數學科考試者，將可在兩組不同的試題中任擇一組。其中一組，內容仍是傳統性的數學；但另一組試題，卻是全新的面目；這是英文中學會考的情形。不過我們有理由相信，在差不多相同的時期，中文中學參加會考的學生，也將應有同樣的選擇權利。

自從十八世紀以後，由於數學的迅速發展，使自然科學各部門無法避免使用它作爲研究工具。及至本世紀的四十年代以來，可以說幾乎沒有一種學問不倚靠數學，所不同的只是倚靠程度的深淺而已。爲了使數學能夠應用於廣大的範圍，一個必然趨勢就是要把它的基本概念抽象化，使每一個概念都可作多種不同的解釋。這一種處置數學問題的態度，可以說是近代數學的特徵。另一方面傳統的數學，尤其是中學方面，對於這一點幾乎完全忽畧了；結果令到一個中學生在五六年內辛勤艱苦所學到的一點數學，在他跨入社會後，差不多完全「用武無地」。這當然是莫大的憾事。現在世界各國教育當局有見及此，已紛紛積極改革中學數學課程。

半羣學社同人，爲應新數學課程需要，去年開始着手編著一套新教本，英文版第一册業已出版。現因中文中學亦有同樣需求，所以中文版亦隨之付印。

新編數學全書共分五册，每册分上下兩卷，供一學年之用，內容與英文版相同，章節也一致。

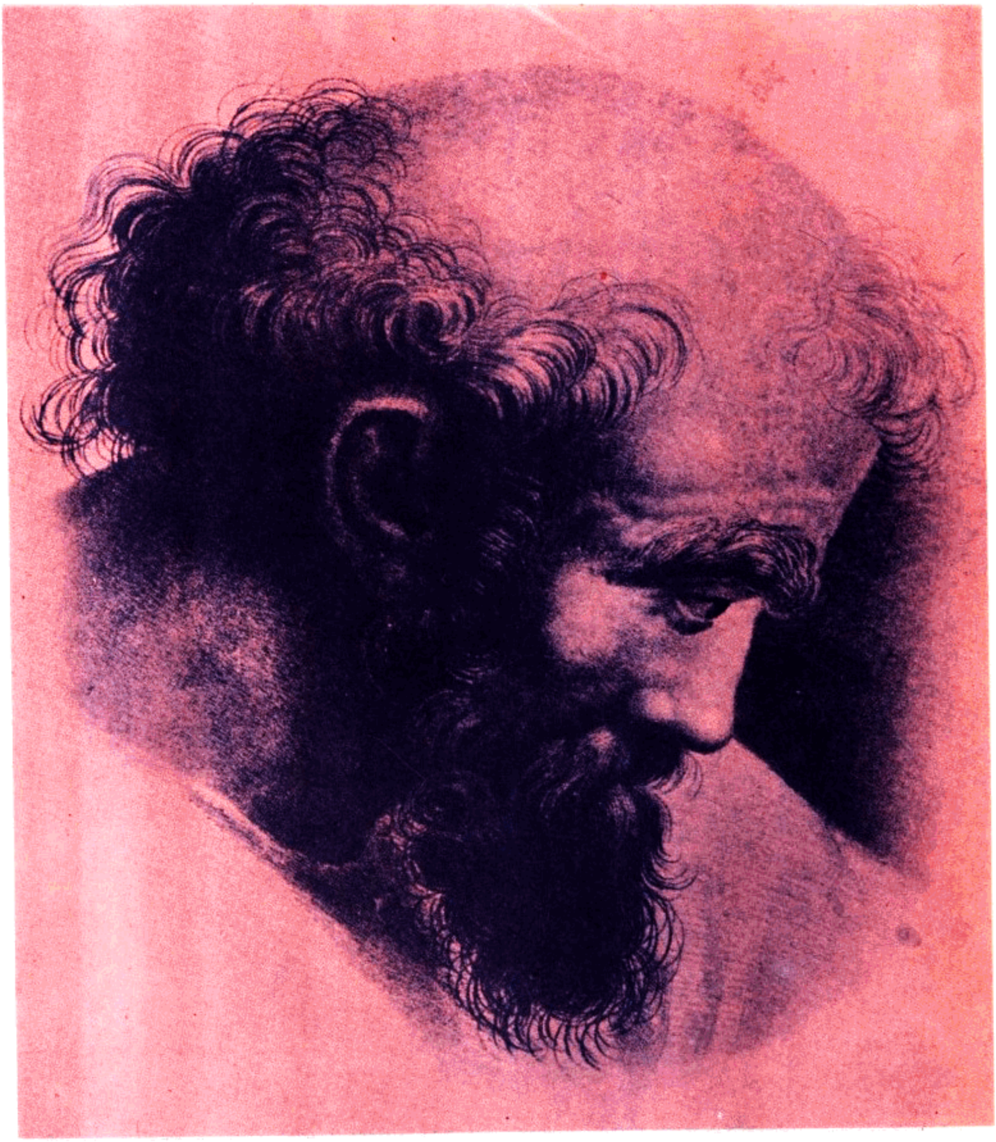
這套教本的編著，是同人等初次的嘗試，錯漏和不當的地方在所難免。希望高明先進不吝賜教，一切寶貴的意見，將作爲增訂時改進之用；這不但使同人等有所遵循，也將使學生受益不淺。謝謝。

