微积分

下册

北京航空学院

一九七三年九月

目　　録

第七章　微分方程

第八章　幂级数

第九章 三角级数

第十章 空间解析几何

第十一章 多元函数

第十二章 二重积分

第七章 微 分 方 程

通过前几章的学习，我们已经看到变量间的函数关系是高等数学的主要研究对象。如何寻找变量间的函数关系是在科学技术中经常遇到的一个问题。它有时可以根据客观规律通过代数、三角等初等数学的方法直接表达出来；有时则要用微积分的方法才能解决。但是还会遇到更为复杂的情况，这时变量间的函数关系不能或不容易直接建立，却可以凭借具体问题的物理、数学规律，建立起含有待求函数及待求函数的导数或微分的关系式，这种关系式就叫做微分方程。通过解微分方程，我们可求出所需要的函数关系。

微分方程在自然科学和工程技术中有广泛的应用。本章着重讨论几种常见微分方程的解法。

§1 微分方程的基本概念

1.1 问题的引出

在不定积分一章中，实际已经遇到过简单的微分方程问题。例如物体作直线运动，已知其运动速度 $v(t)$，求其运动规律，即求路程与时间的函数关系。这个问题用求 $v(t)$ 的原函数已得到解决。下面再举几例介绍实践中微分方程问题。

例1 一曲线上任一点处的切线斜率等于这个点横座标的两倍，并且该曲线通过点（1，2），求该曲线的方程。

分析：设所求曲线的方程为 $y=f(x)$，而 $M(x,y)$ 点为曲线上任意点。由导数的几何意义可知，该曲线在 $M(x,y)$ 点的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}$，根据题意得到含有导数的关系式。

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{7.1}$$

下面我们就来找出 y 与 x 的函数关系。

解 由 (7.1) 知

$$dy=2xdx$$

两端积分，得

$$y=\int 2xdx$$

即

$$y=x^2+C \tag{7.2}$$

其中 C 为任意常数。当 C 取不同数值时，就得到不同的函数，它们都满足（7.1）式，因此（7.1）式有无穷多个解（参看图7—2）。但问题所要求的只是通过（1,2）点的曲线，就是说曲线方程（7.2）还应满足下面的条件：

当 $x=1$ 时，$y=2$．或表示为 $y|_{x=1}=2$．

将此条件代入（7.2）式中，得

$$2=1^2+C$$

由此定出 $C=1$，将 C 值代入（7.2）式，（7.2）式变为

$$y=x^2+1$$

即为所求的曲线方程。

例 2　一物体 M 只受重力作用由距地面 H 米处开始下落（自由落体），试求物体与地面距离 y 和时间 t 的关系。

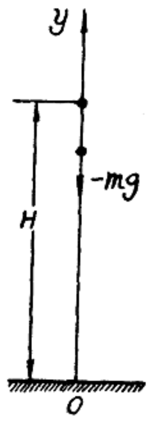

图　7—1

分析：取铅垂方向为 y 轴，正方向朝上，原点取在地面上（图 7—1）。物体 M 沿 y 轴运动，它在任意时刻 t 的位置可用函数 $y=y(t)$ 表示。由第二章可知，物体 M 的速度 $v=\frac{dy}{dt}$，加速度 $a=\frac{d^2y}{dt^2}$.

设物体 M 的质量为 m，则物体 M 所受的力为 $-mg$ 其中 $g=9.8$ 米/秒²，是重力加速度。（式子前的"负号"是由于重力的方向朝下，与 y 轴正方向相反）。

由牛顿第二定律：$F=ma$，得到含有导数的关系式

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg$$

上式两边约去 m，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \tag{7.3}$$

这个含有未知函数的导数的关系式就叫做微分方程。现在我们就从这个微分方程中解出 y 与 t 的关系。

解　对（7.3）式两端积分，得

$$\frac{dy}{dt}=-g\int dt$$

即

$$\frac{dy}{dt}=-gt+C_1 \tag{7.4}$$

对上式两端再积分一次，得

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{7.5}$$

这里 C_1，C_2 都是任意常数。

为了完全确定物体 M 的运动规律，必须确定 C_1 和 C_2 的值。根据题意我们知道物体 M 的运动还应满足下列条件（称为初始条件）

$$y|_{t=0}=H \text{（初始位置）}, \quad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0 \text{（初始速度）}$$