周　紹　棠

於香港中文大學聯合書院

一九六六年五月

畢達哥拉斯



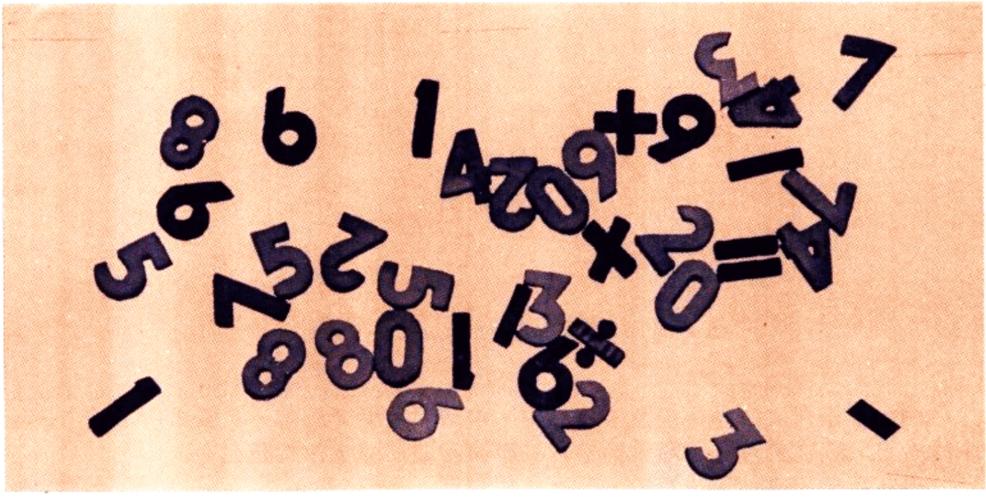
PYTHAGORAS

ABOUT 582–500 B.C.

第一册　上卷

目　　錄

第一章



數

在現代生活中數字是很重要的，我們不單祇用數字來計算或表示多少，多大，多長，多重及時間，我們更用數字來表示次序，考試的名次和生辰都是用數字表示的。

我們亦用數字以識別人和物，在香港年齡超過十二歲的人都有身份證，身份證上的號數可以作爲這人的記號，我們乘搭"3"號巴士到蒲非道，我們亦見到巴士票，戲院座位以及汽車都有號數。

路上的房屋也有號數，從一間房屋的號數我們可以略知它在路上之位置。

數字亦用來指示某一地方在地球上的位置。例如香港在北緯 22 度及東徑 114 度。

數字亦常用來分類，大廈裏的第 410 號室有什麽意義呢？一般情形，這表示四樓上的第 10 號室。學校內的每課室可能編有號數，圖書舘裏的書必編有號數，編號爲 510 的書是數學書，而算術的編號却是 511.

每本書上的每一頁都有號數以便參考，例如在本書裏除了頁數有編號外圖 2.5 表示第 2 章裏的第 5 個圖。

數字，數字，隨處都是數字環繞着我們。許多數字並不是用來計算而是各有用途的（例如作爲標識），你試找些出來。

1.1 數和記數法

1.11. 數字

我們用數字符號來表示一個數目，這些符號就稱爲數字，圖 1.1 是古時幾個國家所用的數字。

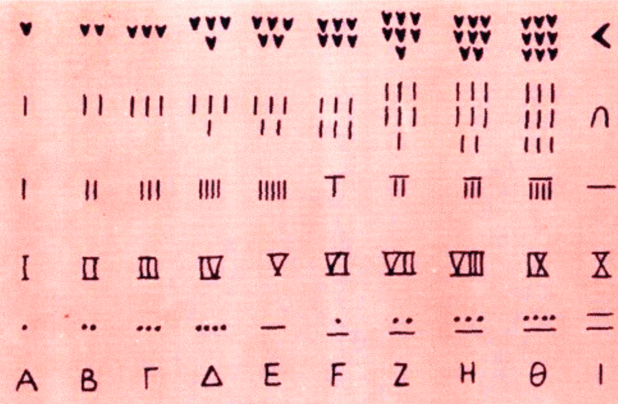


圖 1.1

圖內各橫列依次是古埃及，巴比倫，中國，羅馬，馬雅，希臘人所用的由一至十的數字，現在仍有人用羅馬數字放在書裏及鐘錶面上作爲記號。

現在我們用來計算或寫的都是阿拉伯數字：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 我們數數已習慣成自然，於是稱 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... 爲自然數。

一個數字和這一個數是不同的，即如一件物件的名稱對於這物件一樣，前者不過是後者的標識，一個人可有幾個不同的名字，即如上圖 ▼, I, ·, A 同時表示 1 的情形相同。

例 1

假設某一國的人用下列符號表示由 1 至 12：

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l.

試用上面的符號以答下列問題：

1) 在本課室內有幾個窗？
2) 在本課室內有幾扇門？
3) 一星期內有幾天？
4) 一隻手上有幾隻手指？
5) 一天上課幾堂？
6) a ＋ c等於什麽？
7) d ＋ e等於什麽？
8) 這課室內有幾個學生？
   回答第 8 問題時有困難嗎？用什麽方法來作答？