把$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0$代入（7.4）式，得　$0=0+C_1$，　即$C_1=0$

把$y|_{t=0}=H$代入（7.5）式，得　$H=0+0+C_2$　即　$C_2=H$

将　C_1，C_2的值代入（7.5）式，得

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+H \tag{7.6}$$

这就是物体M自由下落时路程y与时间t的关系。

例3　将一加热到T_0℃的物体，放在保持0℃的流动水中冷却，求物体在冷却过程中温度T随时间t的变化规律$T=T(t)$.

分析：由经验知道，物体与周围介质的温差越大，物体冷却得越快。实验证明，物体冷却的速度与周围介质的温差成正比。

我们知道物体的冷却速度就是温度T对时间t的变化率，即导数$\frac{dT}{dt}$物体在冷却过程中温度T随时间t的增加而减少，所以冷却速度为负值，即有$\frac{dT}{dt}<0$；又由于冷却速度与温差$(T-0)$℃$=T$℃成正比，故有

$$\frac{dT}{dt}=-KT \quad \text{或} \quad \frac{dT}{dt}+KT=0 \tag{7.7}$$

其中$K>0$是比例系数，可由实验测定。

（7.7）式描述了物体的冷却规律，它把未知函数$T(t)$和它的导数联系起来了，这就是一个含有未知函数$T(t)$的微分方程。此外，我们假设了物体原来加热到T_0℃若把物体放入介质的初始时刻记为$t=0$，那么函数$T(t)$还应满足条件

$$T|_{t=0}=T_0$$

如何由（7.7）式解出温度T与时间t的关系呢？对（7.7）式两边直接积分行吗？下一节我们再给出答案。

从以上的例子我们看到，研究微分方程时面临着两个任务：一个是如何从实际问题写出包含未知函数的导数或微分的方程，也就是如何建立微分方程。另一个是微分方程建立后，怎样求出未知函数，即微分方程的求解问题。

1.2　微分方程的基本概念

为进一步研究问题方便起见，我们先明确一些微分方程的基本概念。

1.　**微分方程**：包含未知函数的导数（或微分）的方程叫微分方程。

如（7.1）、（7.3）、（7.7）式都是微分方程。

2.　**微分方程的阶**：在初等数学中，我们学过代数方程。大家知道，根据未知数的方次，代数方程可分为一次、二次代数方程等。类似，根据微分方程中所包含的未知函数的导

数的阶数，也把微分方程分为一阶、二阶和高阶微分方程等。方程中出现的未知函数的导数的最高阶数，叫做微分方程的阶。

如前面（7.1）、（7.7）式为一阶微分方程。（7.3）式为二阶微分方程。

3. 微分方程的解：如同代数方程的“根”的概念一样，我们把满足微分方程的函数叫做该微分方程的解。也就是说，若把解代入微分方程时，该方程两边恒等。如 $y=x^2+C$ 及 $y=x^2+1$ 都是方程（7.1）的解。$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1+C_2$ 及 $y=-\frac{1}{2}gt^2+H$ 都是方程（7.3）的解。

但在这些解中，有的含有任意常数，有的不含。我们把含有任意常数，且任意常数的个数正好和方程的阶数相等的解叫方程的通解。如（7.2）式是（7.1）式的通解，（7.5）式是（7.3）式的通解。

通解中的任意常数根据某些条件确定下来这种解叫方程的特解。如 $y=x^2+1$ 是(7.1)式的特解，$y=-\frac{1}{2}gt^2+H$ 是（7.3）式的特解。

用来确定特解的条件叫定解条件（如初始条件即为定解条件的一种）。定解条件在实际问题中有一定的具体意义。如例1中的定解条件为 $y|_{x=1}=2$，表示曲线通过此点，在例1中定解条件给出了落体的初始位置和初始速度。

可以看出，在通解求出后，特解便可以根据定解条件得出。因此在解微分方程时，一般是先求出它的通解。

4. 解的几何意义：我们已经看到，微分方程的解是一些函数，从几何角度讲它表示平面曲线。因通解中含有任意常数，所以它表示的不只是一条曲线，而是具有一定共性的许多曲线，这些曲线的全体叫做微分方程的积分曲线族。特解所表示的只是其中某一条确定的曲线。例如微分方程（7.1）式的通解是 $y=x^2+C$. 它表示一族曲线（图7—2），每一曲线上任一点处的切线斜率都是该点横座标的二倍。而特解 $y=x^2+1$ 只表示通过（1,2）点的一条确定的曲线。

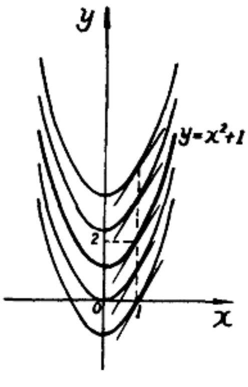

图 7—2

习 题 一

1. 什么叫做微分方程和微分方程的阶？下列方程中哪些是微分方程？并指出它的阶数。

(1) $y'=2x+6$ (2) $y=2x+6$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=x$ (4) $x^2-2x=0$

(5) $x^2dy+y^2dx=0$　　　　(6) $y(y')^2=1$

(7) $ax+by'=c$　　　　(8) $y^2-3y+2=0$

(9) $y''-3y'+2y=x$　　　　(10) $yy''=2y'$

2. 什么叫微分方程的解？验证下列函数（其中C为任意常数）是否是相应方程的解？是通解还是特解？

(1) $\frac{dy}{dx}-2y=0$. $y=\sin x$; $y=e^x$; $y=e^{2x}$; $y=4e^{2x}$; $y=Ce^{2x}$.

(2) $4y'=2y-x$.　$y=\frac{1}{2}x+1$; $y=Ce^{\frac{1}{2}x}$; $y=Ce^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}+1$.

(3) $y''-y'-2y=0$. $y=e^{-x}$; $y=e^x$; $y=e^{2x}$; $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$.

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$. $y=\sin 2x$; $y=C\sin 2x$; $y=e^{2x}$;

$y=\cos 2x$; $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

(5) $y''+9y=x+\frac{1}{2}$. $y=5\cos 3x+\frac{x}{9}+\frac{1}{8}$.

3. 验证下列函数是否是所给微分方程并满足所给初始条件的特解。

(1) $\begin{cases} y'+2y=0 \\ y|_{x=0}=1 \end{cases}$　　$y=2e^{-2x}$; $y=e^x$; $y=e^{-2x}$.

(2) $\begin{cases} y'+y=1+x \\ y|_{x=0}=0 \end{cases}$　　$y=\sin x$; $y=x$; $y=e^{-x}+x$.

4. 验证$y=Cx^3$是方程$3y-xy'=0$的通解，并求满足初始条件$y|_{x=1}=2$的特解，画出通解和特解的图形。

5. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解。

(1) $\begin{cases} \frac{dy}{dt}=\sin\omega t \quad (\omega\text{为常数}) \\ y|_{t=0}=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y'=\frac{1}{x} \\ y|_{x=e}=0 \end{cases}$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$　　初始条件：$y|_{x=0}=0$; $y'|_{x=0}=2$.

6. 一曲线通过点(1,0)且该曲线上任意点$M(x,y)$处切线斜率为x^2。求该曲线的方程。

7. 利用微分方程证明：如果一曲线上各点处的曲率都等于零，这曲线一定是直线。

§2 常見一阶微分方程的解法

一阶微分方程是含x、y及y'的方程，它的一般形式是

$$y'=f(x,y)$$

这里 $f(x,y)$ 表示含有 x,y 的一个算式。下面由简到繁介绍三种类型的一阶方程的解法。

2.1 最简单的一阶微分方程的解法

在一阶微分方程中形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{7.8}$$

的方程是最简单的一阶微分方程，它的右端只是自变量的已知函数。如上一节例 1 就属于此类型。这种方程的解法很简单，将（7.8）式改写成微分的形式

$$dy = f(x)dx,$$

然后两边积分

$$dy=\int f(x)dx=F(x)+C \qquad [F'(x)=f(x)]$$

即为所求之通解。实际上就是求不定积分的问题。若要求满足定解条件

$$y\Big|_{x=x_0}=y \ .$$

的特解，只要将它代入通解定出任意常数C 就行了。

大家考虑一下，诸如下列类型方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x) \qquad \text{或} \quad y''=f(x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=f(x) \qquad \text{或} \quad y'''=f(x)$$