1.12 記數法

由上節問題 8 我們知道用數字來表示一個大數目常感困難，因爲沒有足夠的符號來應用。爲了應付這困難，我們便採用類似下面所用的記數法。

設小明有波子 20 顆，他將波子排成 6 顆一行，排了三行還剩兩顆。如圖 1.2 他可以將這些波子的數目記作"32"。"3"表示行數，"2"表示剩餘波子的顆數。

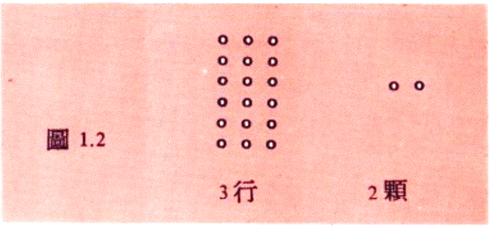


圖 1.2

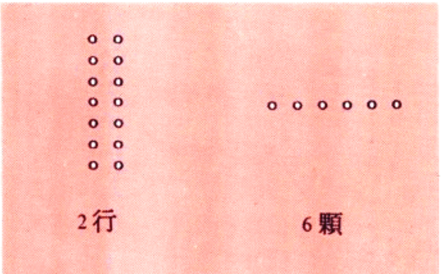


圖 1.3

設大衛也有波子 20 顆，他將波子排成 7 顆一行，排了兩行還剩六顆，如圖 1.3 他可以將波子數目記作"26"。"2"表示行數，"6"表示剩餘波子的顆數。

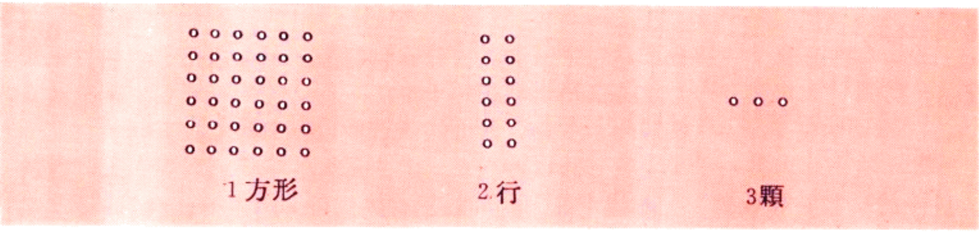
那麼"32"和"26"相等嗎？

這兩數目本來就是相等的，祇是記數法不同；小明的波子每行 6 顆，大衛的波子每行 7 顆，各人的記數法不同，看起來就有差異。他們的記數法稱爲不同底的記數法，前者的底是 6（或稱爲六進法）後者是 7（或稱爲七進法），可寫爲：

$$32_{(vi)} = 26_{(vii)}$$

每數右下方的小羅馬字，以括號括着的表示底，除了十爲底外，其他的底都不可略去。"$32_{(vi)}$"讀作"三二以六爲底"而不是"三十二以六爲底"而 $26_{(vii)}$ 讀作"二六以七爲底"。

若小明有更多的波子，他可以將 6 行排成正方形，餘下的是行，每行 6 顆，再餘下的是不足一行的波子，如下圖所示：



小明把波子的數目寫成"$123_{(vi)}$"。其中

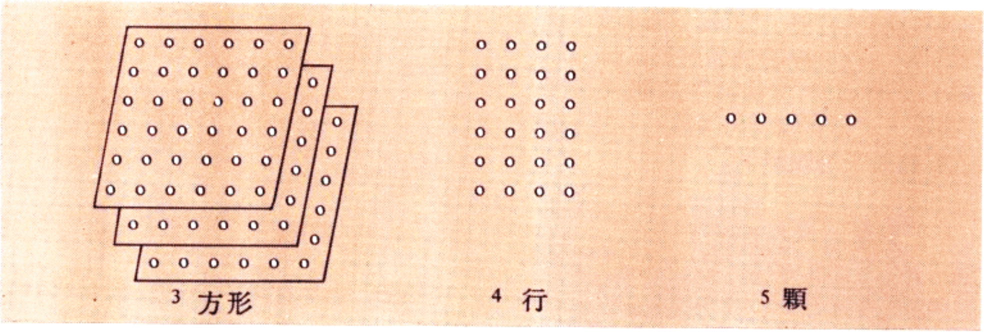
"1" 字表示正方形的數目。

"2" 表示行數，

"3" 表示不足一行的顆數。

若小明有更多的波子而排成不祇一個方形，他可以將各個方形疊在一起（假設

波子不瀉下來）如下圖：



這裏有三個方形，四行及五顆，可以寫為 $345_{(vi)}$ ，這裏共有幾顆波子呢？

小明可以用數字 "3" 來表示 3 顆，又可以用 " 3 "來表示 3 行（即 3×6）又可以用 " 3 "來表示 3 個方形（即 3×36）· 3 字在不同位置時所代表的數是不同的，簡言之，在記數法內同一數字 (3) 若位置不同則所代表的數是不同的（即 3×1 ，3×6 ，3×36）·

例 2

試用畫圖或其他方法證明：

a) $13_{(iv)} = 21_{(iii)}$

b) $31_{(iv)} = 23_{(v)}$

c) $63_{(x)} = 77_{(viii)}$

d) $40_{(v)} = 32_{(vi)}$

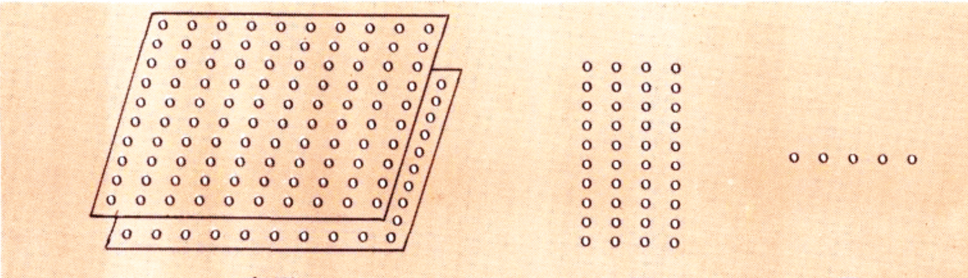
在 (*d*)中 " 0 "表示什麼？為什麼要將 " 0 "寫上？

例 3

若小明將波子排成六顆一行則他怎樣將 7 顆，18 顆，67 顆及 93顆記述出來？他要用幾個符號來表示以 6 為底的數目？又怎樣寫出 (*a*) 80 及 (*b*) 45 兩數目？