会解吗？这类方程的特点是：左端是未知函数的高阶导数，而右端只是自变量 x 的函数。显然，凡属

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f(x) \qquad \text{或} \quad y^{(n)}=f(x) \qquad (n=1、2、3、\cdots\cdots)$$

类型的方程，都可用逐次积分的方法解决。

2.2 可分离变量的微分方程的解法

如上一节例 3 中所遇到的一阶微分方程

$$\frac{dT}{dt}=-KT \tag{7.9}$$

它的通解就不能直接用积分方法求出。为什么呢？因为方程（7.9）右端含有未知函数 T，若直接对自变量t积分，积分 $-K\int Tdt$ 积不出来，这就是困难所在。为了解决这个矛盾，我们用类似解一元一次代数方程“移项”的办法预先将未知函数及其微分放在等号一边，将其他量放在等号另一边。按此原则（7.9）式改写为

$$\frac{dT}{T}=-Kdt$$

然后两边求积分

$$\int \frac{dT}{T} = -K\int dt$$

可得

$$lnT + C_1 = -Kt + C_2 \qquad (C_1\ C_2\ 为任意常数)$$

即

$$lnT = -Kt + C_2 - C_1$$

因为 $C_2 - C_1$ 仍是任意常数，可用一个新的任意常数 $C_3 = C_2 - C_1$ 代替。得

$$T = e^{-Kt + C_3} = e^{-Kt} \cdot e^{C_3}$$

又因 e^{C_3} 仍为任意常数，可令 $C = e^{C_3}$，则

$$T = Ce^{-Kt}$$

就是方程（7.9）的通解。

将初始条件 $T|_{t=0} = T_0$ 代入通解

$$T_0 = Ce^{-K \cdot 0}$$

得

$$C = T_0$$

所以满足上述初始条件的特解为

$$T = T_0 e^{-Kt}$$

这就是物体在冷却过程中，温度 T 随时间 t 的变化规律。

由上面的求解过程可以看出，关键的一步是将方程中的未知函数及其微分与自变量分离在等号两边，然后再积分。这种方法叫分离变量法。

例1 求解

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y|_{x=0} = 1. \end{cases}$$

解 解微分方程，通常是先求出方程的通解，然后再求满足初始条件的特解。下面就分这两步做。

1）求方程的通解

将方程分离变量，得

$$ydy = -xdx$$

两边积分

$$\int ydy = -\int xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$x^2+y^2=2C_1$$

令 $C=2C_1$，得方程的通解为

$$x^2+y^2=C$$

2）求满足初始条件的特解将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入通解得

$$0^2+1^2=C$$

$$C=1$$

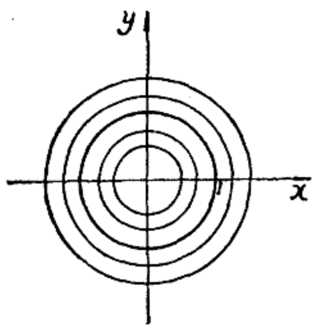

图 7—3

所求特解为

$$x^2+y^2=1\ .$$

如果把通解和特解的图形画出来，通解 $x^2+y^2=C$ 在 xoy 平面上就是一族圆心在原点，半径不同的圆（见图7—3）。满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解 $x^2+y^2=1$ 的图形就是过点 (0,1) 的一个圆（图中粗线所示）。

例 2 求方程

$$y'=\frac{2y}{1+x}$$

的通解。

解 将方程分离变量

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{1+x}$$

两边积分

$$lny=2ln(1+x)+C_1$$

可化为

$$ln\frac{y}{(1+x)^2}=C_1$$

写成指数形式

$$y=e^{C_1}(1+x)^2$$

令 $C=e^{c_1}$，方程通解化为

$$y=C(1+x)^2$$

在求解过程中，通常要利用对数和指数的性质将解化简。上例方程分离变量后积分，可直接得此结果 $lny=2ln(1+x)+lnC$，即用 lnC 代表任意常数，这样通解很易化简为

$$y=C(1+x)^2\ .$$

上面几个例子说明了“分离变量法”是解一阶微分方程的一种简便有用的方法，但并不

是所有的一阶方程都能适用。例如方程 $\frac{dy}{dx}=x+y$ 虽然很简单，但却无法将变量分离。

一般来说，若一阶方程能写成以下形式

$$\frac{dy}{dx}=F(x)\Phi(y) \quad 或 \quad M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0$$

就可分离变量。这种方程就叫做“可分离变量的微分方程”。例如

$$\frac{dy}{dx}=tgx\ ,$$

$$(1+y^2)dx+(y+x^2y)dy=0\ ,$$

$$(sinx)y'-ylny=0\ .$$

等都是可分离变量的微分方程。

用分离变量法求解微分方程的步骤是：

1）将未知函数及其微分移到等式一边，将自变量移到另一边。

2）两边分别求不定积分。

3）化简结果。若求特解则再将初始条件代入，定出任意常数 C 来。

2.3 一阶线性微分方程的解法

如同直线方程又叫线性方程一样，在微分方程中，如果未知函数及其导数都是一次的，具有这种特点的方程就叫做线性微分方程。如前面遇到的

$$\frac{dT}{dt}=-KT$$

就是一个一阶线性方程。因为含未知函数 T 及其导数 $\frac{dT}{dt}$ 的项都是一次的。又如

$$3y'+2y = x^2\ ,$$

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{sinx}{x}$$

等也都是一阶线性微分方程。

一阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx}P(x)y=Q(x)$$

其中 $P(x)$、$Q(x)$ 皆是自变量的已知函数

若此方程右端 $Q(x)=0$，方程变为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \qquad (7.10)$$

叫做一阶线性齐次方程，这种方程可用分离变量法求得它的通解。

将方程（7.10）分离变量

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

两边积分

$$\int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx+C_1 \qquad (C_1\text{为任意常数})$$

$$\ln y=-\int P(x)dx+C_1$$

化为指数形式

$$y=e^{-\int P(x)dx+c_1}$$

$$=Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (C=e^{c_1}\text{仍为任意常数})$$

上式就是齐次方程的通解。

再进一步考察 $Q(x)\neq 0$ 的情况，此时方程为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{7.11}$$

我们称它为一阶线性非齐次方程。如何求非齐次方程（7.11）的通解呢？

比较方程（7.10）与（7.11），两者左端完全一样，不同的是右端。非齐次方程的右端 $Q(x)\neq 0$，而齐次方程的右端 $Q(x)\equiv 0$，即齐次方程是非齐次方程的特殊情况。两者既然有这种内在联系，又有区别，那么可以设想它们的解也应该具有一定的联系，又有区别。

函数 $Cy=e^{-\int P(x)dx}$（C 为任意常数）是齐次方程的通解，那么非齐次方程的通解是否也应该具有这种形式（任意常数乘以一个指数函数）？我们断定函数 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ 绝不是非齐次方程的解。因为它已经是齐次方程的解了。也就是说，非齐次方程的解即应该具有这种形式，又不能原封不动的照搬，我们设想它能否具有 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 这种形式的解呢？即将通解中的任意常数 C 换为自变量 x 的函数 $C(x)$.

实践是检驗眞理的标准，下面我们就来驗证一下上述想法是否正确，看 $C(x)$ 能否求出来。设

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

是方程（7.11）的解，其中 $C(x)$ 是待定函数。下面将它代入非齐次方程中，看 $C(x)$ 是什么函数时，方能使上述函数 $y(x)$ 为非齐次方程的通解。

$\because$

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}+C(x)\frac{d}{dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\right)$$

$$=\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}\left(-\frac{d}{dx}\int P(x)dx\right)$$

又 $\because$

$$\frac{d}{dx}\int P(x)dx=P(x)$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=e^{-\int P(x)dx}\left[\frac{dC(x)}{dx}-C(x)P(x)\right]$$

将 y 及 $\frac{dy}{dx}$ 一起代入方程（7.11），方程左端为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=e^{-\int P(x)dx}\frac{dC(x)}{dx}$$