假如我們選取了一個數字為底則一切數目無論怎樣大，都可以用有限個符號來表示·我們平常記數字的方法是慣用十為底的十進法·在這法內，祇要十個符號 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 就夠用·每個符號所代表的數目與它的位置有關·

取一數 245 來看，" 2 "表 2個百，" 4 "表 4 個十，" 5 "表 5 ，我們數數大於十的，數它有幾個十，超過十個十的，數它有幾個百，超過十個百的，數它有幾個千，餘類推．試看下圖：



這數字等於：

$$2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5.\ (10^2 = 10 \times 10)$$

同理， $2735 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5.$

$$(10^3 = 10 \times 10 \times 10)$$

上面兩數字可以寫成 $245_{(x)}$；及 $2735_{(x)}$． 如不引致誤會則“ x ”字常可略去。

一個大數目，寫起來位數很多，我們常用逗點“ ，”來將數字由右至左分成三個一組，例如二千七百三十五寫爲2,735 ，三千四百五十六萬七千八百九十，可以寫爲 34,567,890

在羅馬數字中，I 表示 1 ，V 表 5 ，X 表 10 ，L 表 50 ，C表 100 ，D表500 M 表 1000 。他們亦應用加減法於記數法內；如在一個大的數字的右旁寫一個小數字則表示兩者之和，例如 VI 表 6・如在大的數字的左旁寫一個小數字則表示兩者之差，例如 IV 表 4 ．XVII 表 17，IX 表 9 ，XLIX 表 49 ，CXC 表 190 •

習題 1A

1) 讀出下列羅馬數目：

MCXIV,	CM,	XXVII,	XLIV,
CCCLXXIV,	MCMLXIX,	MCCCXLVI	

2) 假如阿拉伯數字中沒有“ 0 ”你怎樣表示 (*a*) 三百 (*b*) 三百三十呢？(你要自創一種記數法)

3) 讀出下列各數：

1,001,	101,	110,	1,100,
1,111,	3,401,	3,140,	3,014,
245,307,	3,204,001,	42,000,000,	3,584,721,058.

4) 用阿拉伯數字寫出：

a) 一百五十萬零六百零二
b) 六千五百二十二
c) 四百八十萬
d) 十萬零八十五
e) 四十七萬二千三百一十
f) 四萬零三百六十九

g) 十二萬四千零五
h) 一千零三十七萬一百零二
i) 一百零一萬零一百零一
j) 二億四千八百萬零四百

1.13 換底法

我們習慣用十進法以至從不想及用其他方法去表示一數．若我們每隻手都有六隻手指的話，則早就可能用 12 爲底去記數了•

以 2 爲底的記數法（二進法）是很有用的，因爲那祇需兩個符號 1 和 0 去表示一切的數．由是可以用電流來表示二進的數，通電時表示 1，關閉時表示 0. 應用電子計算機時，所有數目都先化爲二進數然後計算•

若以 6 爲底則 $123_{(vi)} = 1 \times 6^2 + 2 \times 6 + 3 \times 1 = 51_{(x)}$． 若以 7 爲底則 $1203_{(vii)} = 1 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 0 \times 7 + 3 = 444_{(x)}$

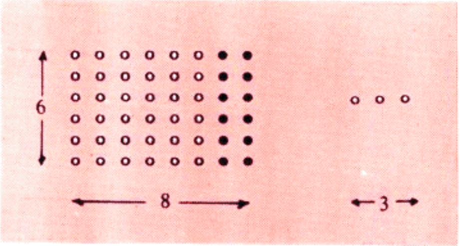
由一種記數法換爲另一種不同底的記數法是很容易的•

例 4

將 $51_{(x)}$ 化爲六進數•

設將 51 顆波子排成 6 顆一行則可得幾行？又餘下幾顆？

若所得的行數不止 6，我們又可以將 6 行拼成方形，那麼可得幾個方形，又餘下幾行呢？



$$\begin{array}{r|l} 6 & 51 \\ \hline 6 & 8 \; \ldots\ldots 3 \\ \hline & 1 \; \ldots\ldots 2 \end{array}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{51_{(x)} = 123_{(vi)}}}$$

例 5

將 $423_{(v)}$ 化爲六進數.