此结果要与方程（7.11）右端恒等

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dC(x)}{dx}=Q(x)$$

即
$$\frac{dC(x)}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\therefore \qquad C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1 \qquad (C_1\text{是任意常数})$$

$$\therefore \qquad y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1\right]e^{-\int P(x)dx} \qquad (7.12)$$

这就是一阶线性非齐次方程的通解。

上面这种把对应齐次方程通解中任意常数 C 换为自变量 x 的函数，以解非齐次方程的方法叫做常数变易法。

进一步观察这个通解，其表达式由两项组成；其中一项 $C_1e^{-\int P(x)dx}$ 是对应齐次方程的通解；另一项 $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 可以验证是非齐次方程的一个特解（即相当于 $C_1=0$ 的情况），所以一阶线性非齐次方程的通解是由它对应齐次方程的通解加上一个非齐次方程的特解所组成。

若用 y 表示非齐次方程的通解。$\bar{y}$ 表示对应齐次方程的通解。Y 表示非齐次方程的一个特解。则有

$$y=\bar{y}+Y$$

这个通解的构成，不仅对一阶线性非齐次方程适用，对任意阶的线性非齐次方程都适用。这个结论很重要，以后我们研究二阶线性方程时还要用到它。

知道了线性非齐次方程解的构造，也就知道了求解的步骤。即是首先求出对应的齐次方程的通解，再求一个非齐次方程的特解，把它们相加就得到非齐次方程的通解。而齐次方程的通解可用分离变量法求，而非齐次方程的特解可用常数变易法求得。

例1 求方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解

解： 这是一个一阶线性非齐次方程。

1）先求对应齐次方程的通解。

对应齐次方程为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0$$

分离变量 $$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

两边积分 $$lny=-lnx+lnC$$

化简得 $$\bar{y}=\frac{C}{x}$$

2）求非齐次方程的一个特解

用常数变易法，设

$$Y=\frac{C(x)}{x}\quad (C(x)\text{为待定函数})$$

为了确定待定函数 $C(x)$，需将 Y 及 Y' 代入原方程。

$$Y=\frac{C(x)}{x}$$

$$Y'=\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}$$

代入原方程

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{C(x)}{x}=\frac{sinx}{x}$$

$$C'(x)=sinx$$

$$C(x)=\int sinxdx+C$$

只要一个原函数就行了，所以取

$$C(x)=-cosx$$

于是得到非齐次方程的一个特解为

$$Y=-\frac{cosx}{x}\qquad (\text{学员可以自己代入方程験证})$$

则非齐次方程的通解为

$$y=\frac{C}{x}-\frac{cosx}{x}$$

求一阶线性非齐次方程的通解，也可用直接代入通解公式（7.12）的办法，不必每解一题都要重复上述步驟。下面举例说明。

例 2 求方程 $xy'-y=x$ 的通解。

解 这仍是一个一阶线性非齐次方程。和一阶线性非齐次方程的一般表达式（7.11）

相比较，上式改写为

$$y' - \frac{1}{x} y = 1$$

可知：
$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$Q(x) = 1$$

观察通解公式（7.12）

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right] \tag{7.12}$$

的组成，则需计算

$$\int P(x)dx = -\int \frac{1}{x} dx = -lnx$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{lnx} = x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-lnx} = \frac{1}{x}$$

$$\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{x} dx = lnx$$

将上述结果代入通解公式（7.12），得通解为

$$y = x(C + lnx)$$

例 3 求方程 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ 的通解

解 这仍是一个一阶线性非齐次方程，和一阶线性非齐次方程的一般表达式（7.11）相比较，它已是标准形式，且

$$P(x) = 2x$$

$$Q(x) = xe^{-x^2}$$

则
$$\int P(x)dx = \int 2x dx = x^2$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-x^2}$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{x^2}$$

$$\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx = \int xe^{-x^2} e^{x^2} dx$$

$$= \int x dx$$

$$= \int \frac{1}{2} x^2$$

将以上结果代入通解公式（7.12），得通解为

$$y = e^{-x^2}\left(C + \frac{1}{2}x^2\right)$$