先將 $423_{(v)}$ 化爲十進數如下：

$$\begin{aligned} 423_{(v)} &= 4 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 \\ &= 113_{(x)} \end{aligned}$$

如例 4, 用 6 屢除 $113_{(x)}$，可得：

$113_{(x)} = 305_{(vi)}$

$$\therefore \quad \underline{\underline{423_{(v)} = 305_{(vi)}}}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 113 \\ \hline 6 & 18 \; \ldots\ldots 5 \\ \hline & 3 \; \ldots\ldots 0 \end{array}$$

例 6

設“ a ”代表 10，“ b ”代表 11，試將十二進數 $a03b_{(xii)}$ 化爲十進數。

$a03b_{(xii)} = 10 \times 12^3 + 0 \times 12^2 + 3 \times 12 + 11$.

$= 17{,}327_{(x)}$

習題 1B

1) 將下面各數化爲 10 進數：（“ a ”表 10，“b” 表 11）

a) $453_{(vi)}$　b) $102_{(vii)}$　c) $233_{(v)}$

d) $127_{(viii)}$　e) $3ab_{(xii)}$　f) $3{,}ba0_{(xii)}$

g) $b{,}30a_{(xii)}$　h) $4{,}352_{(vi)}$　i) $1{,}352_{(vi)}$

j) $4{,}601_{(vii)}$　k) $4{,}024_{(v)}$　l) $1{,}121_{(iii)}$

m) $6{,}540_{(viii)}$　n) $111{,}111_{(ii)}$　o) $101{,}010_{(ii)}$

p) $243_{(xii)}$

2) 將下列各數化爲 8 進數：

a) $342_{(x)}$　b) $513_{(x)}$　c) $620_{(x)}$

d) $1{,}428_{(x)}$　e) $1{,}021_{(x)}$　f) $300_{(vi)}$

g) $2{,}014_{(vii)}$　h) $732_{(ix)}$　i) $10{,}234_{(v)}$

j) $830_{(xi)}$　k) $110{,}001_{(ii)}$　l) $100{,}011_{(ii)}$

3) 將下列各數化爲 2 進數：

a) $31_{(x)}$　b) $43_{(x)}$　c) $201_{(x)}$

d) $153_{(x)}$　e) $102_{(x)}$　f) $31_{(vi)}$

g) $410_{(v)}$　h) $203_{(vi)}$　i) $715_{(ix)}$

j) $153_{(viii)}$　k) $432_{(viii)}$　l) $a{,}b05_{(xii)}$

(a = 10 , b = 11)

4) 將下列各數化爲十二進，以 a 表 10，b 表 11：

a) $243_{(x)}$　b) $1{,}037_{(x)}$　c) $2{,}005_{(x)}$

d) $1{,}742_{(x)}$　e) $3{,}625_{(vii)}$　f) $110{,}110{,}110_{(ii)}$

g) $243_{(viii)}$　h) $101{,}001{,}010_{(ii)}$

5) 在度量衡中，我們常將多個小的單位集爲另一個大單位，例如將 60 秒作爲一分 60 分作一爲一小時等，這些單位的變化就和非十進數的計算法相似。

試將　a) 280 分化爲小時與分；

b) 128 安士化爲磅及安士；

c) 128 吋化爲呎及吋；

d) 7 呎化爲碼及呎；
e) 254 新辨士化爲鎊；
f) 125 兩化爲斤及両；
g) 123 小時化爲日及小時；
h) 8鎊化爲新辨士；
i) 2 小時 42 分化爲分鐘；
j) 2 呎 9 吋化爲吋；
k) 38 日化爲星期及日；
l) 4 斤 12 両化爲両；
m) 144 化爲打.

1.2 數的運算

1.21 二進法算術

電子計算機儲存數據和進行運算都用二進數．所用的運算主要是加和減．演算乘法時是將加法重複，而除法時是將減法重複•由於它有極高的速度，所以我們不必爲它所化的時間來擔心，一具普通的電子計算機在一秒鐘內可以計算像 123,456,789 ×987,654,321的問題好多次•

我們當然沒法在速度上和電子計算機來相比，我們要做的只是要瞭解它如何工作•事實上，所有一切無論多麼 複雜的機器也不過是由一些明白它的 原理的人製造出來吧了•

二進數的算術和十進數相似•在二進數中，我們祇用兩個符號（或數字），1和 0以表示任何一個數•因爲符號少，計算時所依據的基本方法就簡單．在加法來說有下列基本算法：

$$0 + 0 = 0; \qquad 1 + 0 = 1$$
$$0 + 1 = 1; \qquad 1 + 1 = 10$$

這結果可以用右表來表示：

第二數

+	0	1
0	0	1
1	1	10

第一數

例 1

計算 $101_{(ii)} + 11_{(ii)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\quad 11 \\ \hline \underline{\underline{1000}} \end{array}$$

我們可以將這些數化爲十進數然後驗算：

二進法	十進法
$\begin{array}{r} 101 \\ +\quad 11 \\ \hline 1000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \\ +\quad 3 \\ \hline 8 \end{array}$

做減法時不必另備一表，由加法表可得：

$$1 - 0 = 1; \qquad 0 - 0 = 0$$
$$1 - 1 = 0; \qquad 10 - 1 = 1$$

最後的結果是用於減法時借位•

例 2

計算 $1{,}001_{(ii)} - 111_{(ii)}$

$$\begin{array}{r} 1{,}001 \\ -\quad 111 \\ \hline \underline{10} \end{array}$$

現在讓我們做一個簡單的“計算機”來研究它怎樣工作。

先請數位同學站在課室前，舉高左手便算代表“1”，不舉手便代表“0”，所以圖內的同學是代表數字11,001.

1 1 0 0 1

開始計算的時候，大家把手放下，所以每個位的數字都是“0”，然後我們開始“輸入”數字。站在每個位置上的同學都或舉手或不舉手來表示這位置上應有的數字。在第二次輸入數字的時候，如果某一同學獲得“0”時，則不用理會這訊號。但如果獲得“1”時則須作下列其中之一的反應；(1) 若他本來未舉手的便把手舉起；(2) 若他本來已舉手的便要把手放下，並同時用右手輕推他右邊的同學。被推的同學則當作是獲得“1”的訊號而作應有的反應。

例 3

試用上述的計算機來做下列各題：

(i) 10,010 + 11,011

(ii) 1,011 + 1,110

若計算減法時這“計算機”應該怎樣工作？

習題 1C

1) 計算下列各二進數，並化爲十進數以驗算：

a) 100,010 + 1,001

b) 100,101 + 1,101

c) 10,101 + 10,011 + 11,100

d) 10,001,001 − 100,001

e) 10,111,011 − 1,101,101

f) 10,001,001 − 1,010,010

2) 化下列各數爲二進數並加演算：

a) 17 + 5 b) 28 + 16 c) 42 + 38 + 27

d) 50 − 21 − 14 e) 35 + 48 − 29 f) 43 − 26 + 15

演算乘法時須應用下列基本方法：

$$0 \times 0 = 0; \qquad 1 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0; \qquad 1 \times 1 = 1.$$

或用乘數表表示如下：

第二數

	×	0	1
第一數	0	0	0
	1	0	1

例 4

計算 101,011 × 101

```
          101011
×            101
----------------
        101011
         000000      (此行可省去不寫)
          101011
----------------
        11010111
```

用十進數驗算如下：

```
      二進法      |     十進法
     101,011     |        43
×        101     |   ×     5
-------------    |   --------
  11,010,111     |       215
```

計算除法時，上面乘數表仍要應用，而除數表是不需要的．

例 5

計算 11,010,111 ÷ 101

```
           101011  ...... 答數
     -----------
101 ) 11010111
      101
      ---
       110
       101
       ---
         111
         101
         ---
          101
          101
```

試用十進法來驗算結果．

例 6